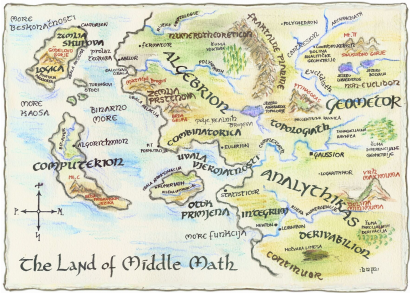
Povijest matematike

5. Starokineska i staroindijska matematika.

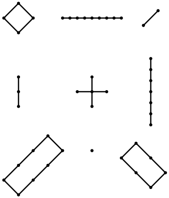
Franka Miriam Brückler

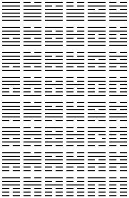


Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Malo ranokineske povijesti i matematike

- najstarije kulture oko rijeka Huang He i Jangce: 3000.–1500. pr. Kr. (iza 2000.: kinesko pismo)
- najkasnije oko 1200. g. pr. Kr. (nepozicijski) dekadski brojevni sustav
- najstariji pouzdaniji podaci o kineskoj općoj i znanstvenoj povijesti su iz doba dinastije Džou (Zhou) u 11.–5. st. pr. Kr.: Halleyev komet, kalendari, Konfucije i Lao Ce
- 3×3-magični kvadrat (lo šu)
- $\boxed{\textit{I Čing}}$ (*Knjiga promjena*)





Starokineske brojke i računanje

- Od 4. st. pr. Kr. štapičaste brojke (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije)
- one su posljedica tipičnog starokineskog pomagala za računanje: štapića (kinseski abakus suanpan je uveden dosta kasnije, vjerojatno u 2. st. pr. Kr., a u široj uporabi je tek od 16. st.)
- Zapišite današnji datum koristeći štapičaste brojke!

Starokineske brojke i računanje

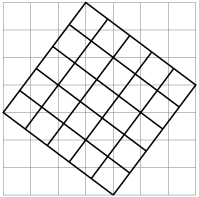
- Od 4. st. pr. Kr. štapičaste brojke (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije)
- one su posljedica tipičnog starokineskog pomagala za računanje: štapića (kinseski abakus suanpan je uveden dosta kasnije, vjerojatno u 2. st. pr. Kr., a u široj uporabi je tek od 16. st.)
- Zapišite današnji datum koristeći štapičaste brojke!
- Od 2. st. pr. Kr. u Kini se pojavilo razlikovanje **pozitivnih brojeva** (*dženg*), koji su prikazivani crvenim štapićima, i **negativnih brojeva** (*fu*), prikazivanih crnim štapićima.
- Zapišite 41205 i −803 štapićastim brojkama!

Najstarij sačuvani kineski matematički tekstovi

- u doba dinastije Han (206. pr. Kr. – 220. AD): procvat matematike, znanosti i tehnike, pridaje se važnost matematičkom obrazovanju; proizvodnja papira; Sunčeve pjege, seizmograf, ... U 1. st. prodire budizam iz Indije; u 3. st. carstvo se raspalo

Najstarij sačuvani kineski matematički tekstovi

- u doba dinastije Han (206. pr. Kr. – 220. AD): procvat matematike, znanosti i tehnike, pridaje se važnost matematičkom obrazovanju; proizvodnja papira; Sunčeve pjege, seizmograf, ... U 1. st. prodire budizam iz Indije; u 3. st. carstvo se raspalo
- *Džoubi suanđing* (*Aritmetika Džouovog gnomona*, između 100 pr. Kr. i 100. A.D.) — uz zadatke vezane za astronomske i kalendarske izraćune, najzanimljiviji dio je vezan uz pravilo gou gu („kraća kateta, dulja kateta“)



Điudžang šuanšu — *Devet poglavlja umijeća računanja*

1. „Mjerenje polja”: $\pi \approx 3$
2. „Proso i riža”: trojno pravilo
3. „Raspodjela po proporciji”
4. „Koja širina?”: kvadratni i kubni korijeni
5. „Rasprave o radu”: volumeni
6. „Pošteni nameti”: primjena proporcionalnosti na plaće i poreze
7. „Višak i manjak”: linearne jednadžbe s 1 nepoznanicom (*regula falsi*)
8. „Pravokutne tablice”: sustavi linearnih jednadžbi
9. „Pravokutni trokuti”

Numeričko računanje drugih korijena

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

Numeričko računanje drugih korijena

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

Numeričko računanje drugih korijena

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

$$55225 = 10000a^2 + \ldots \Rightarrow a = 2$$

Numeričko računanje drugih korijena

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

$$55225 = 10000a^2 + \ldots \Rightarrow a = 2$$

$$15225 = \underline{100(40 + b)b} + \ldots \Rightarrow b = 3$$

Numeričko računanje drugih korijena

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

$$55225 = 10000a^2 + \ldots \Rightarrow a = 2$$

$$15225 = \underline{100(40 + b)b} + \ldots \Rightarrow b = 3$$

$$2325 = (460 + c)\,c \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \lfloor\sqrt{55225}\rfloor = 235.$$

Rješavanje linearnih sustava jednadžbi

1. zadatak (metoda fang čeng)

Iz 3 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou. Iz 2 snopa dobrog žita, 3 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz 1 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 3 snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?

Očito je dou mjera za što?

Rješavanje linearnih sustava jednadžbi

1. zadatak (metoda fang čeng)

Iz 3 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou. Iz 2 snopa dobrog žita, 3 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz 1 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 3 snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?

Očito je dou mjera za što? Postavite i riješite odgovarajući sustav na moderan način! Zatim komentirajte izvorno rješenje:

Rješavanje linearnih sustava jednadžbi

1. zadatak (metoda fang čeng)

Iz 3 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou. Iz 2 snopa dobrog žita, 3 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz 1 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 3 snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?

Očito je dou mjera za što? Postavite i riješite odgovarajući sustav na moderan način! Zatim komentirajte izvorno rješenje:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Rješenje je $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$ dou za loše, $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou za srednje i $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou za dobro žito.

- Džang Heng (78.–139.) je empirijsko pravilo

  (Površina kruga je) četvrtina umnoška od trostrukog kvadrata promjera[1]

  modificirao u

  Kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose se kao 8 : 5.

[1] Također i: (površina kruga je četvrtina umnoška opsega i promjera.

- Džang Heng (78.–139.) je empirijsko pravilo

  (Površina kruga je) četvrtina umnoška od trostrukog kvadrata promjera[1]

  modificirao u

  Kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose se kao 8 : 5.

- Liu Hui (3. st.) je opisao postupak sličan Arhimedovom iterativnom postupku za aproksimiranje π (a za praktične račune je zagovarao aproksimaciju $\frac{157}{150} = 3{,}14$).
- U skomentarima *Devet poglavlja* Liu Hui je objasnio i opravdao postupke koji se u njima nalaze, a dio komentara je odvojen u *Matematički priručnik o jednom otoku u moru*, gdje se bavi određivanjem

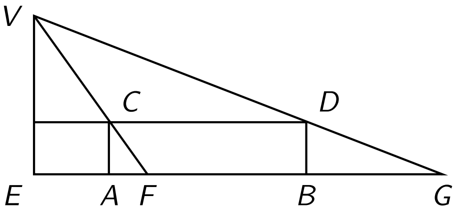
[1] Također i: (površina kruga je četvrtina umnoška opsega i promjera.

Zadatak

Dva štapa visine 3 džang[a] *zabijeni su u zemlju i razmaknuti* 1000 bu. *Jedan štap je bliži udaljenom otoku nego drugi. Ako promatrač stoji* 123 bu *iza prvoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog štapa, a ako stoji* 127 bu *iza drugoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog drugog štapa. Koliko je visok otok i koliko je daleko od bližeg mu štapa?*

---

[a] $1\,\text{džang} = 10$ či, odnosno u to doba 1 džang je bio otprilike $2{,}3\,\mathrm{m}$. Uz to je korištena i jedinica bu: 1 bu = 6 či, dakle 180 džang = 300 bu.



7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)
- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjen juan*

7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)
- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjen juan* (de facto Hornerov algoritam) Ćin Điušao, *Devet knjiga o matematici* (*Šušu điudžang*, 1247.), gdje je i

7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)
- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjen juan* (de facto Hornerov algoritam) Ćin Điušao, *Devet knjiga o matematici* (*Šušu điudžang*, 1247.), gdje je i
- opći slučaj kineskog teorema o ostacima (koji se prvi put pojavljuje negdje u 3.–5. st. kod Sun Dzija)

7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)
- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjen juan* (de facto Hornerov algoritam) Ćin Điušao, *Devet knjiga o matematici* (*Šušu điudžang*, 1247.), gdje je i
- opći slučaj kineskog teorema o ostacima (koji se prvi put pojavljuje negdje u 3.–5. st. kod Sun Dzija)
- Zadatak 100 ptica (5. st.): *Ako jedan pijevac košta* 5 *novčića, jedna kokoš* 3, *a tri pilića zajeno* 1, *koliko pijevaca, kokoši i pilića se može kupiti za* 100 *novčića ako treba kupiti ukupno* 100 *ptica?*

Malo indijske povijesti

- u 3. tisućljeću pr. Kr. gradske civilizacije uz Ind
- iza 1500. pr. Kr. indoarijski doseljenici
- Ca. 1500./1200.–800./500.: razdoblje veda (sanskrt; sulbasutre)
- oko 500. pr. Kr.: hinduizam, budizam, džainizam

Malo indijske povijesti

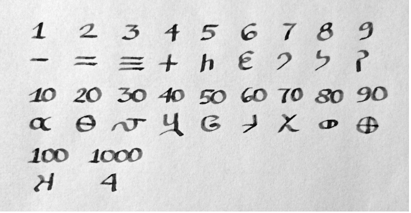
- u 3. tisućljeću pr. Kr. gradske civilizacije uz Ind
- iza 1500. pr. Kr. indoarijski doseljenici
- Ca. 1500./1200.–800./500.: razdoblje veda (sanskrt; sulbasutre)
- oko 500. pr. Kr.: hinduizam, budizam, džainizam
- 327.–325. pr. Kr.: Aleksandar Veliki
- 320.–544. dinastija Gupta: vrhunac indijske civilizacije
- 5.–12. st.: razne dinastije u malim državama; vrhunac staroindijske matematike

Sulbasutre (Pravila konopa)

- Geometrijske konstrukcije potrebne za izradu hramova i oltara
- Bez dokaza; nerazlikovanje egzaktnih i aproksimativnih konstrukcija
- u Katyayana-sulbasutri (ca. 3. st. pr. Kr.) *Konop rastegnut preko dijagonale pravokutnika daje površinu koju skupa daju njegova vertikalna i horizontalna stranica.*
- Kojoj aproksimaciji od π odgovara pravilo da se površina kruga računa kao površina kvadrata kojem je stranica $\frac{13}{15}$ promjera kruga?
- neke pitagorejske trojke

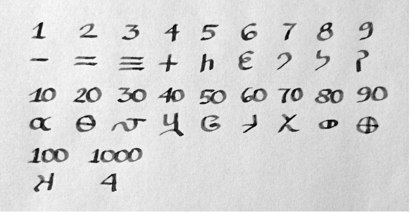
Dekadski pozicijski sustav s nulom

- brahmanske brojke (od ca. 4. st. pr. Kr.): dekadski nepozicijski brojevni sustav sa zasebnim simbolima za iznose $n \cdot 10^k$ s $n = 1, \ldots, 9$ i $k = 0, 1, 2$ te za 1000



Dekadski pozicijski sustav s nulom

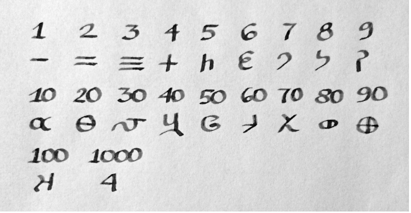
- brahmanske brojke (od ca. 4. st. pr. Kr.): dekadski nepozicijski brojevni sustav sa zasebnim simbolima za iznose $n \cdot 10^k$ s $n = 1, \ldots, 9$ i $k = 0, 1, 2$ te za 1000



- koja je razlika između nule kao broja i kao znamenke?

Dekadski pozicijski sustav s nulom

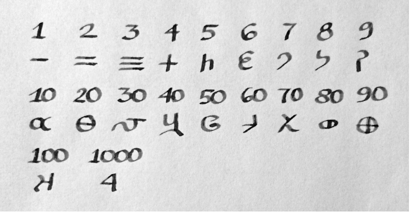
- brahmanske brojke (od ca. 4. st. pr. Kr.): dekadski nepozicijski brojevni sustav sa zasebnim simbolima za iznose $n \cdot 10^k$ s $n = 1, \ldots, 9$ i $k = 0, 1, 2$ te za 1000



- koja je razlika između nule kao broja i kao znamenke?
- hram u Gwaliouru, 876.

Dekadski pozicijski sustav s nulom

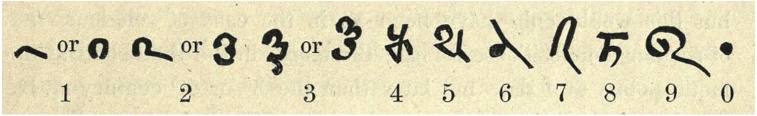
- brahmanske brojke (od ca. 4. st. pr. Kr.): dekadski nepozicijski brojevni sustav sa zasebnim simbolima za iznose $n \cdot 10^k$ s $n = 1, \ldots, 9$ i $k = 0, 1, 2$ te za 1000



- koja je razlika između nule kao broja i kao znamenke?
- hram u Gwaliouru, 876.
- nula = sunya >>> sifr >>> cifra

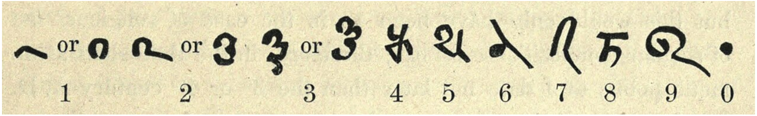
Rukopis Bakhshali

- tijekom 1. tisućljeća A.D. računski postupci (*ganita* — znanost o računanju)
- vjerojatno najstariji spis koji opisuje račun u dekadskom pozicijskom sustavu s nulom je $\boxed{\text{rukopis Bakhshali}}$, koji se dugo datirao vrlo nesigurno između 300. i 1200., no prema datiranju ugljikom provedenom 2017., smatra se da potječe iz 3. ili 4. st. A. D.



Rukopis Bakhshali

- tijekom 1. tisućljeća A.D. računski postupci (*ganita* — znanost o računanju)
- vjerojatno najstariji spis koji opisuje račun u dekadskom pozicijskom sustavu s nulom je rukopis Bakhshali, koji se dugo datirao vrlo nesigurno između 300. i 1200., no prema datiranju ugljikom provedenom 2017., smatra se da potječe iz 3. ili 4. st. A. D.



- ,,U slučaju nekvadratnog broja, oduzmi najbliži kvadratni broj, podijeli ostatak s dvostrukim tim najbližim kvadratom; pola kvadrata od toga se podijeli sa zbrojem približnog korijena i razlomka; to je oduzeto i dati će ispravljeni korijen".

Neka je x_i trenutna aproksimacija za $\sqrt{N}$, $x_i^2 < N$:

$$b_i = N - x_i,$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} - \frac{\left(\frac{b_i}{2x_i}\right)^2}{2\left(x_i + \frac{b_i}{2x_i}\right)}.$$

Neka je x_i trenutna aproksimacija za $\sqrt{N}$, $x_i^2 < N$:

$$b_i = N - x_i,$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} - \frac{\left(\frac{b_i}{2x_i}\right)^2}{2\left(x_i + \frac{b_i}{2x_i}\right)}.$$

Da nema oduzetog člana, pravilo bi bilo

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i^2 + b_i}{x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2 + N}{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{N}{x_i}\right).$$

Neka je x_i trenutna aproksimacija za $\sqrt{N}$, $x_i^2 < N$:

$$b_i = N - x_i,$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} - \frac{\left(\frac{b_i}{2x_i}\right)^2}{2\left(x_i + \frac{b_i}{2x_i}\right)}.$$

Da nema oduzetog člana, pravilo bi bilo

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i^2 + b_i}{x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2 + N}{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{N}{x_i}\right).$$

U staroindijskom stilu svaka sljedeća aproksimacija ima jednu točnu znamenku više.

Primjer

Izračunajmo $\sqrt{11}$ *na dvije decimale točno:*

$$x_0 = 3; \quad b_0 = 11 - 3 = 8; \quad \frac{b_0}{2x_0} = \frac{4}{3};$$

$$x_1 = 3 + \frac{4}{3} - \frac{16/9}{2\,(3 + 4/3)} = 4{,}1\ldots$$

No, $x_1^2 > 11$ *pa smanjujemo za po* $0{,}1$ *dok ne bude manje:*

$$x_1 = 3{,}3; \quad b_1 = 0{,}11; \quad \frac{b_1}{2x_1} = \frac{1}{60};$$

$$x_2 = 3{,}3 + \frac{1}{60} - \frac{1/3600}{2\,(3{,}3 + 1/60)} = 3{,}31\ldots$$

Primjer

Izračunajmo $\sqrt{11}$ *na dvije decimale točno:*

$$x_0 = 3; \quad b_0 = 11 - 3 = 8; \quad \frac{b_0}{2x_0} = \frac{4}{3};$$

$$x_1 = 3 + \frac{4}{3} - \frac{16/9}{2\,(3 + 4/3)} = 4{,}1\ldots$$

No, $x_1^2 > 11$ *pa smanjujemo za po* $0{,}1$ *dok ne bude manje:*

$$x_1 = 3{,}3; \quad b_1 = 0{,}11; \quad \frac{b_1}{2x_1} = \frac{1}{60};$$

$$x_2 = 3{,}3 + \frac{1}{60} - \frac{1/3600}{2\,(3{,}3 + 1/60)} = 3{,}31\ldots$$

Osim razvoju modernog brojevnog sustava i numeričkoj matematici, stari Indijci su u klasično doba najviše doprinijeli trigonometriji, teoriji brojeva (diofantskim jednadžbama) i

Aryabhata I. (ca. 476.–550.) i staroindijska trigonomoetrija

- prvi poimence poznat indijski matematičar
- *Āryabhaṭīya*: astronomsko djelo pisano u stihovima, sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate, bez dokaza
- u njoj i u *Surya Siddhanta* nalazimo najstarijd tablice sinusa (polutetiva, *jy(v)a*)

Aryabhata I. (ca. 476.–550.) i staroindijska trigonomoetrija

- prvi poimence poznat indijski matematičar
- *Āryabhaṭīya*: astronomsko djelo pisano u stihovima, sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate, bez dokaza
- u njoj i u *Surya Siddhanta* nalazimo najstarijd tablice sinusa (polutetiva, *jy(v)a*)
- ista duljine za promjer i opseg: kružnica se dijeli na 21600' i duljina takvog jednog dijela

  korištena je za iskazivanje duljina i kružnih lukova i (polu)tetiva:

  > „*Dodaj* 4 *k* 100, *pomnoži s* 8 *i svemu dodaj* 62000. *To što si dobio je približna duljina opsega kruga s promjerom* 20000.“

Aryabhata I. (ca. 476.–550.) i staroindijska trigonomoetrija

- prvi poimence poznat indijski matematičar
- *Āryabhaṭīya*: astronomsko djelo pisano u stihovima, sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate, bez dokaza
- u njoj i u *Surya Siddhanta* nalazimo najstarijd tablice sinusa (polutetiva, *jy(v)a*)
- ista duljine za promjer i opseg: kružnica se dijeli na 21600' i duljina takvog jednog dijela
  korištena je za iskazivanje duljina i kružnih lukova i (polu)tetiva:
  > „*Dodaj* 4 *k* 100*, pomnoži s* 8 *i svemu dodaj* 62000*. To što si dobio je približna duljina opsega kruga s promjerom* 20000*.*" $(20000' \cdot \pi \approx (100+4) \cdot 8' + 62000' \Leftrightarrow \pi \approx 3{,}1416)$

Aryabhata I. (ca. 476.–550.) i staroindijska trigonomoetrija

- prvi poimence poznat indijski matematičar
- *Āryabhaṭīya*: astronomsko djelo pisano u stihovima, sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate, bez dokaza
- u njoj i u *Surya Siddhanta* nalazimo najstarijd tablice sinusa (polutetiva, *jy(v)a*)
- ista duljine za promjer i opseg: kružnica se dijeli na 21600' i duljina takvog jednog dijela
  korištena je za iskazivanje duljina i kružnih lukova i (polu)tetiva:
  > ,,*Dodaj* 4 *k* 100*, pomnoži s* 8 *i svemu dodaj* 62000*. To što si dobio je približna duljina opsega kruga s promjerom* 20000*."* $(20000' \cdot \pi \approx (100+4) \cdot 8' + 62000' \Leftrightarrow \pi \approx 3{,}1416)$
- *jya* (džja) >>> arapski *džiba* >>> Robert iz Chestera 1154. to interpretira kao *džaib* >>> *sinus*

Brahmnagupta (ca. 598.–670.)

- Najstarija poznata definicija *broja* nula: rezultat oduzimanja broja od sebe; pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom

Brahmnagupta (ca. 598.–670.)

- Najstarija poznata definicija *broja* nula: rezultat oduzimanja broja od sebe; pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom
- tetivni četverokuti: $\boxed{\text{Brahmaguptin teorem}}$, Brahmaguptina formula $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Brahmnagupta (ca. 598.–670.)

- Najstarija poznata definicija *broja* nula: rezultat oduzimanja broja od sebe; pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom
- tetivni četverokuti: $\boxed{\text{Brahmaguptin teorem}}$, Brahmaguptina formula $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
- jedna od prvih pojava kvadratne interpolacije (slična metoda se u gotovo isto vrijeme pojavljuje i u kineskog astronoma Liu Džou-a)

Brahmnagupta (ca. 598.–670.)

- Najstarija poznata definicija *broja* nula: rezultat oduzimanja broja od sebe; pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom
- tetivni četverokuti: $\boxed{\text{Brahmaguptin teorem}}$, Brahmaguptina formula $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
- jedna od prvih pojava kvadratne interpolacije (slična metoda se u gotovo isto vrijeme pojavljuje i u kineskog astronoma Liu Džou-a)
- Pellova jednadžba $x^2 - Ny^2 = 1$—koristi identitet $(a^2 - Nb^2)(c^2 - Nd^2) = (ac + Nbd)^2 - N(ad + bc)^2$

Brahmnagupta (ca. 598.–670.)

- Najstarija poznata definicija *broja* nula: rezultat oduzimanja broja od sebe; pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom
- tetivni četverokuti: $\boxed{\text{Brahmaguptin teorem}}$, Brahmaguptina formula $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
- jedna od prvih pojava kvadratne interpolacije (slična metoda se u gotovo isto vrijeme pojavljuje i u kineskog astronoma Liu Džou-a)
- Pellova jednadžba $x^2 - Ny^2 = 1$ — koristi identitet $(a^2 - Nb^2)(c^2 - Nd^2) = (ac + Nbd)^2 - N(ad + bc)^2$
- u 9. st. prvi samo matematici posvećen tekst — autor Mahavira

Bhāskara II. (1114.–1185.)

- dalje razvio Brahmaguptine metode za Pellovu jednadžbu te je otkrio algoritam za računanje njenih rješenja („ciklička metoda") i našao rješenje $(x, y) = (226.153.980, 1.766.319.049)$ jednadžbe $61x^2 + 1 = y^2$

Bhāskara II. (1114.–1185.)

- dalje razvio Brahmaguptine metode za Pellovu jednadžbu te je otkrio algoritam za računanje njenih rješenja („ciklička metoda") i našao rješenje $(x, y) = (226.153.980, 1.766.319.049)$ jednadžbe $61x^2 + 1 = y^2$
- *Līlāvatī*, *Bidžaganita*

Bhāskara II. (1114.–1185.)

- dalje razvio Brahmaguptine metode za Pellovu jednadžbu te je otkrio algoritam za računanje njenih rješenja („ciklička metoda") i našao rješenje $(x, y) = (226.153.980, 1.766.319.049)$ jednadžbe $61x^2 + 1 = y^2$
- *Līlāvatī*, *Bidžaganita*
- opis pravila računa u decimalnom pozicijskom sustavu (dijeljenje s nulom daje beskonačno), uključivo negativnih brojeva
- $x^2 = 9$ ima dva rješenja
- adicijski teorem za sinus
- U *Līlāvatī* ima i kombinacija i permutacija:

Primjer

Kako naći broj mogućih rasporeda otvorenih i zatvorenih vrata u zgradi s 8 *vrata?*
Koliko varijacija boga Sambhu-a se dobije raspoređivanjem 10 *atributa u njegovih* 10 *ruku?*

Primjer

Kako naći broj mogućih rasporeda otvorenih i zatvorenih vrata u zgradi s 8 *vrata?*
Koliko varijacija boga Sambhu-a se dobije raspoređivanjem 10 *atributa u njegovih* 10 *ruku?*

Najkasnije u 6. st. pr. Kr. se u Indiji pojavljuju primjeri prebrajanja različitih rasporeda: Tada je Sushruta u jednom tekstu nabrojio moguće okuse koji nastaju iz 6 osnovnih (slatko, kiselo, slano, ljuto, gorko, trpko).
Tekst *Brhatsamhita* iz 6. st. n. e.: Kako dobiti mirise miješanjem 4 od 16 sastojaka u različitim omjerima? Navodi se 1820 mogućnosti odabira 4 od 16 sastojaka.