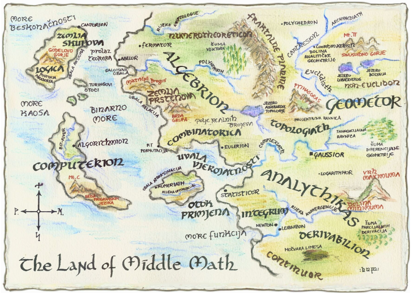
Povijest matematike

6. Matematika u arapskom kalifatu. Srednjevjekovna europska matematika.

Franka Miriam Brückler



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

„Arapska“matematika

- Što je kalifat?

„Arapska“matematika

- Što je kalifat? Zapravo su bila tri arapska kalifata: Rašidunski (632.–661.), Omejidski (661.–750.) i Abasidski kalifat (750.–1517.) s centrom u Bagdadu
- Prvi poticatelj znanosti i prevođenja grčkih znanstvenih tekstova na arapski bio je Harun al-Rašid; njegov sin, kalif al-Ma'mun (vladao 813.–833.) je osnovao Kuću mudrosti (*Bajt al-Ḥikmah*)

„Arapska“matematika

- Što je kalifat? Zapravo su bila tri arapska kalifata: Rašidunski (632.–661.), Omejidski (661.–750.) i Abasidski kalifat (750.–1517.) s centrom u Bagdadu
- Prvi poticatelj znanosti i prevođenja grčkih znanstvenih tekstova na arapski bio je Harun al-Rašid; njegov sin, kalif al-Ma'mun (vladao 813.–833.) je osnovao Kuću mudrosti (*Bajt al-Ḥikmah*)
- Na koje sve načine su „Arapi“ doprinijeli razvoju matematike?
  - prijevodi antičkih grčkih djela
  - transfer dekadskog pozicijskog sustava iz Indije prema zapadu
  - vlastiti doprinosi — grčka preciznost, indijska praktičnost

„Arapske“ brojke

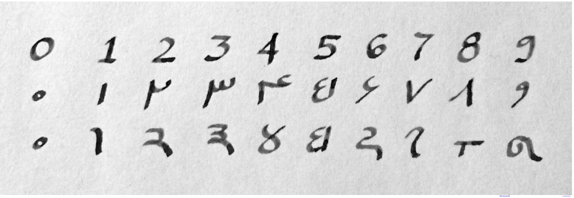
Do 10. st. u arapskom su se kalifatu koristila tri tipa aritmetike:

„Arapske“ brojke

Do 10. st. u arapskom su se kalifatu koristila tri tipa aritmetike:

- račun na prste: brojevi se pišu riječima; trgovci i računovođe; od 7. st. korišten je i arapski alfabetski sustav (*abdžad*).
- seksagesimalni sustav: brojevi označeni arapskim slovima, a koristio se najčešće za astronomiju;
- indijski dekadski sustav: znamenke su negdje tijekom 8. st. preuzete iz Indije, ali bez standardnog skupa simbola, tako da se u raznim krajevima koristilo donekle različite oblike znamenki.

Rane arapske znamenke vs. nagari-znamenke iz istog doba:



Moderne zapadne i istočnoarapske znamenke, zapadnoarapske gobar-znamenke iz 10. st. i europske znamenke u 13. st.:

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind*

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris*

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris* — algoritam!

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

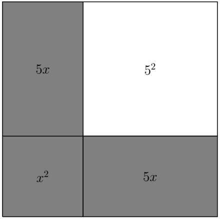
- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris* — algoritam!
- *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah*
- bez algebarske notacije
- za Al-Hvārizmīja, jednadžbe su sastavljene od konstanti („jednostavnih brojeva", *dirham*), stvari (*šaj*, nepoznanica) te bogatog (*mal*, kvadrat nepoznanice); jedinica je kod Al-Hvārizmīja broj
- šest tipova (normiranih) linearnih i kvadratnih jednadžbi (?!)

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

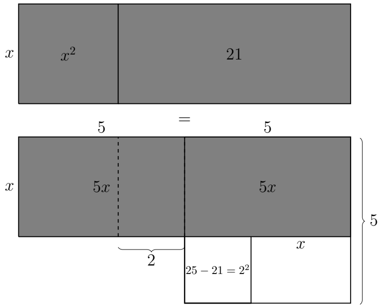
- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris* — algoritam!
- *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah*
- bez algebarske notacije
- za Al-Hvārizmīja, jednadžbe su sastavljene od konstanti („jednostavnih brojeva", *dirham*), stvari (*šaj*, nepoznanica) te bogatog (*mal*, kvadrat nepoznanice); jedinica je kod Al-Hvārizmīja broj
- šest tipova (normiranih) linearnih i kvadratnih jednadžbi (?!)
- za prva tri tipa samo je dao kratke primjere — očito da je od čitatelja očekivao da sam shvati postupak
- za ostala tri tipa detaljni primjeri — postupak je računski, ali se opravdava geometrijski

Mal i deset šaja čine 39 dirhama

1. uzmi pola broja šaja: $= 5$
2. kvadriraj to: 25
3. pribroji to broju dirhama: $39 + 25 = 64$
4. korjenuj: 8
5. od toga oduzmi pola broja šaja: $8 - 5 = 3$. To je rješenje.
6. postupak opravdava geometrijski (EEII4):



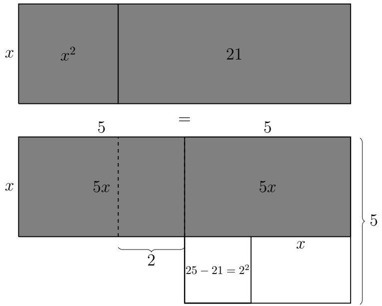
Mal i 21 dirham čine 10 šaja



EEII5

„Kad naiđeš na zadatak koji vodi na ovaj slučaj, pokušaj ga riješiti zbrajanjem, a ako to ne uspije, uspjet će s oduzimanjem. U ovom slučaju funkcionira i zbrajanje i oduzimanje, za razliku od ostala tri slučaja u kojima se treba prepoloviti broj šaja. Znaj i da u zadatku koji vodi na ovaj slučaj pomnožiš pola broja šaja sa sobom, ako je umnožak manji od broja dirhama pribrojenih malu, slučaj je nemoguć. Ako je pak jednak broju dirhama, onda je šaj jednak polovici broja šaja.”

Mal i 21 dirham čine 10 šaja



EEII5

Prvi put primjer s dva rješenja!

„Kad naiđeš na zadatak koji vodi na ovaj slučaj, pokušaj ga riješiti zbrajanjem, a ako to ne uspije, uspjet će s oduzimanjem. U ovom slučaju funkcionira i zbrajanje i oduzimanje, za razliku od ostala tri slučaja u kojima se treba prepoloviti broj šaja. Znaj i da u zadatku koji vodi na ovaj slučaj pomnožiš pola broja šaja sa sobom, ako je umnožak manji od broja dirhama pribrojenih malu, slučaj je nemoguć. Ako je pak jednak broju dirhama, onda je šaj jednak polovici broja šaja."

Al-džabr?!

Sve linearne i kvadratne jednadžbe mogu se svesti na jedan od šest osnovnih tipova koristeći dvije operacije: *al-džabr* (nadopunjavanje)[1] i *al-mukabalah* (izjednačavanje).[2]

[1] Prebacivanje negativnih članova na drugu stranu jednakosti.

[2] Oduzimanje pozitivnog člana jedne strane od člana s istom potencijom nepoznanice na drugoj strani.

Al-džabr?!

Sve linearne i kvadratne jednadžbe mogu se svesti na jedan od šest osnovnih tipova koristeći dvije operacije: *al-džabr* (nadopunjavanje)[1] i *al-mukabalah* (izjednačavanje).[2]

Primjer

Riješite $(10 - x)^2 + x^2 = 58$ *na al-Hvarizmijev način, ali koristeći suvremene simbole!*

[1] Prebacivanje negativnih članova na drugu stranu jednakosti.

[2] Oduzimanje pozitivnog člana jedne strane od člana s istom potencijom nepoznanice na drugoj strani.

Al-džabr?!

Sve linearne i kvadratne jednadžbe mogu se svesti na jedan od šest osnovnih tipova koristeći dvije operacije: *al-džabr* (nadopunjavanje)[1] i *al-mukabalah* (izjednačavanje).[2]

Primjer

Riješite $(10-x)^2+x^2=58$ *na al-Hvarizmijev način, ali koristeći suvremene simbole!*

Abū Kāmil Šujā (ca. 850.–930.) — utjecaj na Fibonaccija, razumijevanje identiteta $x^m x^n = x^{m+n}$, prethodnik matematičke indukcije:

$$(2n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n} i = 3\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

[1] Prebacivanje negativnih članova na drugu stranu jednakosti.

[2] Oduzimanje pozitivnog člana jedne strane od člana s istom potencijom nepoznanice na drugoj strani.

T̠ābit ibn Qurra (ca. 836.–901.)

Rođen u Harranu, gdje je postojalo prvo sveučilište na svijetu (717.–12. st.), djelovao u Kući mudrosti i osim matematikom se bavio i medicinom, filozofijom i astronomijom. Dao je novi dokaz Pitagorinog teorema (i njegovu generalizaciju), opisao je magične kvadrate, a najpoznatiji je po iskazu i dokazu:

Teorem (Ṯābitov teorem o prijateljskim brojevima)

Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n\, p\, q$ i $2^n\, r$ prijateljski.

Teorem (Ṯābitov teorem o prijateljskim brojevima)

Ako su za prirodan broj $n > 1$ *brojevi* $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ *i* $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *prosti, onda su brojevi* $2^n\, p\, q$ *i* $2^n\, r$ *prijateljski.*

Nije naveo kako je otkrio to pravilo, ali poziva se na starogrčke rezultate o savršenim brojevima (EEIX36). Pripisao je otkriće prijateljskih brojeva Pitagori, a navodi da ih ni Euklid ni Nikomah nisu spominjali te navodi da želi ,,popuniti tu rupu,, nalazeći opće pravilo za njih.

Teorem (Ṯābitov teorem o prijateljskim brojevima)

Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n\, p\, q$ i $2^n\, r$ prijateljski.

Nije naveo kako je otkrio to pravilo, ali poziva se na starogrčke rezultate o savršenim brojevima (EEIX36). Pripisao je otkriće prijateljskih brojeva Pitagori, a navodi da ih ni Euklid ni Nikomah nisu spominjali te navodi da želi ,,popuniti tu rupu,, nalazeći opće pravilo za njih.

- za $n = 2$ se dobije par 220 i 284,
- za $n = 4$ 17296 i 18416 (de Fermat?!)
- za $n = 7$ (Descartes).
- $3 \cdot 2^n - 1 = (1011\ldots1)_2$: Tābitovi brojevi

al-Battānī (Albategnius, ca. 850.–929.)

- također rođen u Harranu
- ,,arapski Ptolemej"
- *Kitāb al-zīdž* (*Knjiga astronomskih tablica*, ca. 900.)
- bitno unaprijedio trigonometriju, izveo razna trigonometrijska pravila („formule") za pravokutne trokute, npr. $b \sin\alpha = a \sin(90^\circ - \alpha)$, $b \sin\alpha = a \sin(90^\circ - \alpha)$
- koristio je i vlastitim metodama tabelirao vrijednosti svih 6 standardnih trigonometrijskih omjera: sinus, kosinus, tangens, te njihovih recipročne vrijednosti kosekans, sekans i kotangens.

Abū al-Wafā (940.–998.)

- komentari prethodnika
- trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kružnici polumjera 1)

Abū al-Wafā (940.–998.)

- komentari prethodnika
- trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kružnici polumjera 1)
- „Knjiga o aritmetici potrebnoj pisarima i trgovcima": negativni brojevi
- „Knjiga o geometrijskim konstrukcijama potrebnim obrtniku" — konstrukcije okomica, parabola, pravilnih mnogokuta (do 10 stranica) opisanih i upisanih kru?nicama ili drugim mnogokutima, približne trisekcije kutova, konstrukcije s fiksiranim šestarom, rastave raznih likova na manje, . . .
- $\boxed{\text{izračun udaljenosti Bagdada do Meke}}$ (sferna geometrija & trigonometrija)

Al-Karadžī (ca. 953.–1029.)

- pripisuje mu se prvo potpuno odvajanje algebre od geometrije
- *Al-Fakhri*: definicija monoma i polinoma, operacije s polinomima

[3] U to doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.

Al-Karadžī (ca. 953.–1029.)

- pripisuje mu se prvo potpuno odvajanje algebre od geometrije
- *Al-Fakhri*: definicija monoma i polinoma, operacije s polinomima
- rani oblik matematičke indukcije, ima i indukciju unatrag, npr. za

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 ;$$

[3] U to doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.

Al-Karadžī (ca. 953.–1029.)

- pripisuje mu se prvo potpuno odvajanje algebre od geometrije
- *Al-Fakhri*: definicija monoma i polinoma, operacije s polinomima
- rani oblik matematičke indukcije, ima i indukciju unatrag, npr. za

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 ;$$

- binomni teorem i veza s Pascalovim trokutom (do eksponenta 5).[3]

[3] U to doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.

Al-Hayṭam (Alhazen), oko 965.–1040.

U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao *Ptolomaeus Secundus*, a danas se smatra ocem moderne optike.

Alhazenov problem geometrijske optike

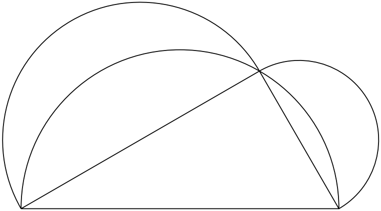
Za dvije točke A i B u ravnini i zrcalnu kružnicu traže se točke T na kružnici, takve da se u njima zraka svjetla iz A lomi točno prema B.

Al-Hayṭam (Alhazen), oko 965.–1040.

U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao *Ptolomaeus Secundus*, a danas se smatra ocem moderne optike.

Alhazenov problem geometrijske optike

Za dvije točke A i B u ravnini i zrcalnu kružnicu traže se točke T na kružnici, takve da se u njima zraka svjetla iz A lomi točno prema B.

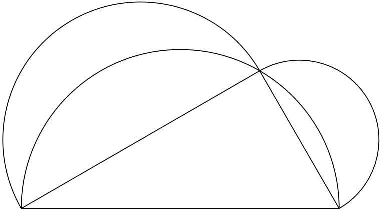


Al-Hayṭam (Alhazen), oko 965.–1040.

U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao *Ptolomaeus Secundus*, a danas se smatra ocem moderne optike.

Alhazenov problem geometrijske optike

Za dvije točke A i B u ravnini i zrcalnu kružnicu traže se točke T na kružnici, takve da se u njima zraka svjetla iz A lomi točno prema B.



Omar Khayyam (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i $\boxed{\text{pjesnik}}$, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.

Bavio se postulatom o paralelama, koristio je metodu sličnu starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata

Omar Khayyam (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i pjesnik, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.

Bavio se postulatom o paralelama, koristio je metodu sličnu starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata

Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-ğabr wa'l-Muqābalah — proširenje Al-Hwārizmījeve klasifikaciju i na kubne jednadžbe

Omar Khayyam (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i $\boxed{\text{pjesnik}}$, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.

Bavio se postulatom o paralelama, koristio je metodu sličnu starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata

Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-ǧabr wa'l-Muqābalah — proširenje Al-Hwārizmījeve klasifikaciju i na kubne jednadžbe

Tvrdio je da se njihova rješenja općenito ne mogu dobiti ravnalom i šestarom. Prvi je primijetio da postoje kubne jednadžbe s više od jednog rješenja.

Omar Khayyam (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i $\boxed{\text{pjesnik}}$, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.
Bavio se postulatom o paralelama, koristio je metodu sličnu starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata
Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-ğabr wa'l-Muqābalah — proširenje Al-Hwārizmījeve klasifikaciju i na kubne jednadžbe
Tvrdio je da se njihova rješenja općenito ne mogu dobiti ravnalom i šestarom. Prvi je primijetio da postoje kubne jednadžbe s više od jednog rješenja.
Tako je dobio ukupno 19 tipova jednadžbi, od kojih su 5 bez konstantnog člana pa se supstitucijom svode na kvadratne i linearne, a ostale je rješavao presjecima krivulja 2. reda:

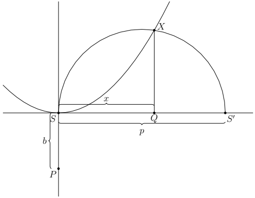
14 tipova Hajjamovih kubnih jednadžbi

1. $x^3 = c^3$;
2. $x^3 + b^2 x = c^3$ (rješenje presjekom parabole i polukružnice);
3. $x^3 + c^3 = b^2 x$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
4. $x^3 = b^2 x + c^3$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
5. $x^3 + a x^2 = c^3$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
6. $x^3 + c^3 = a x^2$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
7. $x^3 = a x^2 + c^3$ (rješenje presjekom parabole i hiperbole);
8. $x^3 + a x^2 + b^2 x = c^3$ (rješenje presjekom hiperbole i polukružnice);
9. $x^3 + a x^2 + c^3 = b^2 x$ (rješenje presjekom hiperbole i polukružnice);
10. $x^3 + b^2 x + c^3 = a x^2$ (rješenje presjekom hiperbole i kružnice);
11. $x^3 = a x^2 + b^2 x + c^3$ (rješenje presjekom dvije hiperbole);
12. $x^3 + a x^2 = b^2 x + c^3$ (rješenje presjekom dvije hiperbole);
13. $x^3 + b^2 x = ax^2 + c^3$ (rješenje presjekom hiperbole i kružnice);
14. $x^3 + c^3 = a x^2 + b^2 x$ (rješenje presjekom dvije hiperbole).

$$x^3 + 9x = 36 : \quad x^3 + b^2 x = c^3$$

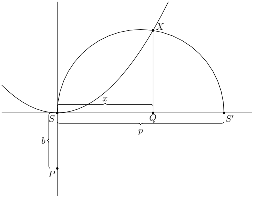
$x^3+9x=36: \quad x^3+b^2x=c^3 \Leftrightarrow x^3+9x=4{\cdot}9: \quad x^3+b^2\,x=p\,b^2$

Uzmimo polukružnicu promjera $|SS'|=p=4$ i parabolu s tjemenom S s osi $\perp SS'$ i razmakom fokusa i ravnalice jednakom $\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$; uz to uzimamo P na osi parabole tako da je $|SP|=b=3$:



$x^3+9x=36: \quad x^3+b^2x=c^3 \Leftrightarrow x^3+9x=4\cdot 9: \quad x^3+b^2\,x=p\,b^2$

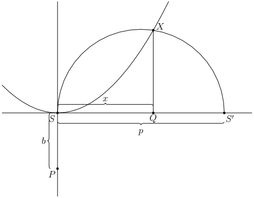
Uzmimo polukružnicu promjera $|SS'|=p=4$ i parabolu s tjemenom S s osi $\perp SS'$ i razmakom fokusa i ravnalice jednakom $\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$; uz to uzimamo P na osi parabole tako da je $|SP|=b=3$:



X na paraboli $\Rightarrow |SQ|^2=|SP|\cdot|XQ| \Leftrightarrow |SQ|:|XQ|=3:|SQ|$;
X na polukružnici $\Rightarrow \angle SXS'=90^\circ \Rightarrow \triangle SQX \sim \triangle XQS' \Rightarrow$
$|SQ|:|XQ|=|XQ|:|QS'|$

$x^3+9x=36: \quad x^3+b^2x=c^3 \Leftrightarrow x^3+9x=4\cdot 9: \quad x^3+b^2\,x=p\,b^2$

Uzmimo polukružnicu promjera $|SS'|=p=4$ i parabolu s tjemenom S s osi $\perp SS'$ i razmakom fokusa i ravnalice jednakom $\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$; uz to uzimamo P na osi parabole tako da je $|SP|=b=3$:



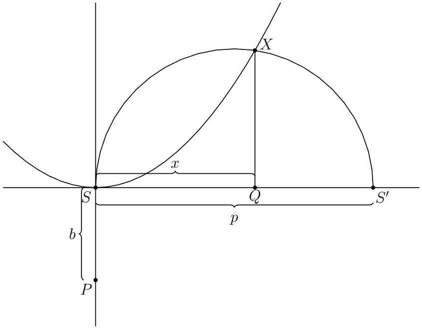
X na paraboli $\Rightarrow |SQ|^2=|SP|\cdot|XQ| \Leftrightarrow |SQ|:|XQ|=3:|SQ|$;
X na polukružnici $\Rightarrow \angle SXS'=90^\circ \Rightarrow \triangle SQX \sim \triangle XQS' \Rightarrow$
$|SQ|:|XQ|=|XQ|:|QS'| \Rightarrow$

$$3:|SQ|=\frac{|SQ|^2}{3}:(4-|SQ|)$$

Budući da je X na paraboli: $|SQ|^2 = |SP| \cdot |XQ|$, tj. $|SQ| : |XQ| = B : |SQ|$.
No, X je i na kružnici pa je $\triangle SS'X$ pravokutan pa je $\triangle SQX \sim \triangle XQS'$. Slijedi $|SQ| : |XQ| = |XQ| : |QS'|$.
Stoga je

$$B : |SQ| = \frac{|SQ|^2}{B} : (C - |SQ|),$$

dakle je $x = |SQ|$ je rješenje!



Dva matematičara mongolskog razdoblja

- Nasīr ad-Dīn al-Tūsī (1201.–1274.)
- metode za približno računanje 2. i 3. korijena slične indijskim i kineskim
- at-Tusijeve kružnice
- uveo je nove trigonometrijske tehnike za izračunavanje tablica sinusa
- najvažniji doprinos: odvajanje trigonometrije kao matematičke discipline (*Traktat o četverokutu*, 1260.: prvi potpun prikaz ravninske i sferne trigonometrije)

Dva matematičara mongolskog razdoblja

- Nasīr ad-Dīn al-Tūsī (1201.–1274.)
- metode za približno računanje 2. i 3. korijena slične indijskim i kineskim
- at-Tusijeve kružnice
- uveo je nove trigonometrijske tehnike za izračunavanje tablica sinusa
- najvažniji doprinos: odvajanje trigonometrije kao matematičke discipline (*Traktat o četverokutu*, 1260.: prvi potpun prikaz ravninske i sferne trigonometrije)
- Al-Kāšī (oko 1380.–1429.) (Ulug-beg, Samarkand)
- *Ključ aritmetike* (1427.): binomna formula, računanje n-tih korijena, numeričko rješavanje jednadžbi iterativnim postupcima, konstrukcije kupola, ...

- opis indijskog brojevnog sustava i računanjem u njemu (čak i s iracionalnostima), a tu je i metoda ekvivalentna Newtonovovoj metodi tangente i teorija decimalnih razlomaka i računa s njima (u zapadnu Europu će decimalne razlomke uvesti tek Stevin 135 godina kasnije, no ideja istih može se naći i kod nekih ranijih arapskih matematičara)

- opis indijskog brojevnog sustava i računanjem u njemu (čak i s iracionalnostima), a tu je i metoda ekvivalentna Newtonovovoj metodi tangente i teorija decimalnih razlomaka i računa s njima (u zapadnu Europu će decimalne razlomke uvesti tek Stevin 135 godina kasnije, no ideja istih može se naći i kod nekih ranijih arapskih matematičara)
- *Rasprava o tetivi i sinusu*: iterativni numerički postupak za izračunavanje trigonometrijskih tablica, $\sin 1^\circ$ na 9 seksagezimalnih, tj. 18 decimalnih mjesta
- *Rasprava o opsegu* (1424.): 2π na 9 seksagezimalnih mjesta odnosno 16 decimala (tek 200 godina kasnije će van Ceulen dobiti bolju točnost)

Rani srednji vijek (6.–10. st.)

Po čemu su važne godine 375., 476. i 529.?

Rani srednji vijek (6.–10. st.)

Po čemu su važne godine 375., 476. i 529.?
Koji su glavni uzroci „mračnog" srednjeg vijeka?

Rani srednji vijek (6.–10. st.)

Po čemu su važne godine 375., 476. i 529.?

Koji su glavni uzroci ,,mračnog" srednjeg vijeka?

Nikomah iz Geraze (1./2. st.) je napisao uvod u (teorijsku) aritmetiku pitagorejskog stila, na čijem temelju je Anicius Manlius Severinus Boethius (ca. 480–525) napisao *De institutione arithmetica*.

$$\text{trivium} + \text{quadrivium} = \text{septem artes liberales}$$

Rani srednji vijek (6.–10. st.)

Po čemu su važne godine 375., 476. i 529.?
Koji su glavni uzroci „mračnog" srednjeg vijeka?
Nikomah iz Geraze (1./2. st.) je napisao uvod u (teorijsku) aritmetiku pitagorejskog stila, na čijem temelju je Anicius Manlius Severinus Boethius (ca. 480–525) napisao *De institutione arithmetica*.

$$\text{trivium} + \text{quadrivium} = \text{septem artes liberales}$$

Car Karlo Veliki (okrunjen 800.) bio je prvi koji je potaknuo organizaciju (crkvenih) škola kako bi Europu sačuvao od intelektualnog propadanja.
Njegov prijatelj, savjetnik i učitelj sinova osnovao je niz škola i razvio $\boxed{\text{karolinške minuskule}}$:

Alkuin iz Yorka (oko 735.–804.)

Pripisuju mu se $\boxed{\text{Propositiones ad acuendos iuvenes}}$.

Primjer

Jedan svinjogojac je rekao: „Želim kupiti 100 *svinja za* 100 *libri. Prasac košta* 10 *libri, krmača košta* 5 *libri, a dva praščića se mogu kupiti za* 1 *libru." Koliko prasaca, krmača i praščića taj svinjogojac može kupiti ako potroši sav novac?*

Primjer

Jedan čovjek posjeduje 300 *svinja. Naredio je da se sve one zakolju u tri dana, ali tako da nikoji dan ne bude ubijen paran broj svinja. Zatim je tražio da se jednako postupi s još* 30 *svinja. Koji neparni brojevi svinja od* 300 *odnosno od* 30 *su ubijene na svaki od ta tri dana?*

Primjer

Tri muškarca, svaki s po jednom sestrom, žele prijeći rijeku. Našli su samo mali čamac s kojim samo dvije osobe odjenom mogu prijeći rijeku. Kako su prešli rijeku, tako da nijedna od djevojaka ni u kojem trenu nije sama s muškarcem koji joj nije brat ni u čamcu ni na obali?

Abacisti i algoristi & jedan papa

Računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa. Prvi kontakti s arapskom tradicijom: tijekom 9. st. Razdvojile su se dvije „škole”: abacisti i algoristi.

Abacisti i algoristi & jedan papa

Računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa. Prvi kontakti s arapskom tradicijom: tijekom 9. st. Razdvojile su se dvije „škole": abacisti i algoristi.
Gerbert iz Aurillaca (oko 946.–1003.) je studirao u Kataloniji, gdje je naučio koristiti indoarapske brojke (bez nule) i susreo se s arapskom matematikom.

Abacisti i algoristi & jedan papa

Računanje se u srednjem vijeku učilo u glavi, s prstima i pomoću abakusa. Prvi kontakti s arapskom tradicijom: tijekom 9. st. Razdvojile su se dvije „škole": abacisti i algoristi.

Gerbert iz Aurillaca (oko 946.–1003.) je studirao u Kataloniji, gdje je naučio koristiti indoarapske brojke (bez nule) i susreo se s arapskom matematikom. Pisao je o aritmetici i geometriji. Iako su iz današnje perspektive njegovi spisi elementarni, za tadašnje Europljane bili su iznimni te je optuživan da je sklopio pakt s vragom. No, 999. je izabran za papu Silvestra II. Opisao je novu verziju $\boxed{\text{abakusa}}$, prilagođenu indoarapskim brojkama, koja je koristila *apices* (kamenčiće s oznakama znamenki 1 do 9).

Visoki srednji vijek (ca. 1000.–1300.)

Ovo je doba romanike i gotike, razdvanja katoličke i pravoslavne crkve, križarskih ratova, te kontakta s arapskim svijetom, prvenstveno preko Iberskog poluotoka.

Al-Andalus: od 711. do predaje emirata Granade 1492.

Od 929. do 1031. samostalni kalifat Córdoba: Córdoba je postala znanstveni centar s velikom knjižnicom. Pod maurskom vladavinom se poticalo prevođenje znanstvenih djela raznih izvora, što je doprinijelo oživljavanju grčke i otkriću arapske i indijske matematike $\Rightarrow$ u 11. i 12. st. došlo je do intenzivnijeg kontakta europske s grčkom i indijskom matematikom.

Robert iz Chestera (12. st.) je na latinski preveo Al-Hwārizmījevu „Algebru" (1145.); Adelard iz Batha (1075.–1160.): Al-Hwārizmījeva „Aritmetika" (?), EE; Gerard iz Cremone (ca. 1114.–1187.): *Almagest*

Visoki srednji vijek (ca. 1000.–1300.)

Ovo je doba romanike i gotike, razdvanja katoličke i pravoslavne crkve, križarskih ratova, te kontakta s arapskim svijetom, prvenstveno preko Iberskog poluotoka.

Al-Andalus: od 711. do predaje emirata Granade 1492.

Od 929. do 1031. samostalni kalifat Córdoba: Córdoba je postala znanstveni centar s velikom knjižnicom. Pod maurskom vladavinom se poticalo prevođenje znanstvenih djela raznih izvora, što je doprinijelo oživljavanju grčke i otkriću arapske i indijske matematike $\Rightarrow$ u 11. i 12. st. došlo je do intenzivnijeg kontakta europske s grčkom i indijskom matematikom.

Robert iz Chestera (12. st.) je na latinski preveo Al-Hwārizmījevu „Algebru" (1145.); Adelard iz Batha (1075.–1160.): Al-Hwārizmījeva „Aritmetika" (?), EE; Gerard iz Cremone (ca. 1114.–1187.): *Almagest*

skolastika: sustavno posredovanje znanja kroz predavanja i rasprave; logika; prva sveučilišta

Fibonacci (Leonardo iz Pise), ca. 1170.–1250.

Već kao dječak putovao je s ocem, koji je bio carinik u trgovačkoj koloniji Pise, Bugia-i (današnja Béjaïa u Alžiru), a kasnije i u Egipat, Bizant, Siriju, Grčku i Siciliju. Tako je imao prilike upoznati matematičke spise Arapa, Indijaca, pitagorejaca, Euklida i dr. Budući da je trebao postati trgovac, puno je pažnje posvećeno tome da dobro nauči računati. U razdoblju 1200.–1225. boravio je u Pisi i bavio se matematikom. O Fibonaccijevom životu iza 1228. se gotovo ništa ne zna, osim da mu je Republika Pisa dodijelila stipendiju kao nagradu za savjetovanje u matematici vezano za računovodstvo i slična pitanja.

Fibonacci (Leonardo iz Pise), ca. 1170.–1250.

Već kao dječak putovao je s ocem, koji je bio carinik u trgovačkoj koloniji Pise, Bugia-i (današnja Béjaïa u Alžiru), a kasnije i u Egipat, Bizant, Siriju, Grčku i Siciliju. Tako je imao prilike upoznati matematičke spise Arapa, Indijaca, pitagorejaca, Euklida i dr. Budući da je trebao postati trgovac, puno je pažnje posvećeno tome da dobro nauči računati. U razdoblju 1200.–1225. boravio je u Pisi i bavio se matematikom. O Fibonaccijevom životu iza 1228. se gotovo ništa ne zna, osim da mu je Republika Pisa dodijelila stipendiju kao nagradu za savjetovanje u matematici vezano za računovodstvo i slična pitanja.

- *Liber Abbaci* (1202., 1228.)
- *Practica Geometriae*, 1220./21.
- *Flos*, 1225.
- pismo carskom filozofu Teodoru
- *Liber Quadratorum*, 1225.

Liber Abaci iliti Knjiga o računanju

- rimske brojke i brojanje prstima
- indoarapski pozicijski sustav s nulom!!!
- računanje u dekadskom sustavu (indoarapske brojke)
- razlomci i računanje s njima (uveo je razlomačku crtu)
- trgovačka računica (tu je i problem sto ptica :-))
- zadaci zabavne matematike (Fibonaccijevi brojevi)
- neki od tih zadataka vode na jednadžbe i sustave (uključivo neodređene)
- nepoznanicu naziva *res* ili *radix*; druge potencije nepoznanice: *quadratus* ili *census*, *cubus*, *census de censu*, *cubus cubi*; konstanta: *numerus*, *denarius*, *dragma*
- očit utjecaj arapske matematike (npr. klasifikacija i rješavanje kvadratnih jednadžbi)

Zadatak o pronađenom novčaniku

Nađen je novčanik s nepoznatim iznosom b novca u njemu. Četvorica nalaznika imajuu po x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ novca. Uvjeti vode na sustav

$$x_1 + b = 2(x_2 + x_3)$$

$$x_2 + b = 3(x_3 + x_4)$$

$$x_3 + b = 4(x_4 + x_1)$$

$$x_4 + b = 5(x_1 + x_2)$$

Kaže Leonardo:
„Pokazat ću da ovaj problem nije rješiv ako se ne dozvoli da je prvi partner u dugu." — razumije negativne brojeve!!!
Kao jedno rješenje daje -1, 4, 1, 4 i $b = 11$.

Ostala djela

Practica Geometriae je kompilacija geometrijskih rezultata (Euklid, arapska trigonometrija, ...) u kojem potrebna algebarske pravila u arapskoj tradiciji izlaže bez pozivanja na geometriju.

U *Liber quadratorum* se bavio kvadratnim diofantskim jednadžbama. Ovdje nalazimo dokaz Diofant-Brahmagupta-Fibonaccijevog identiteta (umnožak zbrojeva po dva kvadratna broja je zbroj dva kvadratna broja).

Pismo carskom filozofu Teodoru te *Flos* sadrže matematičke zadatke. U *Flosu* su oni koje je Fibonacciju zadao dvorski filozof Ivan iz Palerma kad je Car Friedrich II 1225. s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u križarski rat kako bi organizirao natjecanje/izazov iz matematike:

1. Tri čovjeka posjeduju hrpicu novca, a udjeli su im $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. S vremenom, svaki je uzimao ponešto novca, sve dok ništa nije preostalo. Prvi je vratio $\frac{1}{2}$ od koliko je uzeo, drugi $\frac{1}{3}$ od onog što je uzeo i treći $\frac{1}{6}$ iznosa kojeg je uzeo. Ako se tako skupljen novac podijeli na tri jednaka dijela i svakom da po jedan, ispada da svaki posjeduje koliko mu po pravu i pripada. Koliko je novca bilo u početnoj hrpi i koliko je tko uzeo?
2. naći broj x takav da su $x^2 \pm 5$ kvadrati razlomaka;
3. riješiti jednadžbu $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$: iz Hajjamove *Algebre*; Fibonacci je dokazao da ta jednažba nema rješenja u cijelim ni racionalnim brojevima niti među euklidskim kvadratnim iracionalnostima, a zatim navodi aproksimativno rješenje $1; 22, 07, 42, 33, 04, 40$ točno na devet decimala, no nema izvora kako je to aproksimativno rješenje dobio.

Kasni srednji vijek (ca. 1300.–1500.)

Nicole d'Oresme (ca. 1330.–1382.), drancuski biskup i financijski savjetnik francuskog kralja Karla V.

Prva osoba koja je dozvolila razlomke kao eksponente. Specijalno, poznavao je pravilo $x^a x^b = x^{a+b}$ i za razlomljene eksponente.

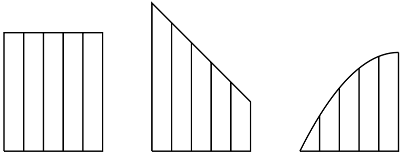
Kasni srednji vijek (ca. 1300.–1500.)

Nicole d'Oresme (ca. 1330.–1382.), drancuski biskup i financijski savjetnik francuskog kralja Karla V.

Prva osoba koja je dozvolila razlomke kao eksponente. Specijalno, poznavao je pravilo $x^a x^b = x^{a+b}$ i za razlomljene eksponente.

Kod njega nalazimo rano poimanje funkcije i grafa: Za njega su sve mjerljive veličine, osim brojeva (koje doživljava na starogrčki način), kontinuirane te se mogu prikazivati duljinama, površinama i volumenima.

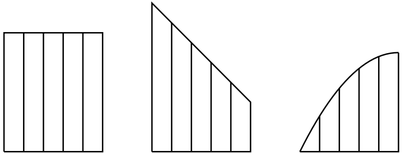
U *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* opisuje kako ilustrirati odnos protezanja (*extensio*) i iznosa (*intensio*) kvalitete (to su razne fizikalne pojave, npr. brzina, koje mogu imati različite intenzitete i koje se nalaze u odnosu s protezanjem, primjerice vremenom). Intenzitete je nanosio vertikalno kao duljine (*latitudo*) nad vodoravnom crtom, na kojoj su protezanja prikazana isto kao duljine (*longitudo*).



Qualitas uniformis, uniformiter difformis, ifformiter difformis

Pokazao je i tzv. Mertonski teorem, nazvan po oxfordskom *Merton College*, čiji znanstvenici su ga izrekli 1330ih:

> *Svaka kvaliteta, ako je uniformno diformna, je iste kvantitete kao što bi bila kvaliteta istog ili jednakog subjekta koja je uniformna u skadu sa srednjom točkom tog subjekta.*



Qualitas uniformis, uniformiter difformis, ifformiter difformis

Pokazao je i tzv. Mertonski teorem, nazvan po oxfordskom *Merton College*, čiji znanstvenici su ga izrekli 1330ih:

> *Svaka kvaliteta, ako je uniformno diformna, je iste kvantitete kao što bi bila kvaliteta istog ili jednakog subjekta koja je uniformna u skadu sa srednjom točkom tog subjekta.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Questiones Super Geometriam Euclidis:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$