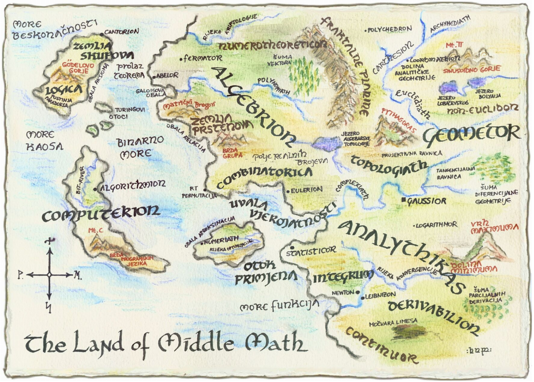
Povijest matematike

Matematika u doba apsolutizma II.

Franka Miriam Brückler



Slika:

Algebarske jednadžbe

- Kako glasi osnovni teorem algebre?

Algebarske jednadžbe

- Kako glasi osnovni teorem algebre?
- Koji su važni prethodnici hipoteze da to vrijedi?

Algebarske jednadžbe

- Kako glasi osnovni teorem algebre?
- Koji su važni prethodnici hipoteze da to vrijedi?
- 1629. Albert Girard (1595.–1632.): svaka jednadžba stupnja n (s realnim koeficijentima) ima n rješenja (ali ta su možda u nekom većem skupu od $\mathbb{C}$
- pokušaji dokaza će dugo ostati usmjereni ne na to da se dokaže da *postoji n rješenja* (očito?!), nego da *su rješenja kompleksni brojevi*
- Descartes se u 3. dijelu *La Géométrie* bavi algebrom:
  - „Iz gornjega je očigledno da je suma jednadžbe koja ima više korijena uvijek dijeljiva binomom koji se sastoji od nepoznanice umanjene za vrijednost jednog od istinitih korijena, ili plus vrijednost jednog od lažnih korijena“

Algebarske jednadžbe

- Kako glasi osnovni teorem algebre?
- Koji su važni prethodnici hipoteze da to vrijedi?
- 1629. Albert Girard (1595.–1632.): svaka jednadžba stupnja n (s realnim koeficijentima) ima n rješenja (ali ta su možda u nekom većem skupu od $\mathbb{C}$
- pokušaji dokaza će dugo ostati usmjereni ne na to da se dokaže da *postoji n rješenja* (očito?!), nego da *su rješenja kompleksni brojevi*
- Descartes se u 3. dijelu *La Géométrie* bavi algebrom:
  - „Iz gornjega je očigledno da je suma jednadžbe koja ima više korijena uvijek dijeljiva binomom koji se sastoji od nepoznanice umanjene za vrijednost jednog od istinitih korijena, ili plus vrijednost jednog od lažnih korijena"
  - Može se zamisliti da svaka jednadžba n-tog stupnja ima n rješenja, ali da ta „zamišljena rješenja" ne odgovaraju nikakvoj realnoj vrijednosti.
  - Descartesovo pravilo predznaka $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12)$

Determinante

- uvedene su kao pomoć za rješavanje sustava linearnih jednadžbi
- Cardano, 16. st.: Crymerovo pravilo za 2×2-sustave
- 1683. Gottfried Wilhelm Leibniz[1] i neovisno o njemu japanski matematičar Takakazu Shinsuke Seki (1642.–1708.) uvode brojeve koji se danas zovu determinantama
- Leibniz u pismu L'Hôpitalu opisuje uvjet da sustav ima netrivijalno rješenje, a dokazao je i razne rezultate o sustavima koji se danas formuliraju pomoću determinanti, no to se uglavnom nalazi u njegovim neobjavljenim radovima
- Seki pak opisuje starije kineske metode i kao pomoć računa determinante do veličine 5×5

[1] Mislio je da je opovrgao OTA: $x^4 + a^4$

Prethodnici deriviranja i integriranja

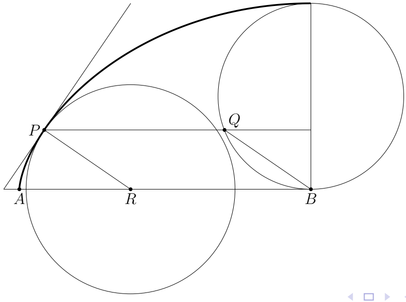
- Koje smo probleme optimizacije dosad spominjali? A tangenti?

Prethodnici deriviranja i integriranja

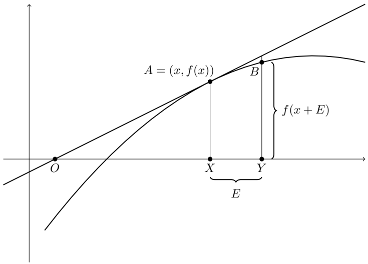
- Koje smo probleme optimizacije dosad spominjali? A tangenti? A površina i volumena?

Prethodnici deriviranja i integriranja

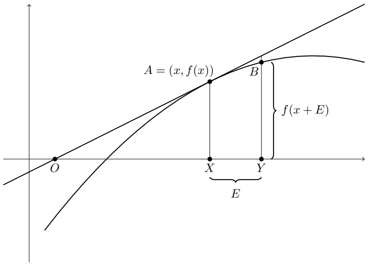
- Koje smo probleme optimizacije dosad spominjali? A tangenti? A površina i volumena?
- J. Kepler $\boxed{\textit{Nova Stereometria Doliorum Vinariorum}}$ (1615.)
- R. Descartes (1637.): analitička geometrija, metoda određivanja tangente kao okomice na normalu oskulacijske kružnice
- Što je to $\boxed{\text{cikloida}}$?



Fermatova metoda određivanja tangente

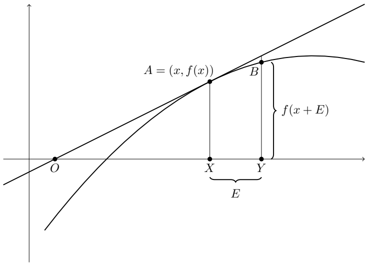


Fermatova metoda određivanja tangente



$$|OX| : (|OX| + E) \approx f(x) : f(x+E) \Rightarrow |OX| \approx \frac{f(x)}{\frac{f(x+E)-f(x)}{E}}.$$

Fermatova metoda određivanja tangente



$$|OX| : (|OX| + E) \approx f(x) : f(x+E) \Rightarrow |OX| \approx \frac{f(x)}{\frac{f(x+E)-f(x)}{E}}.$$

Za određivanje točaka ekstrema: uvjet $f(x+E) = y$ u kojem se prvo maksimalno pokrati, a onda zanemari E.

Zadatak

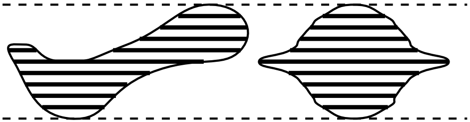
Na Fermatov način odredite jednadžbu tangente na hiperbolu $x\,y = 10$ u točki $(10, 1)$.

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647)

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (1635.): metoda nedjeljivih veličina

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647)

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (1635.): metoda nedjeljivih veličina
Ravninske figure smatra sastavljenim od paralelnih dužina, a prostorne od paralelnih likova: Cavalierijeve nedjeljive veličine su beskonačno tanke. Ravninske/prostorne figure, tj. njihove površine/volumeni, stoje u istom omjeru kao ukupnost njihovih nedjeljivih veličina.

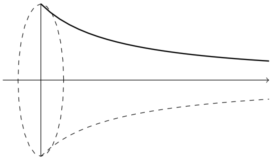


Evangelista Torricelli (1608–1647)

Kombinirao je izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina.

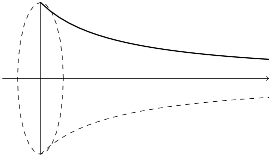
Torricellijeva truba: neograničeno tijelo ograničenog volumena.

Thomas Hobbes: *Da bi se to smatralo razumnim, ne treba biti geometar ni logičar, nego lud.*



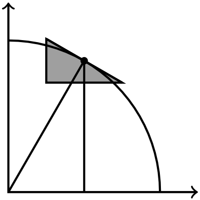
Evangelista Torricelli (1608–1647)

Kombinirao je izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina.
Torricellijeva truba: neograničeno tijelo ograničenog volumena.
Thomas Hobbes: *Da bi se to smatralo razumnim, ne treba biti geometar ni logičar, nego lud.*

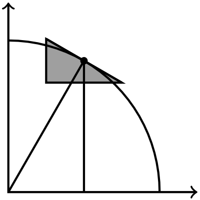


$$\int_1^\infty \frac{\pi \mathrm{d}x}{x^2} = \pi$$

- B. Pascal ($\boxed{\textit{Pascaline}}$): Pascalov karakteristični trokut (1659.)

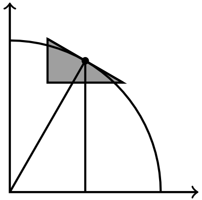


- B. Pascal ($\boxed{\textit{Pascaline}}$): Pascalov karakteristični trokut (1659.)



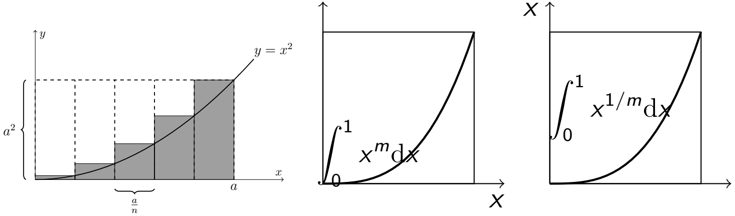
- Gilles Personne de Roberval (1602–1675): Precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene)

- B. Pascal ($\boxed{\textit{Pascaline}}$): Pascalov karakteristični trokut (1659.)



- Gilles Personne de Roberval (1602–1675): Precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene)
- Ukupno, sredinom 17. st. znalo se ono što danas zapisujemo kao
$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
- Nisu ovo jedini takvi rezultati, ali što fali?

- John Wallis (1616.–1703.) Uveo je simbol ∞ (1655.); *Arithmetica infinitorum* (1656.): preciznije i efikasnije računske metode za površine i volumene.



- Isaac Barrow (1630.–1677.): tangentu smatrao graničnim slučajem sekante, brzina se može odrediti iz puta i obrnuto; put se može dobiti kao površina ispod grafa brzine u ovisnosti o vremenu, a brzina kao koeficijent smjera tangente na graf ovisnosti puta o vremenu; Barrowljeva metoda određivanja tangente: Barrowljev diferencijalni trokut

Utemeljenje infinitezimalnog računa

- Zašto se ono pripisuje Newtonu i Leibnizu? Po čemu su im doprinosi slični, a po čemu različiti?

Utemeljenje infinitezimalnog računa

- Zašto se ono pripisuje Newtonu i Leibnizu? Po čemu su im doprinosi slični, a po čemu različiti?
- sir Isaac Newton (1642.–1727.)

Utemeljenje infinitezimalnog računa

- Zašto se ono pripisuje Newtonu i Leibnizu? Po čemu su im doprinosi slični, a po čemu različiti?
- sir Isaac Newton (1642.–1727.)
- *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687.)

Utemeljenje infinitezimalnog računa

- Zašto se ono pripisuje Newtonu i Leibnizu? Po čemu su im doprinosi slični, a po čemu različiti?
- sir Isaac Newton (1642.–1727.)
- *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687.)
- Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669./1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671./1736.), *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693./1704.)
- Newtonova metoda fluksija: fluensi x, y, ... ovisni o fluksu t i njihove brzine — fluksije: $\dot{x}$, $\dot{y}$, ...

Utemeljenje infinitezimalnog računa

- Zašto se ono pripisuje Newtonu i Leibnizu? Po čemu su im doprinosi slični, a po čemu različiti?
- sir Isaac Newton (1642.–1727.)
- *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687.)
- Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669./1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671./1736.), *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693./1704.)
- Newtonova metoda fluksija: fluensi x, y, ... ovisni o fluksu t i njihove brzine — fluksije: $\dot{x}$, $\dot{y}$, ...
- koeficijent smjera tangente na krivulju je onda $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Utemeljenje infinitezimalnog računa

- Zašto se ono pripisuje Newtonu i Leibnizu? Po čemu su im doprinosi slični, a po čemu različiti?
- sir Isaac Newton (1642.–1727.)
- *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687.)
- Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669./1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671./1736.), *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693./1704.)
- Newtonova metoda fluksija: fluensi x, y, ... ovisni o fluksu t i njihove brzine — fluksije: $\dot{x}$, $\dot{y}$, ...
- koeficijent smjera tangente na krivulju je onda $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$
- U *De Methodis Serierum et Fluxionum* Newton iskazuje temeljni zadatak infinitezimalnog računa: Iz odnosa fluenata odrediti odnos njihovih fluksija i obrnuto.

Deriviranje na Newtonov način

Zadana je jednadžba krivulje: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

- Supstituiramo $x + o\dot{x}$ za x i analogno za y: $x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0$.
- Budući da (x, y) mora zadovoljavati polaznu jednadžbu, preostaje: $3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0$.
- Podijelimo s o jer on nije 0: $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0$.
- Zanemarimo o jer je on blizu 0 i dobijemo $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 = 0$.

Integriranje na Newtonov način

$$\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova, posebno za integriranje. Ovdje koristi $\boxed{\text{binomni red}}$

$\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$

Integriranje na Newtonov način

$$\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova, posebno za integriranje. Ovdje koristi $\boxed{\text{binomni red}}$ $\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots$,što daje

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$$

Integriranje na Newtonov način

$$\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova, posebno za integriranje. Ovdje koristi $\boxed{\text{binomni red}}$ $\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots$,što daje

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (x+)\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{5}{9}x^9 + \frac{14}{11}x^{11} + \ldots$$

Newton i redovi

The method of fluxions and infinite series with its application to the geometry of curve-lines (1671., objavljeno 1736.): *Računanje s brojevima i varijablama je slično, pa je stoga prirodno, prikaz brojeva kao decimalnih razlomaka analogno primijeniti na varijable.* Iskazuje i čudjenje, da to još nikome osim njemačkom matematičaru Nicolausu Mercatoru (Niklaus Kauffman, 1620.–1687.) nije palo na pamet: *Logarithmotechnia* (1668.)

Mercatorov red

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

(prirodni logaritam)

Newton je otkrio više razvoja u redove potencija, od kojih je najpoznatiji binomni red, a razvio je i metodu za invertiranje redova potencija (određivanje reda potencija koji predstavlja inverznu funkciju od danog reda potencija).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.)

1672.: Huygens ga je podučio matematici fizici; 1673. član *Royal Society*

temelji računarstva i matematičke logike: osmislio poboljšanje *Pascaline*; opisao račun u binarnom brojevnom sustavu; ideja umjetnog, simboličkog jezika logike i uočio analogiju logičkog zaključivanja i računice

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.)

1672.: Huygens ga je podučio matematici fizici; 1673. član *Royal Society*

temelji računarstva i matematičke logike: osmislio poboljšanje *Pascaline*; opisao račun u binarnom brojevnom sustavu; ideja umjetnog, simboličkog jezika logike i uočio analogiju logičkog zaključivanja i računice

veliku pozornost pridavao simbolici: $\int \ldots dx$, dx, $\cdot$, $:$, ...

do 1676. razvio svoje prve ideje infinitezimalnog računa, od kojih je prve objavio 1680-ih godina (na temelju analitičke geometrije i Pascalovog karakterističnog trokuta)

pokušaj opovrgavanja tvrdnje iz osnovnog teorema algebre: tvrdio je da se $x^4 + a^4$ ne može faktorizirati na dva kvadratna polinoma jer je mislio da $\sqrt{i}$ nije kompleksan broj

Leibniz i redovi

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize.

Leibniz i redovi

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots = ?$$

Leibniz je uočio da su svi sumandi oblika $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ pa su parcijalne sume tog reda jednake $2 - \frac{1}{n+1}$

Leibniz i redovi

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots=?$$

Leibniz je uočio da su svi sumandi oblika $\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$ pa su parcijalne sume tog reda jednake $2-\frac{1}{n+1}$
Ako je svaki pribrojnik d_n razlika dva uzastopna člana nekog niza (a_n), onda je $\sum_{i=1}^{n} d_i = a_1 - a_{n+1}$: diferenciranje je inverzno sumiranju!
1673. je otkrio i Leibnizov red

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Taj red je skupa s po njemu nazvanom kriteriju konvergencije reda objavio 1682.

Leibnizov je red bio već 1671. poznat škotskom matematičaru James Gregory-ju (1638–1675)

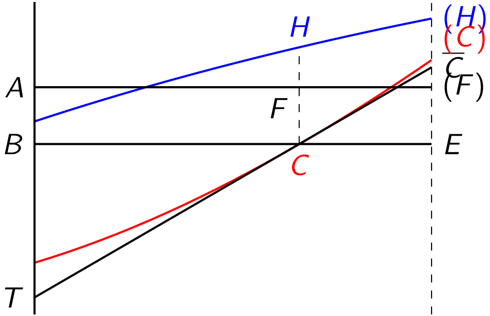
Leibnizov je red bio već 1671. poznat škotskom matematičaru James Gregory-ju (1638–1675)
Gregory-Mādhavin red

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

(još ranije ga je otkrio i za račun π na 11 decimala koristio indijski matematičar Mādhava (ca. 1350.–1425.))

Leibnizov dokaz osnovnog teorema infinitezimalnog računa

Suplementum geometriae dimensioriae (1693.): ,,Sad ću pokazati da se opći problem kvadrature može svesti na nalaženje krivulje danog zakona tangecijalnosti (*declivitas*), tj. takve da stranice karakterističnog trokuta imaju dan međusobni odnos“.



Leibniz je isprva kao oznaku integriranja koristio *omn.* – utjecaj Cavalierija koji je kvadrature nazivao *omnes lineae figurae*. U to doba je za diferenciju dviju susjednih ordinata (kasniji dy) koristio l. Tako primjerice 1675. piše $\text{omn.}\, xl = x\, \text{omn.}\, l - \text{omn.}\overline{\text{omn.}\, l}$. No, upravo te godine se odlučio za simbol $\int$ kao prikladniji za integriranje, jer je ono za njega bilo oblik sumacije. Primijetio je i da aku su l-ovi i x-evi duljine, onda je $\int l$ površina, a $\int xl$ volumen. Ubrzo je uveo i simbol diferencijala, d.

Leibniz je isprva kao oznaku integriranja koristio *omn.* – utjecaj Cavalierija koji je kvadrature nazivao *omnes lineae figurae*. U to doba je za diferenciju dviju susjednih ordinata (kasniji dy) koristio l. Tako primjerice 1675. piše $\mathrm{omn.}\, xl = x\, \mathrm{omn.}\, l - \mathrm{omn.}\overline{\mathrm{omn.}\, l}$. No, upravo te godine se odlučio za simbol $\int$ kao prikladniji za integriranje, jer je ono za njega bilo oblik sumacije. Primijetio je i da aku su l-ovi i x-evi duljine, onda je $\int l$ površina, a $\int xl$ volumen. Ubrzo je uveo i simbol diferencijala, d.
Iako su Newtonov i Leibnizov koncept sadržajno vrlo slični, vidljive su bitne razlike Newtona i Leibniza. Možda najbitnija je poimanje koeficijenta smjera tangente: kod Newtona on je kvocijent dviju konačnih veličina $\dot{y}$ i $\dot{x}$, a kod Leibniza infinitezimalnih dy i dx.

Leibniz je isprva kao oznaku integriranja koristio *omn.* – utjecaj Cavalierija koji je kvadrature nazivao *omnes lineae figurae*. U to doba je za diferenciju dviju susjednih ordinata (kasniji $\mathrm{d}y$) koristio l. Tako primjerice 1675. piše $\text{omn.}\,xl = x\,\text{omn.}\,l - \text{omn.}\overline{\text{omn.}\,l}$. No, upravo te godine se odlučio za simbol $\int$ kao prikladniji za integriranje, jer je ono za njega bilo oblik sumacije. Primijetio je i da aku su l-ovi i x-evi duljine, onda je $\int l$ površina, a $\int xl$ volumen. Ubrzo je uveo i simbol diferencijala, d.

Iako su Newtonov i Leibnizov koncept sadržajno vrlo slični, vidljive su bitne razlike Newtona i Leibniza. Možda najbitnija je poimanje koeficijenta smjera tangente: kod Newtona on je kvocijent dviju konačnih veličina $\dot{y}$ i $\dot{x}$, a kod Leibniza infinitezimalnih $\mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}x$.

Najpoznatiji kritičar bio je irski biskup i filozof George Berkeley (1684–1753), koji je 1734. postavio pitanje: *Što su fluksije? Brzine nestajućih prirasta? A što su ti nestajući prirasti? Niti su konačne veličine nit beskonačno male, a nisu niti ništa. Bismo li ih smjeli nazvati duhovima umrlih veličina?*

O sukobu Newtona i Leibniza oko prvenstva

- *6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x. – Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*

O sukobu Newtona i Leibniza oko prvenstva

- *6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x. – Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*
- 1684. Leibniz prvi put objavljuje svoje rezultate, Newtonova prva objava dio je njegove *Principia*-e (1687.)

O sukobu Newtona i Leibniza oko prvenstva

- *6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x. – Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*
- 1684. Leibniz prvi put objavljuje svoje rezultate, Newtonova prva objava dio je njegove *Principia*-e (1687.)
- svađa se intenzivira 1710., kad je John Keill u *Transactions of the Royal Society of London* optužio Leibniza za plagijat
- 1711. Leibniz traži ispriku od *Royal Society* te je imenovana komisija za utvrđivanje prvenstva

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Definicija (Funkcija, Johann Bernoulli, 1694.)

Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti.

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Definicija (Funkcija, Johann Bernoulli, 1694.)

Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti.

Johann i Jacob: diferencijalne jednadžbe, širenje infinitezimalnog računa

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Definicija (Funkcija, Johann Bernoulli, 1694.)

Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti.

Johann i Jacob: diferencijalne jednadžbe, širenje infinitezimalnog računa
Johann je tijekom boravka u Parizu podučio markiza Marquis de L'Hôpital (Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital, 1661–1704) tehnikama infinitezimalnog računa. L'Hopital je 1696. objavio prvi udžbenik *diferencijalnog* računa, no veći dio sadržaja pripisuje se Johannu, uključivo poznatog L'Hôpitalovog pravila.

Problem brahistohrone (1696.)

Potrebno je među svim krivuljama koje prolaze kroz dvije točke koje nisu na istoj visini niti jedna točno iznad druge odrediti onu krivulju po kojoj će se materijalna točka koja klizi bez trenja, samo pod utjecajem sile teže, najbrže spustiti od više do niže točke.

Problem su riješili Johann, Jacob, Newton, Leibniz i L'Hôpital. Johannovo rješenje je elegantnije: Uočio je analogiju s lomom svjetlosti.

Problem brahistohrone (1696.)

Potrebno je među svim krivuljama koje prolaze kroz dvije točke koje nisu na istoj visini niti jedna točno iznad druge odrediti onu krivulju po kojoj će se materijalna točka koja klizi bez trenja, samo pod utjecajem sile teže, najbrže spustiti od više do niže točke.

Problem su riješili Johann, Jacob, Newton, Leibniz i L'Hôpital.
Johannovo rješenje je elegantnije: Uočio je analogiju s lomom svjetlosti.
Jacobovo rješenje je kompliciranije, ali je utemeljilo **varijacijski račun**.

Brook Taylor i Colin Maclaurin

B. Taylor (1685.–1731.): *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) — opći oblik Taylorovog reda izveo iz Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule kad „prirast nestaje”

Brook Taylor i Colin Maclaurin

B. Taylor (1685.–1731.): *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) — opći oblik Taylorovog reda izveo iz Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule kad „prirast nestaje”
C. Maclaurin (1698.–1746.): *Treatise of fluxions* (1742.) — prvi sustavni prikaz Newtonovog računa fluksija i pokušaj odgovora na Berkeleyevu kritiku.