

Povijest matematike

Matematika u razdoblju prosvjetiteljstva

Franka Miriam Brückler



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Leonhard Euler (1707.–1783.)

- Švicarska, Rusija, Njemačka

Leonhard Euler (1707.–1783.)

- Švicarska, Rusija, Njemačka
- *Introductio in analysin infinitorum* (1748.)

Leonhard Euler (1707.–1783.)

- Švicarska, Rusija, Njemačka
- *Introductio in analysin infinitorum* (1748.)
- eksponencijalne i logaritamske *funkcije*
- izvod reda za eksponencijalnu funkciju (i broj e):
za $a > 1 \exists k = k_a$ t.d. je za $\omega \approx 0$

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

- potenciramo na j i primijenimo binomni red:

$$a^{j\omega} = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{j(j-1)}{2!}k^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3!}k^3\omega^3 + \dots$$

- proširimo svaki m -ti član s j^{m-1} :

$$a^{j\omega} = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{(j-1)}{2!j}j^2k^2\omega^2 + \frac{(j-1)(j-2)}{3!j \cdot j}j^3k^3\omega^3 + \dots$$

- supstituiramo $x = j\omega$ (j „beskonačno velik”, ω „toliko malen da taman nije 0“):

exp i Eulerova formula

$$\begin{aligned} a^x &= 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!} \cdot \frac{j-1}{j} \cdot x^2 + \frac{k^3}{3!} \cdot \frac{(j-1)(j-2)}{j^2} \cdot x^3 + \dots = \\ &= 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Najjednostavniji red: $k = 1 \Rightarrow a = e$ (iracionalan, 23 decimale, razvoj u verižni razlomak)

exp i Eulerova formula

$$\begin{aligned} a^x &= 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!} \cdot \frac{j-1}{j} \cdot x^2 + \frac{k^3}{3!} \cdot \frac{(j-1)(j-2)}{j^2} \cdot x^3 + \dots = \\ &= 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Najjednostavniji red: $k = 1 \Rightarrow a = e$ (iracionalan, 23 decimale, razvoj u verižni razlomak)

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x - i \sin x)(\cos x + i \sin x) \Rightarrow \dots$$

$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos(nx) \pm i \sin(nx)$$

(de Moivreova formula; 1777. Euler uveo i)

exp i Eulerova formula

$$\begin{aligned}
 a^x &= 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!} \cdot \frac{j-1}{j} \cdot x^2 + \frac{k^3}{3!} \cdot \frac{(j-1)(j-2)}{j^2} \cdot x^3 + \dots = \\
 &= 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Najjednostavniji red: $k = 1 \Rightarrow a = e$ (iracionalan, 23 decimale, razvoj u verižni razlomak)

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x - i \sin x)(\cos x + i \sin x) \Rightarrow \dots$$

$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos(nx) \pm i \sin(nx)$$

(de Moivreova formula; 1777. Euler uveo i) $\dots \Rightarrow$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow$$

Eulerova formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (R. Cotes:

$\ln(\cos q + i \sin q) = iq$, 1712.; težinski prosjek)

Baselski problem

Pietro Mengoli, 1650.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$$

Baselski problem

Pietro Mengoli, 1650.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$$

Euler (1735.): $? = \frac{\pi^2}{6}$ (1737. π)

Baselski problem

Pietro Mengoli, 1650.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$$

Euler (1735.): $? = \frac{\pi^2}{6}$ (1737. π)

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = *$$

Nultočke: $n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ „ \Rightarrow “

$$* = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz x^2 :

$$-\frac{1}{3!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}$$

Funkcije i *diferencijalni* račun

- oznaka $f(x)$ 1734.

Eulerova definicija funkcije, 1755.

Funkcija neke varijabilne veličine je *analitički izraz*, koji je na neki način složen iz te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.

- „neprekidne“ funkcije;

Funkcije i *diferencijalni* račun

- oznaka $f(x)$ 1734.

Eulerova definicija funkcije, 1755.

Funkcija neke varijabilne veličine je *analitički izraz*, koji je na neki način složen iz te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.

- „neprekidne“ funkcije;
- *Onima, koji pitaju što je infinitezimalno mala veličina u matematici, odgovaramo: Ona je u biti jednaka nuli. (Institutiones calculi differentialis, 1755.)*
- Diferencijali različitih varijabli kod Eulera su „različite nule“:
 $\frac{dx}{dx} = 1$, ali $\frac{dy}{dx}$ može poprimiti različite iznose

$$\frac{dx + (dx)^2}{dx} = 1 + dx = 1 \Rightarrow dx + (dx)^2 = dx$$

Eulerov dokaz pravila za diferenciranje kvocijenta

$$\frac{1}{1 + dq} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1 + \frac{dq}{q}} = \frac{1}{q} \cdot \left(1 - \frac{dq}{q} + \frac{dq^2}{q^2} - \dots \right) = \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p + dp}{q + dq} - \frac{p}{q} = (p + dp) \left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2} \right) - \frac{p}{q} = \\ &= \frac{p}{q} - \frac{pdq}{q^2} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{q^2} - \frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{q^2}. \end{aligned}$$

Eulerov dokaz pravila za diferenciranje kvocijenta

$$\frac{1}{1+dq} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1+\frac{dq}{q}} = \frac{1}{q} \cdot \left(1 - \frac{dq}{q} + \frac{dq^2}{q^2} - \dots\right) = \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p+dp}{q+dq} - \frac{p}{q} = (p+dp) \left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}\right) - \frac{p}{q} = \\ &= \frac{p}{q} - \frac{pdq}{q^2} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{q^2} - \frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{q^2}. \end{aligned}$$

Eulerovo diferenciranje sinusa

$$y = \sin x, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \Rightarrow$$

$$dy = \sin(x+dx) - \sin x = \sin x \cos(dx) + \sin(dx) \cos x - \sin x.$$

Eulerov dokaz pravila za diferenciranje kvocijenta

$$\frac{1}{1 + dq} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1 + \frac{dq}{q}} = \frac{1}{q} \cdot \left(1 - \frac{dq}{q} + \frac{dq^2}{q^2} - \dots \right) = \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p + dp}{q + dq} - \frac{p}{q} = (p + dp) \left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2} \right) - \frac{p}{q} = \\ &= \frac{p}{q} - \frac{pdq}{q^2} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{q^2} - \frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{q^2}. \end{aligned}$$

Eulerovo diferenciranje sinusa

$$y = \sin x, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \Rightarrow$$

$$dy = \sin(x + dx) - \sin x = \sin x \cos(dx) + \sin(dx) \cos x - \sin x.$$

Zbog $dx = 0$ je $\cos(dx) = 1$ i $\sin(dx) = dx$, preostaje
 $dy = \cos x dx$.

Jean le Rond d'Alembert (1717.–1783.)

Suradnik na Diderotovoj *Encyclopedie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*

- Za opravdanje infinitezimalnog računa bitni su limesi (*Limite*, 1754./1765.)
- prvi sustavno razmatra diferencijalne kvocijente, tj. **derivaciju**: ističe da se diferencijalni račun svodi na algebarsko određivanje limesa kvocijenta i da je bit diferencijalnog računa u limesu kvocijenta infinitezimalnih veličina, a ne samim infinitezimalnim veličinama (*Différentiel*, 1754.)

Jean le Rond d'Alembert (1717.–1783.)

Suradnik na Diderotovoj *Encyclopedie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*

- Za opravdanje infinitezimalnog računa bitni su limesi (*Limite*, 1754./1765.)
- prvi sustavno razmatra diferencijalne kvocijente, tj. **derivaciju**: ističe da se diferencijalni račun svodi na algebarsko određivanje limesa kvocijenta i da je bit diferencijalnog računa u limesu kvocijenta infinitezimalnih veličina, a ne samim infinitezimalnim veličinama (*Différentiel*, 1754.)
- D'Alembertov kriterij: *Opuscules mathématiques* (1761.–1780.)

Abraham de Moivre (1667.–1754.)

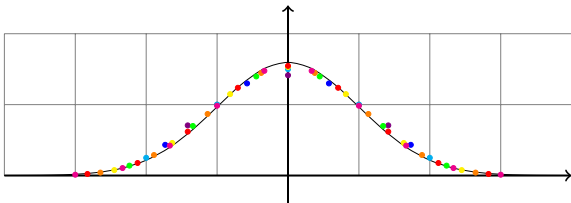
- Glavno djelo: *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play* (latinska verzija 1711., engleska 1718., 1738., 1756.): **centralni granični teorem** (prva varijanta 1733.)

Abraham de Moivre (1667.–1754.)

- Glavno djelo: *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play* (latinska verzija 1711., engleska 1718., 1738., 1756.): **centralni granični teorem** (prva varijanta 1733.)
- $p = q = \frac{1}{2}$, n velik: $P(l \leq X \leq l) = ?$
- *Miscellanea Analytica* (1730.) : $n! \approx K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (za velike n).
Uz $K = \sqrt{2\pi}$: Stirlingova formula

Abraham de Moivre (1667.–1754.)

- Glavno djelo: *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play* (latinska verzija 1711., engleska 1718., 1738., 1756.): **centralni granični teorem** (prva varijanta 1733.)
- $p = q = \frac{1}{2}$, n velik: $P(l \leq X \leq l) = ?$
- *Miscellanea Analytica* (1730.) : $n! \approx K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (za velike n).
Uz $K = \sqrt{2\pi}$: Stirlingova formula



$$\left(\frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n}}{2^n} \binom{n}{k} \right)$$

Problem kockareve propasti

Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos. Neka je p vjerojatnost da prvi dobije ulog u pojedinom krugu igre. Ako znamo koliko je tko imao novca na početku, koja je vjerojatnost P da će drugi igrač ostati bez novca (propasti)?

Problem kockareve propasti

Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos. Neka je p vjerojatnost da prvi dobije ulog u pojedinom krugu igre. Ako znamo koliko je tko imao novca na početku, koja je vjerojatnost P da će drugi igrač ostati bez novca (propasti)?

De Moivreov „trik”: Zamislimo da igrači imaju novce složene u tornjeve (jedan novčić = jedan ulog). Nominalne vrijednosti: $\left(\frac{q}{p}\right)^i$ ($i = a, a - 1, \dots, 2, 1$ za prvog; $i = a + 1, a + 2, \dots, a + b$ za drugog).

Problem kockareve propasti

Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos. Neka je p vjerojatnost da prvi dobije ulog u pojedinom krugu igre. Ako znamo koliko je tko imao novca na početku, koja je vjerojatnost P da će drugi igrač ostati bez novca (propasti)?

De Moivreov „trik“: Zamislimo da igrači imaju novce složene u tornjeve (jedan novčić = jedan ulog). Nominalne vrijednosti: $\left(\frac{q}{p}\right)^i$ ($i = a, a - 1, \dots, 2, 1$ za prvog; $i = a + 1, a + 2, \dots, a + b$ za drugog).

Ulaže se uvijek najgornji novčić. Dakle, nominalni ulog drugog je u svakom krugu $x = \frac{q}{p}$ veći nego onaj prvog. Stoga je očekivana nominalna vrijednost dobitka prvog igrača u krugu u kojem trenutno ima i novčića

$$p x^{i+1} - q x^i = 0.$$

Slijedi da je nominalno očekivanje na razini cijele igre 0, tj.

$$P \cdot \sum_{j=1}^b x^{a+j} = (1 - P) \cdot \sum_{i=1}^a x^i$$

Slijedi da je nominalno očekivanje na razini cijele igre 0, tj.

$$P \cdot \sum_{j=1}^b x^{a+j} = (1-P) \cdot \sum_{i=1}^a x^i$$

$$\sum_{j=1}^b x^{a+j} = x^a \cdot \sum_{j=1}^b x^j = x^a \cdot x \cdot \frac{1-x^b}{1-x}, \quad \sum_{i=1}^a x^i = x \cdot \frac{1-x^a}{1-x} \Rightarrow$$

$$P \cdot x^a \cdot x \cdot \frac{1-x^b}{1-x} = (1-P) \cdot x \cdot \frac{1-x^a}{1-x} \Rightarrow$$

$$P \cdot x^a \cdot (1-x^b) = (1-P) \cdot (1-x^a) = 1-x^a - P \cdot (1-x^a) \Rightarrow$$

$$P \cdot (x^a - x^{a+b} + 1 - x^a) = 1 - x^a \Rightarrow$$

$$P = \frac{1-x^a}{1-x^{a+b}}$$

Daniel Bernoulli (1700.–1782.)

Prvi uvodi tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti, a svoja je otkrića primjenjivao na pitanja osiguranja. Utemeljio je i primjenu teorije vjerojatnosti na kinetičku teoriju plinova.

Daniel Bernoulli (1700.–1782.)

Prvi uvodi tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti, a svoja je otkrića primjenjivao na pitanja osiguranja. Utemeljio je i primjenu teorije vjerojatnosti na kinetičku teoriju plinova.

St. Petersburški paradoks 1738. (D'Alembert, 1768.)

Igrač baca novčić. Kockarnica će mu isplatiti 1 novčić ako u prvom bacanju padne glava, 2 ako glava prvi put padne u drugom bacanju, 4 ako glava prvi put padne u trećem bacanju itd. 2^{n-1} ako se glava prvi put pojavi u n -tom bacanju. Koliko iznosi pravedni ulog igrača na početku igre?

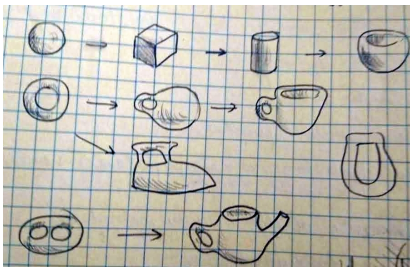
Vjerojatnost dobitka 2^{n-1} je 2^{-n} . Stoga očekivana isplata igraču iznosi ∞ , što bi značilo da se isplati uložiti proizvoljno velik novac. No, vjerojatnost dobitka (max. 16) unutar prvih 5 bacanja je 96,875 %)?!

Utemeljenje topologije (teorije grafova)

Što je topologija?

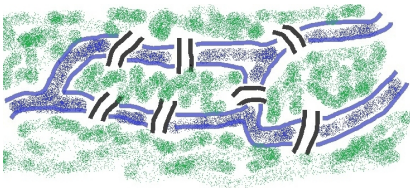
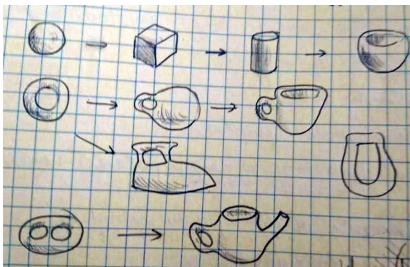
Utemeljenje topologije (teorije grafova)

Što je topologija?



Utemeljenje topologije (teorije grafova)

Što je topologija?



L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*
(1736.)

- 1750. u pismu C. Goldbachu: Ako je V broj vrhova nekog poliedra, B njegov broj bridova, a S broj stana, onda je $V - B + S = 2$.

- 1750. u pismu C. Goldbachu: Ako je V broj vrhova nekog poliedra, B njegov broj bridova, a S broj stana, onda je $V - B + S = 2$.
- 1752. nepotpuni dokaz; prvi potpuni dokaz: Legendre 1794.
- U terminima teorije grafova ovo je formula za planarne grafove (Cauchy).

- 1750. u pismu C. Goldbachu: Ako je V broj vrhova nekog poliedra, B njegov broj bridova, a S broj stana, onda je $V - B + S = 2$.
- 1752. nepotpuni dokaz; prvi potpuni dokaz: Legendre 1794.
- U terminima teorije grafova ovo je formula za planarne grafove (Cauchy).
- Je li ipak Descartes otac topologije?

Teorem (Descartesova poliedarska formula)

Ako 4 prava kuta pomnožimo s brojem prostornih kutova i od toga oduzmemo 8 pravih kutova, preostat će zbroj svih ravninskih kutova u poliedru:

$$360^\circ V - 720^\circ = \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^{V_i} \alpha_{ij}.$$

Peti Euklidov postulat

Kako je ono glasilo u izvornoj formulaciji? Što je bio problem?

Peti Euklidov postulat

Kako je ono glasilo u izvornoj formulaciji? Što je bio problem? Do 19. st. su nalaženi razni „dokazi” EP5, no u svima su prije ili kasnije pronađene greške. Te greške su se većinom sastojale u pretpostavljanju nekog „očitog” svojstva, ekvivalentnog postulatu o paralelama.

Peti Euklidov postulat

Kako je ono glasilo u izvornoj formulaciji? Što je bio problem? Do 19. st. su nalaženi razni „dokazi” EP5, no u svima su prije ili kasnije pronađene greške. Te greške su se većinom sastojale u pretpostavljanju nekog „očitog” svojstva, ekvivalentnog postulatu o paralelama.

Wallisov aksiom (1693.)

Za svaki trokut postoji njemu sličan trokut proizvoljne veličine.

Girolamo Saccheri (1667.–1733.)

Pokušaj *reductio ad absurdum*; i on je mislio da je dokazao EP5.
Saccheri-Hajjam-at-Tusijev četverokut je četvrokut $ABCD$ s dvije
jednako duge nasuprotne stranice \overline{AD} i \overline{BC} okomite na treću (\overline{AB}).

Girolamo Saccheri (1667.–1733.)

Pokušaj *reductio ad absurdum*; i on je mislio da je dokazao EP5.
Saccheri-Hajjam-at-Tusijev četverokut je četvrokut $ABCD$ s dvije
jednako duge nasuprotne stranice \overline{AD} i \overline{BC} okomite na treću (\overline{AB}).
 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ (SKS) $\Rightarrow |AC| = |BD|$

Girolamo Saccheri (1667.–1733.)

Pokušaj *reductio ad absurdum*; i on je mislio da je dokazao EP5.
Saccheri-Hajjam-at-Tusijev četverokut je četvrokut $ABCD$ s dvije jednako duge nasuprotne stranice \overline{AD} i \overline{BC} okomite na treću (\overline{AB}).
 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ (SKS) $\Rightarrow |AC| = |BD| \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BCD$
(SSS) $\Rightarrow \angle BCD = \angle ADC = \alpha$.

Girolamo Saccheri (1667.–1733.)

Pokušaj *reductio ad absurdum*; i on je mislio da je dokazao EP5. Saccheri-Hajjam-at-Tusijev četverokut je četvrokut $ABCD$ s dvije jednako duge nasuprotne stranice \overline{AD} i \overline{BC} okomite na treću (\overline{AB}).
 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ (SKS) $\Rightarrow |AC| = |BD| \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BCD$ (SSS) $\Rightarrow \angle BCD = \angle ADC = \alpha$.

- 1 $\alpha > 90^\circ \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{EP5} \odot$;
- 2 $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{EP5} \odot$;
- 3 $\alpha < 90^\circ \Rightarrow$ (svojstva neeuklidske/hiperbolič ne geometrije)
... postoji beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku zadani pravac, što je smatrao nespojivim s prirodom pravca

Johann Heinrich Lambert (1728.–1777.)

Prvi dokaz da $\pi \notin \mathbb{Q}$ (1768.); Hipoteza: π , e transcendentni
(dokazano u 19. st.: von Lindemann 1882, Hermite 1873).

Johann Heinrich Lambert (1728.–1777.)

Prvi dokaz da $\pi \notin \mathbb{Q}$ (1768.); Hipoteza: π , e transcendentni (dokazano u 19. st.: von Lindemann 1882, Hermite 1873). Lambert je prvi koji je sustavno analizirao hiperboličke funkcije.

Johann Heinrich Lambert (1728.–1777.)

Prvi dokaz da $\pi \notin \mathbb{Q}$ (1768.); Hipoteza: π , e transcendentni (dokazano u 19. st.: von Lindemann 1882, Hermite 1873). Lambert je prvi koji je sustavno analizirao hiperboličke funkcije. Lambert-Alhazenov četverokut: četverokut s tri prava kuta.

Johann Heinrich Lambert (1728.–1777.)

Prvi dokaz da $\pi \notin \mathbb{Q}$ (1768.); Hipoteza: π , e transcendentni (dokazano u 19. st.: von Lindemann 1882, Hermite 1873). Lambert je prvi koji je sustavno analizirao hiperboličke funkcije. Lambert-Alhazenov četverokut: četverokut s tri prava kuta. U trećem slučaju dobio je da bi trokuti manje površine imali veći zbroj kutova (i što manji, to bliži 180°). Budući prvi slučaj funkcionira na sferi (T. Harriot, 1603., $P(T) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$), imao je ideju da bi treći slučaj mogla biti geometrija na sferi imaginarnog polumjera.

Jean D'Alembert: „skandal elementarne geometrije” (1767.)

Jean D'Alembert: „skandal elementarne geometrije” (1767.)

Georg Klügel (1738.–1812.) je u svojoj doktorskoj disertaciji 1763. analizirao tridesetak različitih pokušaja dokaza: **Možda se ne može dokazati!** Možda ga ljudi smatraju istinitim samo zbog toga na što ih njihova osjetila upućuju.

Početak nove faze: Kakav bi to bila geometrija u kojoj E5P ne vrijedi?

Jean D'Alembert: „skandal elementarne geometrije” (1767.)

Georg Klügel (1738.–1812.) je u svojoj doktorskoj disertaciji 1763. analizirao tridesetak različitih pokušaja dokaza: **Možda se ne može dokazati!** Možda ga ljudi smatraju istinitim samo zbog toga na što ih njihova osjetila upućuju.

Početak nove faze: Kakav bi to bila geometrija u kojoj E5P ne vrijedi?

Jedan od onih koji su tvrdili da se stvarno radi o aksiomu:

Josip Ruđer Bošković

- sferna trigonometrija (i diferencijalna!)
- rješenje problema tijela najveće atrakcije

Josip Ruđer Bošković

- sferna trigonometrija (i diferencijalna!)
- rješenje problema tijela najveće atrakcije
- račun pogreške:

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i| \rightarrow \min .$$

Josip Ruđer Bošković

- sferna trigonometrija (i diferencijalna!)
- rješenje problema tijela najveće atrakcije
- račun pogreške:

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i| \rightarrow \min .$$

- teorija konika 1754.: *ratio determinans*

Josip Ruđer Bošković

- sferna trigonometrija (i diferencijalna!)
- rješenje problema tijela najveće atrakcije
- račun pogreške:

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i| \rightarrow \min .$$

- teorija konika 1754.: *ratio determinans*
- kontinuum realnih brojeva: kad nabrajamo prirodne brojeve izostavljamo brojeve koji se nalaze između njih i ispunjuju cijeli prazan prostor između dva najbliža broja; između svakog odabranog razlomka ili pak iracionalnog broja i bilo kojeg cijelog broja postoji neki drugi razlomak ili iracionalni broj. ...

Euler i teorija brojeva

- provjerio neke od Fermatovih hipoteza, dokaz velikog Fermatovog teorema za eksponent 3
- uočio da se teorija brojeva može proučavati pomoću metoda matematičke analize: **analitička teorija brojeva**
- **Eulerov produkt**: Za $s > 1$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prost}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

- divergencija reda recipročnih prostih brojeva
- uveo **Eulerovu φ -funkciju** i poopćio mali Fermatov teorem na **Eulerov teorem**: Za prirodan broj a relativno prost s n je $a^{\varphi(n)} - 1$ djeljivo s n .
- 58 novih parova prijateljskih brojeva
- dokazao da su parni savršeni brojevi isključivo oblika $2^{n-1}(2^n - 1)$ ako je $2^n - 1$ prost
- izrekao je (1783.) zakon kvadratnog reciprociteta

Adrien-Marie Legendre (1752.–1833.)

Prvi je dokazao iracionalnost π^2 , dao je jednostavniji dokaz iracionalnosti broja π i smatrao je da je π transcendentan.

Zakon kvadratnog reciprociteta

Za različite neparne proste brojeve vrijedi:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4},$$

pri čemu je $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ ako $x^2 \equiv p \pmod{q}$ ima rješenja, a inače je $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$.

Legendre je zakon kvadratnog reciprociteta objavio u *Théorie des Nombres* (1785.), no dokaz mu je bio nepotpun. Popravljeni (još uvijek nesavršen) dokaz objavio je 1798. Prvi potpun dokaz:

Disquisitiones Arithmeticae, 1801.

Carl Friedrich Gauß (1777.–1855.) — početak moderne teorije brojeva (\equiv , **osnovni teorem aritmetike**, ...)

Disquisitiones Arithmeticae, 1801.

Carl Friedrich Gauß (1777.–1855.) — početak moderne teorije brojeva (\equiv , **osnovni teorem aritmetike**, ...)

Gauß kontra Legendrea:

- zakon kvadratnog reciprociteta
- procjena $\boxed{\pi(x)}$ (teorem o prostim brojevima, 1896.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1)$$

- **metoda najmanjih kvadrata**

$$E = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Disquisitiones Arithmeticae, 1801.

Carl Friedrich Gauß (1777.–1855.) — početak moderne teorije brojeva (\equiv , **osnovni teorem aritmetike**, ...)

Gauß kontra Legendrea:

- zakon kvadratnog reciprociteta
- procjena $\boxed{\pi(x)}$ (teorem o prostim brojevima, 1896.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1)$$

- **metoda najmanjih kvadrata**

$$E = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Kad je f polinom, zahtjev minimizacije E kao funkcije koeficijenata polinoma vodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi: 1810.

Gaußova metoda eliminacija

Gauß i račun pogreške

- dokazao da je aritmetička sredina točka minimuma za kvadratna odstupanja, tj. da ona minimizira $e(x) = \sum (x - x_i)^2$
- dao argumente za korištenja kriterija najmanjih kvadrata na temelju pretpostavki računa pogreške:
- kao Galileo & ako raspolažemo s više mjerenja iste veličine, aritmetička sredina rezultata je najvjerojatniji stvarni iznos
- izveo krivulju pogreške: **Gaußova krivulja**

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 x^2)$$

gdje je h pozitivna konstanta koju je interpretirao kao preciznost mjerenja