

Povijest matematike

Franka Miriam Brückler

PMF-MO, Zagreb

Svibanj 2024.

Matematika u doba znanstvene revolucije #3

Pierre-Simon Laplace (1749.–1827.)

- najveći politički oportunisti među matematičarima

Pierre-Simon Laplace (1749.–1827.)

- najveći politički oportunisti među matematičarima
- najvažniji doprinosi: nebeska mehanika i teorija vjerojatnosti
- *Traité de Mécanique Céleste* (1799.–1825.): Laplaceova diferencijalna jednačina $\nabla^2 U = 0$; „lako se vidi“;
- *Théorie Analytique des Probabilités* (1812.) & predgovor *Essai Philosophique sur les Probabilités* drugog izdanja (1814.)
- Filozofski aspekt: Slučajnost je naziv za događaje kojima još ne znamo objasniti uzrok, a svemir je deterministički i inteligencija (**Laplaceov demon**) koja bi znala sve podatke o trenutnom stanju, mogla bi matematički opisati sva buduća stanja (Heisenbergovo načelo? teorija kaosa? *computational irreducibility*?)

Definicija (Klasična definicija vjerojatnosti)

Vjerojatnost događaja je omjer brojeva za taj događaj povoljnih i svih mogućih slučajeva, ako ne postoji razlog da pretpostavimo da neki slučaj nastupa češće od drugih, odnosno ako su svi slučajevi za nas jednako vjerojatni.

Laplace dokazuje osnovna pravila računa vjerojatnosti te

De Moivre-Laplaceov centralni granični teorem, a opisuje i metodu najmanjih kvadrata.

Definicija (Klasična definicija vjerojatnosti)

Vjerojatnost događaja je omjer brojeva za taj događaj povoljnih i svih mogućih slučajeva, ako ne postoji razlog da pretpostavimo da neki slučaj nastupa češće od drugih, odnosno ako su svi slučajevi za nas jednako vjerojatni.

Laplace dokazuje osnovna pravila računa vjerojatnosti te

De Moivre-Laplaceov centralni granični teorem, a opisuje i metodu najmanjih kvadrata.

Tu su i

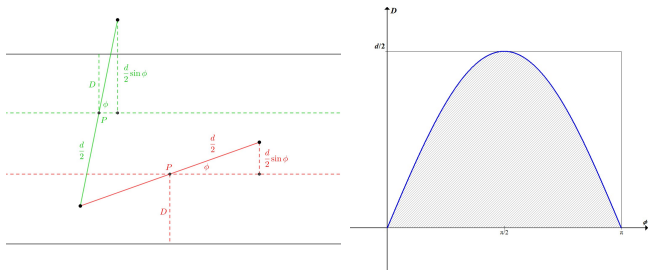
Teorem (Thomas Bayes (1702.–1761.))

Za događaje A i B **vrijedi**

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Buffonov problem 1777.

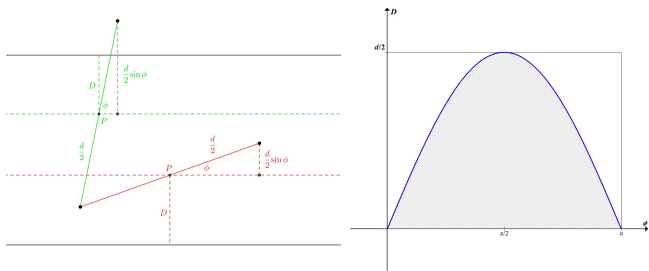
Ako u ravnini imamo paralelne jednako razmaknute pravce te ako na ravninu bacamo iglu poznate duljine, kolika je vjerojatnost da igla padne tako da siječe neki od pravaca? (Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon, 1707.–1788.)



Igla siječe neki pravac $\Leftrightarrow \frac{d}{2} \sin \phi \geq D, 0 \leq D \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \phi \leq \pi$

Buffonov problem 1777.

Ako u ravnini imamo paralelne jednako razmaknute pravce te ako na ravninu bacamo iglu poznate duljine, kolika je vjerojatnost da igla padne tako da siječe neki od pravaca? (Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon, 1707.–1788.)



Igla siječe neki pravac $\Leftrightarrow \frac{d}{2} \sin \phi \geq D, 0 \leq D \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \phi \leq \pi$

$$p(D \leq \frac{d}{2} \sin \phi) = \frac{\int_0^\pi \frac{d}{2} \sin \phi d\phi}{\pi \cdot d/2} = \frac{2}{\pi}$$

Nastanak moderne statistike

- Lambert Adolphe Jaques Quetelet (1796.–1874.) dao moderni smisao riječi **statistika** i njezinih primjena u društvenim znanostima
- uočio da je godišnjih broj ubojstava u Francuskoj gotovo konstantan, te da su čak i omjeri brojeva upotrijebljenih ubojitih sredstava gotovo konstantni – pitanje slobodne volje i društvenog determinizma?!
- razvio statističke metode za analize raznih tipova podataka
- 1853. je organizirao prvi međunarodni statistički kongres

Nastanak moderne statistike

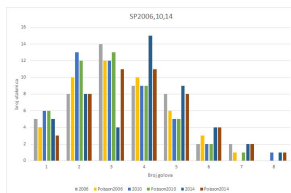
- **Lambert Adolphe Jaques Quetelet** (1796.–1874.) dao moderni smisao riječi **statistika** i njezinih primjena u društvenim znanostima
- uočio da je godišnjih broj ubojstava u Francuskoj gotovo konstantan, te da su čak i omjeri brojeva upotrijebljenih ubojitih sredstava gotovo konstantni – pitanje slobodne volje i društvenog determinizma?!
- razvio statističke metode za analize raznih tipova podataka
- 1853. je organizirao prvi međunarodni statistički kongres
- **Gregor Mendel** (1822.–1884.) je utemeljio primjenu teorije vjerojatnosti u genetici, a **James Clerk Maxwell** (1831.–1879.) i **Ludwig Boltzmann** (1844.–1906.) statističku termodinamiku

Siméon-Denis Poisson (1781.–1840.)

Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile (1837.)

Poissonova razdioba

Za $n \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$, ako uz to $pn \rightarrow \lambda$, je vjerojatnost k uspjeha u vremenskom intervalu unaprijed definirane duljine, u kojem se prosječno dešava λ uspjeha, aproksimativno $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$.



Od Poissona potječe naziv „zakon velikih brojeva”.

Sir Francis Galton (1822.–1911.)

- Utemeljitelj regresijske analize
- Usporedbom promjera sjemenki dviju generacija jedne biljke dobio je korelacijski dijagram i otkrio vezu koju je prvo nazvao reverzijom a kasnije **regresijom**: Medijan promjera potomaka većeg sjemenja bio je manji nego medijan promjera roditelja i obrnuto
- U takve korelacijske dijagrame ucrtavao je pravce koji su najbolje opisivali trendove, a njihove koeficijente smjera je uzimao kao indekse korelacije među dvjema varijablama
- Bio je uvjeren u sveprisutnost normalne razdiobe te je skupa s Amerikancem C. S. Peircem i Nijemcem W. Lexisom autor tog naziva
- Galtonova ploča – *quincunx*

Karl Pearson (1857.–1936.): otac modernog statističkog testiranja, najzaslužniji za popularizaciju normalne razdiobe.

Prije više godina nazvao sam Laplace-Gaußovu krivulju normalnom, no dok tim nazivom izbjegavamo međunarodno pitanje prvenstva, on ima manu, da navodi ljude na mišljenje da su drugačije razdiobe frekvencija na ovaj ili onaj način abnormalne. (1923.)

Karl Pearson (1857.–1936.): otac modernog statističkog testiranja, najzaslužniji za popularizaciju normalne razdiobe.

Prije više godina nazvao sam Laplace-Gaußovu krivulju normalnom, no dok tim nazivom izbjegavamo međunarodno pitanje prvenstva, on ima manu, da navodi ljude na mišljenje da su drugačije razdiobe frekvencija na ovaj ili onaj način abnormalne. (1923.)

Jules Henri Poincaré (1854.–1912.)

Svatko je u nju toliko uvjeren, rekao mi je jednog dana gospodin Lippmann, jer eksperimentalci smatraju da se radi o matematičkom teoremu, a matematičari, da je eksperimentalno potvrđena činjenica.

Poznata je i anegdota o Poincaréu, normalnoj razdiobi i francuskom kruhu *baguette* ...

Studentova raspodjela

Englez **William Sealy Gosset** (1876.–1937.) je studirao kemiju i matematiku u Oxfordu, ali se 1899. zaposlio u pivovari *Guinness* u Dublinu.

Tu se bavio raznim statističkim pitanjima i kontaktirao Pearsona (1906./7. ga je i posjetio).

Kako bi iz malih uzoraka mogao dobiti zaključke u svrhu kontrole kvalitete razvio je t-test, odnosno distribuciju koja je danas poznata kao studentova t-raspodjela.

Razlog neobičnog imena bila je zabrana objavljivanja tvorničkih tajni, te je Gosset svoje rezultate objavio kao „student”.

Studentova raspodjela

Englez **William Sealy Gosset** (1876.–1937.) je studirao kemiju i matematiku u Oxfordu, ali se 1899. zaposlio u pivovari *Guinness* u Dublinu.

Tu se bavio raznim statističkim pitanjima i kontaktirao Pearsona (1906./7. ga je i posjetio).

Kako bi iz malih uzoraka mogao dobiti zaključke u svrhu kontrole kvalitete razvio je t-test, odnosno distribuciju koja je danas poznata kao studentova t-raspodjela.

Razlog neobičnog imena bila je zabrana objavljivanja tvorničkih tajni, te je Gosset svoje rezultate objavio kao „student”.

Osnovni problem teorije vjerojatnosti na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće bio je nedostatak egzaktne osnove. Klasična definicija vjerojatnosti *a priori* kao broja povoljnih je cirkularna!

Problem je 1933. razriješio Andrej Nikolajevič Kolmogorov

(1903.–1987.): je na temelju teorije mjere i po uzoru na teoriju

Beskonačnost?!

Antika: Zenonovi paradoksi; Eudoksova metoda ekshauzije;
Aristotel je razlikovao aktualnu i potencijalnu beskonačnost i samo
potonju smatrao realno mogućom.

Beskonačnost?!

Antika: Zenonovi paradoksi; Eudoksova metoda ekshauzije;
Aristotel je razlikovao aktualnu i potencijalnu beskonačnost i samo
potonju smatrao realno mogućom.

U srednjem vijeku: Toma Akvinski (13. st.), **Thomas Bradwardine**
(14. st.)

Beskonačnost?!

Antika: Zenonovi paradoksi; Eudoksova metoda ekshaustije;
Aristotel je razlikovao aktualnu i potencijalnu beskonačnost i samo
potonju smatrao realno mogućom.

U srednjem vijeku: Toma Akvinski (13. st.), **Thomas Bradwardine**
(14. st.)

Renesansa – Galileo: Prva pojava osnovnog svojstva beskonačnih
skupova: **Beskonačan skup ima jednako mnogo elemenata kao neki
njegov pravi podskup.**

Beskonačnost?!

Antika: Zenonovi paradoksi; Eudoksova metoda ekshautije;
Aristotel je razlikovao aktualnu i potencijalnu beskonačnost i samo
potonju smatrao realno mogućom.

U srednjem vijeku: Toma Akvinski (13. st.), **Thomas Bradwardine**
(14. st.)

Renesansa – Galileo: Prva pojava osnovnog svojstva beskonačnih
skupova: **Beskonačan skup ima jednako mnogo elemenata kao neki
njegov pravi podskup.**

Ipak, do 19. st. mnogi su matematičari smatrali da beskonačni
skupovi ne postoje (npr. Boškovićev paradoks).

Beskonačnost?!

Antika: Zenonovi paradoksi; Eudoksova metoda ekshautije;
Aristotel je razlikovao aktualnu i potencijalnu beskonačnost i samo potonju smatrao realno mogućom.

U srednjem vijeku: Toma Akvinski (13. st.), **Thomas Bradwardine** (14. st.)

Renesansa – Galileo: Prva pojava osnovnog svojstva beskonačnih skupova: **Beskonačan skup ima jednako mnogo elemenata kao neki njegov pravi podskup.**

Ipak, do 19. st. mnogi su matematičari smatrali da beskonačni skupovi ne postoje (npr. Boškovićev paradoks).

Bernhard Bolzano (1781.–1848.) je istraživao takve prividne paradokse i tako našao više primjera beskonačnih skupova s bijekcijom na neki pravi podskup. U njegovo *Paradoxien des Unendlichen* (1851.) se po prvi put pojavljuje pojam „skup” (niem. Menge)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845.–1918.)

1869. se zaposlio na sveučilištu u Halleu. Tu ga je za matematičku analizu zainteresirao **Heinrich Edouard Heine** (1821.–1881.). Cantor je provjeravajući razne uvjete tipa „konvergira do na ... skup” počeo razmatrati precizniji opis linearnog kontinuuma realnih brojeva.

1870. je definirao realne brojeve kao klase ekvivalencije Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva i dokazao bijekciju s točkama pravca. Tako se Cantor počeo pomalo detaljnije posvećivati skupu \mathbb{R} i općenito beskonačnim skupovima.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845.–1918.)

1869. se zaposlio na sveučilištu u Halleu. Tu ga je za matematičku analizu zainteresirao **Heinrich Edouard Heine** (1821.–1881.). Cantor je provjeravajući razne uvjete tipa „konvergira do na ... skup” počeo razmatrati precizniji opis linearnog kontinuuma realnih brojeva.

1870. je definirao realne brojeve kao klase ekvivalencije Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva i dokazao bijekciju s točkama pravca. Tako se Cantor počeo pomalo detaljnije posvećivati skupu \mathbb{R} i općenito beskonačnim skupovima.

Godine 1872. Cantor se sprijateljio s **Richardom Dedekindom** (1831.–1916.), koji se također bavio definiranjem realnih brojeva. Dedekind je kontinuum realnih brojeva te godine definirao putem Dedekindovih rezova u skupu racionalnih brojeva:

Dedekindov rez

... u skupu \mathbb{Q} čine dva njegova disjunktna podskupa A i B takva da je $A \cup B = \mathbb{Q}$ te da A nema najveći element i $\forall x \in A \forall y \in B$ $x < y$.

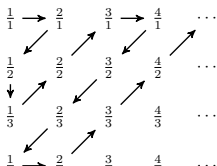
Svaki Dedekindov rez u \mathbb{Q} definira po jedan iracionalan broj, npr. $\sqrt{2}$ je broj definiran rezom $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$.

Dedekindov rez

... u skupu \mathbb{Q} čine dva njegova disjunktna podskupa A i B takva da je $A \cup B = \mathbb{Q}$ te da A nema najveći element i $\forall x \in A \forall y \in B$ $x < y$.

Svaki Dedekindov rez u \mathbb{Q} definira po jedan iracionalan broj, npr. $\sqrt{2}$ je broj definiran rezom $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$.

Vratimo se Cantoru. On je 1873. dokazao da postoji bijekcija između \mathbb{N} i \mathbb{Z} , odnosno da su ta dva skupa **ekvipotentna (jednakobrojna)**, a zatim je dokazao da im je ekvipotentan i \mathbb{Q} (i \mathbb{A}).



Prebrojivost i neprebrojivost

Od 1878. skupove ekvipotentne (\sim) s \mathbb{N} nazvao je **prebrojivi skupovi** (*abzählbare Mengen*). Kasnije (1895.) je broj elemenata prebrojivog skupa označio s \aleph_0 (alef-nula).

Prebrojivost i neprebrojivost

Od 1878. skupove ekvipotentne (\sim) s \mathbb{N} nazvao je **prebrojivi skupovi** (*abzählbare Mengen*). Kasnije (1895.) je broj elemenata prebrojivog skupa označio s \aleph_0 (alef-nula).

Uočimo: Skup je prebrojiv \Leftrightarrow njegove elemente možemo poredati u niz.

Prebrojivost i neprebrojivost

Od 1878. skupove ekvipotentne (\sim) s \mathbb{N} nazvao je **prebrojivi skupovi** (*abzählbare Mengen*). Kasnije (1895.) je broj elemenata prebrojivog skupa označio s \aleph_0 (alef-nula).

Uočimo: Skup je prebrojiv \Leftrightarrow njegove elemente možemo poredati u niz.

Postoji li beskonačan skup koji nije prebrojiv (**neprebrojiv skup**)?

Prebrojivost i neprebrojivost

Od 1878. skupove ekvipotentne (\sim) s \mathbb{N} nazvao je **prebrojivi skupovi** (*abzählbare Mengen*). Kasnije (1895.) je broj elemenata prebrojivog skupa označio s \aleph_0 (alef-nula).

Uočimo: Skup je prebrojiv \Leftrightarrow njegove elemente možemo poredati u niz.

Postoji li beskonačan skup koji nije prebrojiv (**neprebrojiv skup**)?

Cantorovog dokaz da je skup \mathbb{R} neprebrojiv obično se smatra trenutkom nastanka teorije skupova. Bilo je to u prosincu 1873., a objavljeno je 1874. u *Crelle's Journal*.

Prebrojivost i neprebrojivost

Od 1878. skupove ekvipotentne (\sim) s \mathbb{N} nazvao je **prebrojivi skupovi** (*abzählbare Mengen*). Kasnije (1895.) je broj elemenata prebrojivog skupa označio s \aleph_0 (alef-nula).

Uočimo: Skup je prebrojiv \Leftrightarrow njegove elemente možemo poredati u niz.

Postoji li beskonačan skup koji nije prebrojiv (**neprebrojiv skup**)?

Cantorovog dokaz da je skup \mathbb{R} neprebrojiv obično se smatra trenutkom nastanka teorije skupova. Bilo je to u prosincu 1873., a objavljeno je 1874. u *Crelle's Journal*.

Tek 1844. je **J. Liouville** dokazao da transcendentni brojevi postoje, 1873. je C. Hermite dokazao da je e transcendentan, 1882. F. von Lindemann da je π transcendentan — a iz Cantorovog rezultata trivijalno slijedi da transcendentnih brojeva više nego racionalnih!

1877. *Vidim, ali ne vjerujem!*: Dužina i kvadrat i kocka su ekvipotentni! Ima li dimenzija onda smisla?

1877. *Vidim, ali ne vjerujem!*: Dužina i kvadrat i kocka su ekvipotentni! Ima li dimenzija onda smisla?

Leopold Kronecker (1823.–1891.) — konstruktivizam

1879.–1884. Cantor, *Mathematische Annalen* — 6 članaka s detaljnim opisom teorije skupova.

Tu uvodi i dobro uređene skupove, ordinalne brojeve i njihovu aritmetiku. Najmanji beskonačni ordinalni broj je onaj od \mathbb{N} sa standardnim uređajem: ω .

1877. *Vidim, ali ne vjerujem!*: Dužina i kvadrat i kocka su ekvipotentni! Ima li dimenzija onda smisla?

Leopold Kronecker (1823.–1891.) — konstruktivizam

1879.–1884. Cantor, *Mathematische Annalen* — 6 članaka s detaljnim opisom teorije skupova.

Tu uvodi i dobro uređene skupove, ordinalne brojeve i njihovu aritmetiku. Najmanji beskonačni ordinalni broj je onaj od \mathbb{N} sa standardnim uređajem: ω .

1894. Cantor je doživio prvi napad depresije – sukob s Kroneckerom? Vjerojatnije: problemi u međuljudskim odnosima i matematičke brige, posebno neuspješni pokušaji dokaza **hipoteze kontinuuma**:

Hipoteza kontinuumu

- \aleph_0 je najmanji beskonačni kardinalni broj;
- on je manji od kardinalnog broja skupa \mathbb{R} (\mathfrak{c}), a taj je jednak 2^{\aleph_0} ;
- ima li koji između?
- HK: nema – $\aleph_1 = \mathfrak{c}$?!

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

qpause

1895.–97. objavio je dvodijelni pregled svoje teorije skupova s proširenjima. Najpoznatiji rezultat ove druge faze je:

Osnovni Cantorov teorem teorije skupova

Teorem

Svaki skup ima manje elemenata nego njegov partitivni skup.

Dokaz.

$A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ je očito injekcija, dakle skup A nema više elemenata nego $\mathcal{P}(A)$.

Pretpostavimo da postoji surjekcija $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. Neka je $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Očito $M \in \mathcal{P}(A)$. Zbog surjektivnosti postoji $a \in A$ t.d. $f(a) = M$. Ili je $a \in M$ ili $a \notin M$. Ako da, po definiciji M , $a \notin f(a) = M$ i obrnuto ako $a \notin M$, onda $a \in M$.

Osnovni Cantorov teorem teorije skupova

Teorem

Svaki skup ima manje elemenata nego njegov partitivni skup.

Dokaz.

$A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ je očito injekcija, dakle skup A nema više elemenata nego $\mathcal{P}(A)$.

Pretpostavimo da postoji surjekcija $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. Neka je $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Očito $M \in \mathcal{P}(A)$. Zbog surjektivnosti postoji $a \in A$ t.d. $f(a) = M$. Ili je $a \in M$ ili $a \notin M$. Ako da, po definiciji M , $a \notin f(a) = M$ i obrnuto ako $a \notin M$, onda $a \in M$.

Posljedica:

Postoji beskonačno mnogo različitih beskonačnosti.

Dijagonalni argument

Varijanta gornjeg dijagonalnog postupka koristi se u Cantorovom drugom dokazu neprebrojivosti skupa $\mathbb{R} \sim \langle 0, 1 \rangle$ (1891.).

$$x_1 = 0,\underline{7}528752\dots$$

$$x_2 = 0,50\underline{3}8567\dots$$

$$x_3 = 0,119\underline{3}453\dots$$

$$x_4 = 0,255\underline{3}602\dots$$

⋮

Dijagonalni argument

Varijanta gornjeg dijagonalnog postupka koristi se u Cantorovom drugom dokazu neprebrojivosti skupa $\mathbb{R} \sim \langle 0, 1 \rangle$ (1891.).

$$x_1 = 0,\underline{7}528752\dots$$

$$x_2 = 0,50\underline{3}8567\dots$$

$$x_3 = 0,11\underline{9}3453\dots$$

$$x_4 = 0,255\underline{3}602\dots$$

\vdots

$x = 0,a_1a_2a_3\dots \in \langle 0, 1 \rangle$, za koji je $a_i = 9$ uvijek osim ako je i -ta znamenka od x_i jednaka 9, u kom slučaju uzimamo $a_i = 8$.

Aksiom izbora i paradoksi teorije skupova

Giuseppe Peano (1858.–1932.)¹ prvi eksplicitno spomenuo korištenje te tvrdnje, koju je implicitno već ranije koristio Cantor: Za bilo kakvu familiju međusobno disjunktih skupova postoji skup koji sa svakim skupom te familije ima točno jedan zajednički element.

¹Peano je uveo i simbole \in , \cap i \cup .

Aksiom izbora i paradoksi teorije skupova

Giuseppe Peano (1858.–1932.)¹ prvi eksplicitno spomenuo korištenje te tvrdnje, koju je implicitno već ranije koristio Cantor: Za bilo kakvu familiju međusobno disjunktih skupova postoji skup koji sa svakim skupom te familije ima točno jedan zajednički element.

1897.: **Burali-Fortijev paradoks**: Klasa svih ordinalnih brojeva nije skup.

1899.: **Cantorov paradoks**: Klasa svih skupova nije skup.

1902.: **Russellov paradoks**: $A = \{x : x \notin x\}$ nije skup.

¹Peano je uveo i simbole \in , \cap i \cup .

Utemeljenje matematičke logike

Augustus De Morgan (1806.–1871.) prvi jasno opisuje dokaz matematičkom indukcijom (1838.). U *Formal logic; or, the calculus of inference* (1847) pokušao je razviti simboličku logiku unutar klasične silogističke logike: nije razvio algebru logike, nego „samo” simboličku reprezentaciju logike. De Morganove zakone jest formulirao, ali su bili poznati još William of Ockhamu.

Utemeljenje matematičke logike

Augustus De Morgan (1806.–1871.) prvi jasno opisuje dokaz matematičkom indukcijom (1838.). U *Formal logic; or, the calculus of inference* (1847) pokušao je razviti simboličku logiku unutar klasične silogističke logike: nije razvio algebru logike, nego „samo” simboličku reprezentaciju logike. De Morganove zakone jest formulirao, ali su bili poznati još William of Ockhamu. Logičku algebru je ne temeljima engleske logičke tradicije i tadašnjih rasprava stvorio **George Boole** (1815.–1864.) svojim *The Mathematical Analysis of Logic* (1847.) i *An Investigation in the Laws of Thought* (1854.). Cilj mu je bio algebarske oznake odvojiti od njihove numeričke interpretacije pa je ovo i velik doprinos apstraktizaciji algebre.

Primjer

Booleov dokaz isključenja kontadikcije: $x x = x$ (osnovno pravilo) \Rightarrow
 $x - x x = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 = \text{klasa bez objekata.}$

David Hilbert (1862.–1943.)

- 1899.: nova aksiomatizacija euklidske geometrije i konzistentnost (=nekontradiktornost) euklidske geometrije

David Hilbert (1862.–1943.)

- 1899.: nova aksiomatizacija euklidske geometrije i konzistentnost (=nekontradiktornost) euklidske geometrije
- Je li matematika dobro utemeljena?
- 1900./1902.: Hilbertova 23 problema — drugi problem: Jesu li aksiomi aritmetike konzistentni?

David Hilbert (1862.–1943.)

- 1899.: nova aksiomatizacija euklidske geometrije i konzistentnost (=nekontradiktornost) euklidske geometrije
- Je li matematika dobro utemeljena?
- 1900./1902.: Hilbertova 23 problema — drugi problem: Jesu li aksiomi aritmetike konzistentni?
- glavni predstavnik matematičkog formalizma: svi teoremi se mogu po pravilima deduktivne logike izvesti iz danog sustava aksioma
- 1920. Hilbertov program: matematika je skup dokazivih formula (dakle, svedena na čistu sintaksu), a uz nju postoji i metamatematika koja služi opravdanju same matematike i u kojoj se — u svrhu dokaza konzistentnosti danog sustava aksioma — koristi i semantika

David Hilbert (1862.–1943.)

- 1899.: nova aksiomatizacija euklidske geometrije i konzistentnost (=nekontradiktornost) euklidske geometrije
- Je li matematika dobro utemeljena?
- 1900./1902.: Hilbertova 23 problema — drugi problem: Jesu li aksiomi aritmetike konzistentni?
- glavni predstavnik matematičkog formalizma: svi teoremi se mogu po pravilima deduktivne logike izvesti iz danog sustava aksioma
- 1920. Hilbertov program: matematika je skup dokazivih formula (dakle, svedena na čistu sintaksu), a uz nju postoji i metamatematika koja služi opravdanju same matematike i u kojoj se — u svrhu dokaza konzistentnosti danog sustava aksioma — koristi i semantika

Aksiomatizacija teorije skupova

Ernst Zermelo (1871.–1956.) i **Émile Borel** (1871.–1956.) su pokazali da je A1 ekvivalentan tvrdnji koju je koristio već Cantor: Svaki skup se može dobro urediti.

Aksiomatizacija teorije skupova

Ernst Zermelo (1871.–1956.) i **Émile Borel** (1871.–1956.) su pokazali da je AI ekvivalentan tvrdnji koju je koristio već Cantor: Svaki skup se može dobro urediti.

Bertrand Russell (1872.–1970.) s Alfred North Whiteheadom (1861.–1947.) izdao *Principia Mathematica* s ciljem svođenja čitave matematike na logiku, no ni to nije pomoglo. Rješenje je: aksiomatizacija.

Aksiomatizacija teorije skupova

Ernst Zermelo (1871.–1956.) i **Émile Borel** (1871.–1956.) su pokazali da je \aleph_1 ekvivalentan tvrdnji koju je koristio već Cantor: Svaki skup se može dobro urediti.

Bertrand Russell (1872.–1970.) s Alfred North Whiteheadom (1861.–1947.) izdao *Principia Mathematica* s ciljem svodenja čitave matematike na logiku, no ni to nije pomoglo. Rješenje je: aksiomatizacija.

1908. je Zermelo prvi pokušao aksiomatizirati teoriju skupova. Taj prvi sustav aksioma doradili su drugi matematičari sve dok 1922. nije dobiven danas uobičajeni sustav aksioma (poznat kao **Zermelo-Fraenkelovi aksiomi teorije skupova**).

Aksiomatizacija teorije skupova

Ernst Zermelo (1871.–1956.) i **Émile Borel** (1871.–1956.) su pokazali da je A1 ekvivalentan tvrdnji koju je koristio već Cantor: Svaki skup se može dobro urediti.

Bertrand Russell (1872.–1970.) s Alfred North Whiteheadom (1861.–1947.) izdao *Principia Mathematica* s ciljem svodenja čitave matematike na logiku, no ni to nije pomoglo. Rješenje je: aksiomatizacija.

1908. je Zermelo prvi pokušao aksiomatizirati teoriju skupova. Taj prvi sustav aksioma doradili su drugi matematičari sve dok 1922. nije dobiven danas uobičajeni sustav aksioma (poznat kao **Zermelo-Fraenkelovi aksiomi teorije skupova**).

Tom sustavu se danas u pravilu kao aksiom dodaje aksiom izbora za kojega je 1940. Kurt Gödel dokazao da se ne može opovrgnuti koristeći ostale aksiome teorije skupova, a 1963. je Paul Cohen pokazao da je aksiom izbora nezavisan od ostalih aksioma teorije

Kurt Gödel (1906.–1978.)

- 1929. u doktorskoj disertaciji dokazao teorem potpunosti: Fregeova pravila logičkog zaključivanja iz zadanih aksioma uvijek generiraju sve njihove logičke posljedice

Kurt Gödel (1906.–1978.)

- 1929. u doktorskoj disertaciji dokazao teorem potpunosti: Fregeova pravila logičkog zaključivanja iz zadanih aksioma uvijek generiraju sve njihove logičke posljedice
- Ali 1931. Gödelovi **teoremi nepotpunosti** raspršili su Hilbertov san:
- Prvi teorem nepotpunosti: Ako aksiomatski sustav sadrži bar Peanovu aritmetiku i konzistentan je, mora biti nepotpun (postoje teoremi koj se ne mogu ni dokazati ni opovrgnuti unutar tog sustava)
- Drugi teorem nepotpunosti: Konzistentnost aksiomatskog sustava se ne može dokazati unutar njega.

Kurt Gödel (1906.–1978.)

- 1929. u doktorskoj disertaciji dokazao teorem potpunosti: Fregeova pravila logičkog zaključivanja iz zadanih aksioma uvijek generiraju sve njihove logičke posljedice
- Ali 1931. Gödelovi **teoremi nepotpunosti** raspršili su Hilbertov san:
- Prvi teorem nepotpunosti: Ako aksiomatski sustav sadrži bar Peanovu aritmetiku i konzistentan je, mora biti nepotpun (postoje teoremi koj se ne mogu ni dokazati ni opovrgnuti unutar tog sustava)
- Drugi teorem nepotpunosti: Konzistentnost aksiomatskog sustava se ne može dokazati unutar njega.
- Za kraj napomenimo da i hipotezu kontinuuma nije moguće ni dokazati ni opovrgnuti koristeći Zermelo-Fraenkelov sustav aksioma (bilo sa bilo bez aksioma izbora).

„Iz raja kojeg nam je stvorio Cantor neće nas nitko moći istjerati”
(D. Hilbert)

„Bit matematike je u njezinoj slobodi” (G. Cantor)



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)