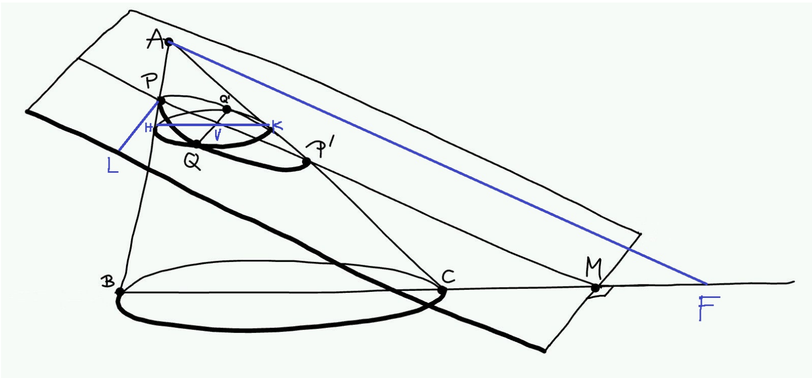
Povijest matematike

riješena pismena provjera znanja 7. srpnja 2021.

F. M. Brückler

1. (5 bodova) Koristeći donju skicu izložite kako je Apolonije iz Perge opisao tri tipa konika.



Ucrtana tetiva $\overline{QQ'}$ je proizvoljna tetiva konike koja je okomita na PM (M je probodište pravca na kojem leži promjer osnovice $\overline{BC}$ s ravninom kojom je presječen stožac). Apolonije je dokazao da je za svaki presjek stošca ravninom njeno polovište V točno njeno sjecište s pravcem PM.

Dalje se biraju $H \in AB$ i $K \in AC$ tako da je $V \in HK \| BC$. Tada je HK promjer kružnice paralelne osnovici na kojoj leže i Q i Q'. Stoga je po Talesovom poučku $\triangle HQK$ pravokutan s pravim kutom kod Q i visinom $\overline{QV}$ pa je $|QV|^2 = |HV| \cdot |KV|$. Upravo usporedbom s površinom kvadrata nad $\overline{QV}$ Apolonije izvodi razliku triju tipova konika.

Sad treba u ravnini presjeka povući paralelu s QQ' (tj. okomicu na PM) kroz točku P. Na toj okomici Apolonije označava točku L koja zadovoljava određeni razmjer (jedan tip razmjera zadaje za elipsu i hiperbolu, tj. za slučaj kad postoje i P i P', a drugi tip za parabolu, tj. slučaj kad postoji P, ali ne postoji P'). U slučaju elipse i hiperbole treba ucrtati i paralelu s pravcem PM kroz točku A, koja će ravninu osnovice (točnije, pravac BC) presječi u točki F; u slučaju parabole je $AC \| PM$ (tj. kod parabole je $F = C$).

Nadalje, $\triangle PHV$ je sličan $\triangle ABF$ (kod elipse i hiperbole) odnosno $\triangle ABC$ (za slučaj parabole) pa je $|HV| : |PV| = |BF| : |AF|$ odnosno $|HV| : |PV| = |BC| : |AC|$.

Još jedan razmjer Apolonije izvodi iz sličnosti $\triangle P'KV$ s $\triangle ACF$ za elipsu i hiperbolu, a za parabolu iz činjenice da paralelni pravci PM i AC sijeku krakove kuta $\angle ABC$.

Kombinirajući sve navedene razmjere Apolonije naposlijetku pokazuje da je je površina kvadrata nad $\overline{QV}$ za svaki Q na elipsi, paraboli ili hiperboli manja, jednaka odnosno veća od površine pravokutnika sa stranicama $\overline{PV}$ i $\overline{PL}$.

2. (5 bodova) Barrowljevom ili Newtonovom metodom (navedite koju od njih koristite!) odredite jednadžbu tangente na krivulju

$$y^2 + x = x^3 + 1$$

u njenoj točci $(1,1)$.

- **Barrowljeva metoda**: Točku $A = (x, y)$ na krivulji zamjenjujemo s $(x - e, y - a)$ i tražimo $e : a$.

  $$y^2 - 2ay + a^2 + x - e = x^3 - 3ex^2 + 3e^2x - e^3 + 1 \Rightarrow$$

  (točka A je na krivulji)

  $$-2ay + a^2 - e = -3ex^2 + 3e^2x - e^3 \Rightarrow$$

  (zanemaruju se članovi u kojima su potencije od e i a veće od 1)

  $-2ay - e = -3ex^2 \Rightarrow e(3x^2 - 1) = 2ay \Rightarrow e : a = 2y : (3x^2 - 1) = \{x = y = 1\} = 1.$

  Naposlijetku je kod Barrowa $e : a = |TM| : y$, gdje je T sjecište tangente s osi apscisa, a M točka $(x, 0)$, dakle kod nas $M = (1, 0)$, pa je $|TM| = y \cdot \frac{e}{a} = 1 \cdot 1 = 1$, dakle je $T = (0, 0)$ pa je tangenta pravac kroz $T = (0, 0)$ i $A = (1, 1)$, odnosno pravac s jednadžbom $y = x$.

- **Newtonova metoda**: Točku (x, y) na krivulji zamjenjujemo s $(x + o\dot{x}, y + o\dot{y})$ i tražimo $\dot{y} : \dot{x}$.

  $$y^2 + 2o\dot{y}y + o^2\dot{y}^2 + x + o\dot{x} = x^3 + 3o\dot{x}x^2 + 3o^2\dot{x}^2x + o^3\dot{x}^3 + 1 \Rightarrow$$

  (točka (x, y) je na krivulji)

  $$2o\dot{y}y + o^2\dot{y}^2 + o\dot{x} = 3o\dot{x}x^2 + 3o^2\dot{x}^2x + o^3\dot{x}^3 / : o \neq 0 \Rightarrow$$

  $$2\dot{y}y + o\dot{y}^2 + \dot{x} = 3\dot{x}x^2 + 3o\dot{x}^2x + o^2\dot{x}^3 / o = 0 \Rightarrow$$

  $$2\dot{y}y + \dot{x} = 3\dot{x}x^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 1}{2y},$$

  pa je kad uvrstimo točku $(1, 1)$ koeficijent smjera tangente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1$, odnosno tangenta je pravac kroz $(1, 1)$ s koeficijentom smjera 1: $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$, tj. $y = x$.

Drugi kratki test

Oznaka ⊠ stavljena je uz neistinitu tvrdnju, a ✓ uz istinitu.

1. Napierov logaritam bismo danas zvali logaritmom s bazom $1/e$. ⊠
2. Johann Heinrich Lambert je prvi dokazao transcendentnost broja π. ⊠
3. Jacob Bernoulli je prvi dokazao da se s porastom broja izvođenja slučajnog pokusa povećava vjerojatnost dobivanja željenog rezultata. ⊠
4. Jedan od autora naziva 'normalna' razdioba bio je Francis Galton. ✓
5. Leonhard Euler je prvi uočio da brojevi oblika $2^{2^n}+1$ $(n \in \mathbb{N})$ ne moraju biti prosti. ✓
6. Naziv 'vektor' prvi je koristio August Ferdinand Möbius. ⊠
7. René Descartes i Girard Desargues su bili suvremenici. ✓
8. Poicaréova hipoteza je najpoznatiji otvoreni problem topologije danas. ⊠
9. Pojam funkcije prvi je koristio Johann Bernoulli. ✓
10. Georg Cantor je dokazao da je skup realnih brojeva prebrojiv. ⊠

Povijest matematike

riješena pismena provjera znanja 7. srpnja 2021.

F. M. Brückler

1. (5 bodova) Na dvije decimale točno (tj. na točnost od jedne stotinke) izračunajte $\sqrt{2021}$.

(a) Babilonskom (Heronovom) metodom. Prvo uočimo da je $40^2 = 1600 < 2021 < 50^2 = 2500$, dakle je $\sqrt{2021}$ između 40 i 50. Uzmimo 40 kao početnu aproksimaciju za $\sqrt{2021}$ pa imamo redom:

Korak	Prethodna aproksimacija$a$	Nova aproksimacija$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2021}{a}\right)$
1	40	45,2625
2	45,2625	44,9565745 ...
3	44,9565745 ...	44,9555336 ...
(4	44,9555336 ...	44,95553359 ...)

Prve dvije decimale su se ponovile već u trećem koraku (tad bismo zaključili $\sqrt{2021} \approx 44{,}95$ i to je sasvim prihvatljivo), a četvrti potvrđuje da bi zaokruženo bilo $\sqrt{2021} \approx 44{,}96$.

(b) Staroindijskom metodom. Isto krećemo od prve procjene iznosa $\alpha \le \sqrt{N}$, uzmimo opet $\alpha = 40$. Tražimo $x = \sqrt{2021}$.

Zbog $40 < \sqrt{2021}$ znamo da je $x = 40 + y$, $y > 0$, te

$$(40+y)^2 = 2021 \Rightarrow 40^2+80y+y^2 = 2021 \Rightarrow y(80+y) = 421 \Rightarrow y = \frac{421}{80+y} \approx \frac{421}{80} = 5{,}2625$$

pa uzmemo $y = 5$ i provjerimo je li $(\alpha + y)^2 = 45^2$ manje od 2021 (nije manje pa se y smanji za 1: $y = 4$, trenutna aproksimacija je $40 + 4 = 44$).

Zbog $44 < \sqrt{2021}$ znamo da je $x = 44 + y$, $y > 0$, te

$$(44+y)^2 = 2021 \Rightarrow 44^2+88y+y^2 = 2021 \Rightarrow y(88+y) = 85 \Rightarrow y = \frac{85}{88+y} \approx \frac{85}{88} = 0{,}9659\ldots$$

pa uzmemo $y = 0{,}9$ i provjerimo je li $(\alpha + y)^2 = 44{,}9^2$ manje od 2021 (je), dakle trenutna aprokximacija je $44 + 0{,}9 = 44{,}9$, $44{,}9 < \sqrt{2021}$).

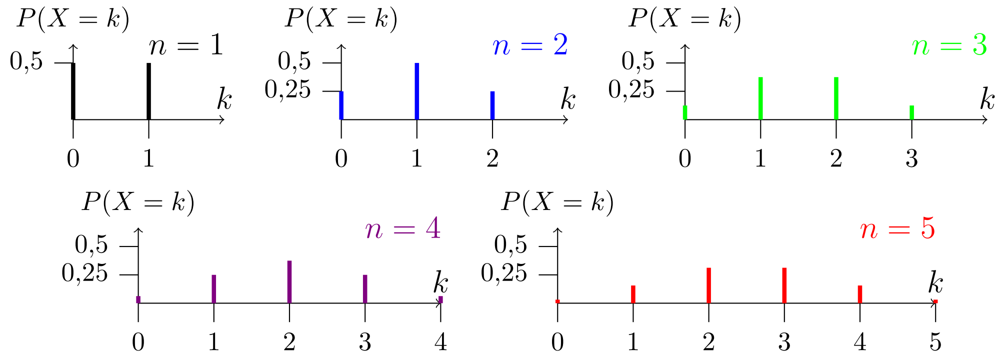
Zbog $44{,}9 < \sqrt{2021}$ znamo da je $x = 44{,}9 + y$, $y > 0$, te $(44{,}9 + y)^2 = 2021$ povlači

$$44{,}9^2 + 89{,}8y + y^2 = 2021 \Rightarrow y(89{,}8 + y) = 4{,}99 \Rightarrow y = \frac{4{,}99}{89{,}8+y} \approx \frac{4{,}99}{89{,}8} = 0{,}0555\ldots\ldots$$

pa uzmemo $y = 0{,}05$ i provjerimo je li $(\alpha + y)^2 = 44{,}95^2$ manje od 2021 (je), dakle trenutna aprokximacija je $44{,}9 + 0{,}05 = 44{,}95$, $44{,}95 < \sqrt{2021}$). Indijac bi ovdje stao, ali ako napravimo još jedan korak vidili bismo da je $\sqrt{2021} \approx 44{,}955\ldots 44{,}96$.

2. (5 bodova) Grafički ilustrirajte i opišite kako je De Moivre došao do zaključka da za velike brojeve međusobno nezavisnih Bernoullijevih pokusa, u kojima su vjerojatnosti uspjeha i neuspjeha jednake, binomna razdioba teži prema normalnoj.

De Moivre je prvo uočio da kad crtamo grafove vjerojatnosti $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (jer smo uzeli $p = q = \frac{1}{2}$) za različite n dobivamo grafove koji posjeduju vertikalnu osnu simetriju s maksimumom na sredini (za $k = n/2$ kod parnih n, odnosno za $k = (n \pm 1)/2$ kod neparnih n).



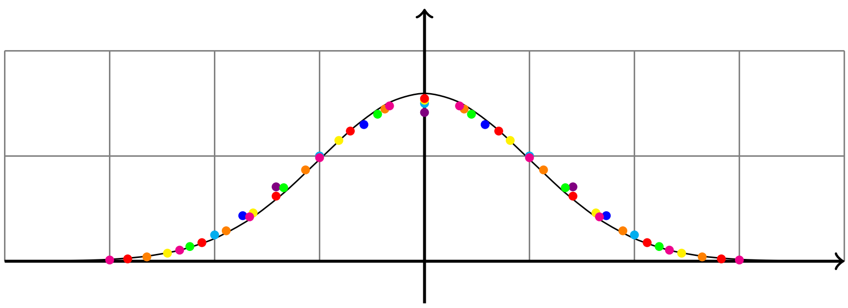
Stoga je De Moivre, da bi unificirao pogled na njih, pomakao os ordinata za te grafove tako da se ona nalazi točno na osi simetrije tih grafova, tj. umjesto točaka $\left(k, \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)$, $k = 0, \ldots, n$, za sve n je gledao točke

$$\left(k - \frac{n}{2}, \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

i tako dobio grafove parnih funkcija. Nadalje je uočio da su iznosi maksimuma i širine grafova različite, ali postoji isti trend, te je prešao na točke

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(k - \frac{n}{2}\right), \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

nakon čega je tendencija da za velike n binomna razdioba teži normalnoj postala očigledna:



Drugi kratki test

Oznaka ☒ stavljena je uz neistinitu tvrdnju, a ✓ uz istinitu.

1. Keplerova hipoteza odnosi se na Arhimedova tijela. ☒
2. Josipov problem naziva se po sv. Josipu. ☒
3. Naziv 'zakon velikih brojeva' prvi je koristio Siméon Denis Poisson. ✓
4. Prve postavke računa pogrešaka naveo je Galileo Galilei. ✓
5. Leonhard Euler i Pierre de Fermat su bili suvremenici. ☒
6. Niels Henrik Abel je dokazao da nikoja jednadžba stupnja 5 nije rješiva u radikalima. ☒
7. Iako je utemeljena još u 17. st., projektivna geometrija se nije ozbiljnije razvijala do početka 19. st. ✓
8. Topologija je utemeljena u 18. st. ✓
9. Prvo tijelo ograničenog volumena i neograničenog oplošja opisao je Evangelista Torricelli. ✓
10. Hipoteza kontinuuma je tvrdnja da je kardinalni broj skupa $\mathbb{R}$ najveći kardinalni broj. ☒