Kosa crnih rupa

Suzana Bedić

PMF, Bijenička 32

Siječanj, 2016.

mentor: doc. dr. sc. Ivica Smolić

PREGLED

- teoremi jedinstvenosti
- definicija kose
- Bekensteinovi dokazi
- zaobilaženje dokaza, moguće kose
- teoremi o dužini kose
- eksperiment
- zaključak

„rješenja" = rješenja Einsteinove jednadžbe

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

koju dobivamo varijacijom djelovanja

$$S = S_H + S_M = \int R\sqrt{-g}\, d^4x + \int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}\, d^4x$$

po metričkom tenzoru $g^{\mu\nu}$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

$R_{\mu\nu}$- Riccijev tenzor,
R - skalar zakrivljenosti,
$T_{\mu\nu}$- tenzor energije i impulsa,
g - determinanta metrike,
S_H - Hilbertova akcija,
S_M - djelovanje materije,
ϕ_k- skup svih prisutnih polja

- crne rupe u konačnom stanju
- $G = c = 1$
- $\mu, \nu, \alpha, \beta, \epsilon \{0, 1, 2, 3\}$
- $i, j, k \epsilon \{1, 2, 3\}$

OSNOVNE PRETPOSTAVKE

- crna rupa: rezultat gravitacijskog kolapsa
- regularnost horizonta crne rupe $\mathcal{H}$ i njene okoline $\mathcal{E}$
- vakuum / elektrovakuum u $\mathcal{E} \to$ nema vanjskih izvora polja
- stacionarnost / statičnost

Teoremi jedinstvenosti

Teorem 1. Među svim statičnim, asimptotski ravnim vakuumskim (elektrovakuumskim) prostorvremenima sa zatvorenim, jednostruko povezanim ekvipotencijalnim površinama $g_{00} = \mathit{konst}.$, Schwarzschildovo (Reissner-Nordströmovu) rješenje je jedino koje ima nesingularnu površinu beskonačnog crvenog pomaka $g_{00} = 0$. [*W. Israel, 1967.-1968.g.*]

Teorem 2. Moguća vakuumska rješenja za aksijalno-simetričnu okolinu crne rupe čine diskretan skup kontinuiranih obitelji, od kojih svaka ovisi barem o jednom, a najviše o dva nezavisna parametra. [*B. Carter, 1970.g.*]
$\rightarrow$ Kerrove crne rupe [*D. C. Robinson, 1975.g.*]

Pretpostavka: Masa M, naboj Q i zamah J potpuno opisuju crnu rupu u konačnom stanju $\Rightarrow$ „no-hair conjecture" (NHC) [*Wheeler, Ruffini*]

Definicija kose

MULTIPOLNI RAZVOJ

...U ELEKTROSTATICI:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int \left(r'\right)^n P_n\left(\cos\theta'\right)\rho(\mathbf{r}')d\tau'$$

$\rho(\mathbf{r}')$ - proizvoljna distribucija naboja
- razvoj potencijala po multipolnim momentima
- Gaussov zakon: integral po asimptotskoj beskonačnosti daje ukupan naboj

! da polje brže pada integral bi dao nulu

...U GRAVITACIJI:

. . .

- proizvoljna raspodjela materije
- multipolni razvoj po momentima mase i struje
- razvoj potpuno određen sa dva parametra $\rightarrow$ definirani integralom po beskonačnosti (*"Gauss"*)
- pr. Kerrova metrika: M i J

KOSA= svaka dodatna informacija potrebna za potpun opis prostorvremena (primarna, sekundarna)

(M, J i Q su kose jer su to naboji definirani u ∞, ali se u NHC-u obično kosom podrazumijeva sve osim toga)

BEKENSTEINOVI DOKAZI

Želimo provjeriti mogućnost postojanja polja u okolini statične crne rupe.

$\diamond$ statičnost: $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, $g_{0i} = 0$ (x^0 je vremenska koordinata)

$\diamond$ pretpostavka: horizont $\mathcal{H}$ je zatvorena svjetlosna hiperpovršina

Djelovanje:

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}\, d^4x$$

Varijacijskim principom dobivamo jednadžbu gibanja polja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu} = 0 \qquad / \cdot \phi_k \sqrt{-g}\, d^4x$$

Integriramo po okolini crne rupe $\mathcal{E}$:

$$\int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \phi_k \sqrt{-g}\, d^4x - \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu} \phi_k \sqrt{-g}\, d^4x = 0 \qquad (1)$$

Drugi član:

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \sqrt{-g} \phi_k \right)_{,\mu} d^4x - \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \sqrt{-g} d^4x$$

$$= \int\limits_{\mathcal{E}} \sqrt{-g} \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \phi_k \right) d^4x - \int\limits_{\varepsilon} \phi_{k,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \sqrt{-g} d^4x$$

$$= \int\limits_{\partial \mathcal{E}} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \phi_k - \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \sqrt{-g} d^4x,$$

gdje smo koristili Stokesov teorem:

$$\int\limits_V \nabla_\mu V^\mu \sqrt{|g|} d^n x = \int\limits_{\partial V} n_\mu V^\mu \sqrt{|\gamma|} d^{n-1} x,$$

∂V rub volumena V, a γ inducirana metrika na njemu
$d\sigma_\mu$ - element hiperpovršine koja je rub okoline $\partial \mathcal{E}$
$\partial \mathcal{E}$ se sastoji od $\mathcal{H}$ i beskonačnosti

Definiramo

$$b^\mu \equiv \sum_k \phi_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}$$

i rastavljamo integral po rubu na $\mathcal{H}$ i ∞. (1) postaje

$$-\int_{\mathcal{H}} b^\mu d\sigma_\mu - \int_{\infty} b^\mu d\sigma_\mu$$
$$+\sum_k \left(\int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \phi_k \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \sqrt{-g} d^4x \right) = 0. \quad (2)$$

Ideja: pokazati da prva dva člana iščezavaju, a da je izraz u zagradi jednak nuli samo ako je $\phi_k = 0$ svugdje u $\mathcal{E}$.

Sada koristimo pretpostavke da je $\mathcal{H}$ svjetlosna površina i da se radi o statičnom slučaju;

$$g_{\mu\nu} d\sigma^\mu d\sigma^\nu \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0 \Rightarrow g_{ij} d\sigma^i d\sigma^j \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0.$$

Koristeći Schwarz-Cauchy-Bunyakovsky (SCB) nejednakost imamo:

$$\left(g_{ij} d\sigma^i b^j\right)^2 \leq \left(g_{ij} d\sigma^i d\sigma^j\right) \left(g_{ij} b^i b^j\right) \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0,$$

odakle slijedi

$$0 \stackrel{\mathcal{H}}{=} g_{ij} d\sigma^i b^j \stackrel{\mathcal{H}}{=} g_{\mu\nu} d\sigma^\mu b^\nu.$$

Dakle, prvi član u (2)

$$-\int_{\mathcal{H}} b^\mu d\sigma_\mu = 0$$

Pretpostavili smo: $g_{ij} b^i b^j < \infty$ na $\mathcal{H}$ $\rightarrow$dokazujemo kasnije u konkretnom slučaju, ovisno o polju.

Asimptotsko ponašanje polja u limesu $r \to \infty$

- Za bezmasena polja vrijedi $\phi \propto 1/r \;\Rightarrow$

$$b^\mu \propto \phi\phi^{,\mu} \propto \frac{1}{r^3},$$

- za masivna vrijedi $\phi \propto \frac{e^{-mr}}{r} \;\Rightarrow$

$$b^\mu \propto e^{-mr}.$$

U oba slučaja b^μ trne u prostornoj beskonačnosti.

Vremenska beskonačnost: $d\sigma_i = 0$

$\Longrightarrow$

$$-\int_\infty b^\mu d\sigma_\mu = 0$$

ako dokažemo $b^0 = 0$ za konkretno polje koje promatramo.

Jednadžba (2) postaje

$$\sum_k \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \phi_k + \phi_{k,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}} \right) \sqrt{-g}\, d^4x = 0 \tag{3}$$

REALNO SKALARNO POLJE ψ

$\diamond$ neutralno, minimalno vezanje za gravitaciju
Gustoća lagranžijana je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + V(\psi)\right),$$

Potencijal polja $V = m^2\psi^2$, m - masa polja

$$b^\mu \equiv \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} = -\psi\psi^\mu$$

Treba pokazati da je $b^2 = \psi^2\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}$ regularno na $\mathcal{H}$.
Tenzor energije i impulsa skalarnog polja

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + V\right).$$

Izračunamo skalare $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$, T^2, $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$

Izrazimo

$$\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} = \sqrt{\frac{4}{3}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^2}$$

$$m^2\psi^2 = -\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^2}, \tag{4}$$

$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu},\ T^2,\ T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ su fizikalni skalari, dakle, regularni

$\Rightarrow b^2 = \psi^2\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} < \infty$ na $\mathcal{H}$

Također, zbog statičnosti imamo $\psi_{,0} = 0 \ \Rightarrow b^0 = -\psi\psi^{,0} = 0$.

Dokazali smo: $\int\limits_{\partial\mathcal{E}} b^{\mu} d\sigma_{\mu} = 0$ pa možemo koristiti (3)

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\psi + \psi_{,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \right) \sqrt{-g} d^4 x$$
$$= \int\limits_{\mathcal{E}} \left(g_{\mu\nu}\psi^{,\mu}\psi^{,\nu} + m^2\psi^2 \right) \sqrt{-g} d^4 x$$
$$= \int\limits_{\mathcal{E}} \left(g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + m^2\psi^2 \right) \sqrt{-g} d^4 x = 0$$

g_{ij} je pozitivno definitna matrica u $\mathcal{E}$ i jedini način da integral iščezava je:

$$\psi \overset{\mathcal{E}}{=} 0$$

(Ako je dl prostorna udaljenost između dviju točaka odvojenih koordinatnim intervalom dx^i, ona je dobro definirana s $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Očito g_{ij} je pozitivno definitna matrica u $\mathcal{E}$.)

U slučaju $m = 0$ jednadžba (4)

$$m^2\psi^2 = -\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^2}$$

više ne osigurava omeđenost b^2 na $\mathcal{H}$.
Problem rješavamo fizikalnim argumentom;
ako stavimo rubni uvjet takav da ψ iščezava asimptotski, možemo interpretirati ψ^2 kao invarijantnu gustoću vjerojatnosti, koja je kao takva fizikalan skalar, regularna na $\mathcal{H}$.
Dobivamo isti zaključak kao u slučaju masivnog polja, a to je da polje iščezava u $\mathcal{E}$.

KOMPLEKSNO SKALARNO POLJE ψ

$\diamond$ električki nabijeno, minimalno vezano za gravitaciju i elektromagnetsko(EM) polje A_μ, $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$

Gustoća lagranžijana dana je s

$$\mathcal{L} = -\left(d^\alpha d^*_\alpha + m^2 \psi\psi^*\right) - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

gdje je e naboj polja i

$$d_\alpha = \psi_{,\alpha} - ieA_\alpha\psi = D_\alpha\psi,$$

a D_α je kovarijantna derivacija.
Tenzor energije i impulsa je

$$T_{\mu\nu} = d_\mu d^*_\nu + d^*_\mu d_\nu - \left(d^\alpha d^*_\alpha + m^2\psi\psi^*\right).$$

Invarijantnost teorije na baždarnu transformaciju

$$\psi \to \psi e^{ie\Lambda}, \quad A_\mu \to A_\mu + \Lambda_{,\mu} \tag{5}$$

gdje jeΛ proizvoljna realna skalarna funkcija, vodi na postojanje očuvane električne struje

$$j_\mu = ie\left(\psi d_\mu^* - \psi^* d_\mu\right). \tag{6}$$

Zbog statičnosti možemo odabrati baždarenje u kojem je $A_i = 0$ i $A_{0,0} = 0$. Također vrijedi $j^i = 0$ i

$$j^0_{,0} = 0 = g^{00} ie\left(\psi d_0^* - \psi^* d_0\right)_{,0}. \tag{7}$$

Izjednačavajući realni i imaginarni dio izraza (7) s nula dobivamo:

$$\Re(7) = 0 \;\Rightarrow\; \psi\psi^*_{,00} = \psi^*\psi_{,00}$$

Pretpostavimo

$$\psi = const \cdot e^{i\phi(x^\mu)}$$

Dobivamo $\phi_{,00} = 0$, tj. $\phi = \omega x^0 + \varphi$, gdje su ω i φ realne konstante.

$$\Im(7) = (\psi\psi^*)_{,0} = 0$$

$\underline{\diamond}$ slijedi da je $\psi\psi^*$ neovisno o x^0.

Dakle, odabirom $\Lambda = -\frac{(\omega x^0 + \varphi)}{e}$ možemo dobiti da je ψ realno i vremenski neovisno polje, bez mjenjanja uvjeta na A_μ.

Za

$$b^\mu = \sum_{\psi_k = \psi, \psi*} \psi_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{k,\mu}}$$

računamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} = -\psi^{*,\mu} - ieA^\mu \psi^* \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,\mu}} = -\psi^{,\mu} - ieA^\mu \psi, \tag{9}$$

što daje

$$b^\mu = -\left(\psi d^{\mu *} + \psi^* d^\mu\right)$$

Slijedi

$$b^0 = -\left(\psi\psi^{*,0} + ieA^0\psi\psi^* + \psi^*\psi^{,0} - ieA^0\psi^*\psi\right) = 0,$$

$$b^i = \left(\psi\psi^{*,i} + \psi^*\psi^{,i}\right) = -\left(\psi\psi^*\right)_{,i},$$

što je realna veličina.

Kako bi pokazali da je $b^\mu b_\mu$ omeđeno na horizontu računamo:

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 2|d^\mu d_\mu|^2 + \tfrac{3}{4}Td^\mu d^*_\mu + \tfrac{T^2}{16} + \tfrac{1}{2}\left(d^\mu d^*_\mu\right)^2$$

$$b^\mu b_\mu = \psi\psi^*\left(d^\mu d_\mu + d^{\mu *}d^*_\mu + 2d^\mu d^*_\mu\right)$$

$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ je regularno na $\mathcal{H} \Rightarrow$ $d^\mu d_\mu$ i $d^\mu d^*_\mu$ isto moraju biti
Iz toga i regularnosti skalara T vidimo da i $\psi\psi^*$ mora biti regularno iz čega slijedi da je i $b^\mu b_\mu$ omeđeno na $\mathcal{H}$.

Istim zaključivanjem kao prije dobivamo

$$\int\limits_{\partial\mathcal{E}} b^{\mu} d\sigma_{\mu} = 0$$

$\rightarrow$ možemo koristiti jednadžbu (3)

Računamo

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = ieA^{\mu}\psi^{*}_{,\mu} - e^{2}A^{2}\psi^{*} - m^{2}\psi^{*}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{*}} = -ieA_{\mu}\psi_{,\mu} - e^{2}A^{2}\psi - m^{2}\psi,$$

(3) postaje:

$$\int d^{4}x\sqrt{-g}\left\{-2e^{2}A^{2}\psi^{2} - 2m^{2}\psi^{2} - 2\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} - 2ieA^{\mu}\psi\psi^{*}_{,\mu}\right\} = 0$$

Koristeći, otprije poznato, $A^i = 0$, $\psi_{,0} = \psi^*_{,0} = 0$ dobivamo:

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left\{ g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + \left[m^2 + g_{00}\left(eA^0\right)^2 \right] \psi^2 \right\} \sqrt{-g}\, d^4x = 0. \qquad (10)$$

Asimptotska ravnost: $g_{00} = -1$ za $r \to \infty$, a predznak mijenja na $\mathcal{H} \Rightarrow$

$g_{00} \leq 0$ u $\mathcal{E}$, g_{ij} je pozitivno definitna u $\mathcal{E}$

Ako $A^0 = 0 \implies$

$$\psi \overset{\mathcal{E}}{=} 0$$

Ako $A^0 \neq 0$ izraz pod integralom nije pozitivno definitan i ne možemo to zaključiti.

Sad ćemo pokazati: u našem baždarenju za $\psi \neq 0$ mora biti $A^0 = 0$.

Vratimo se očuvanoj struji (6):

$$j^0 = -2e^2 A^0 \psi^2. \tag{11}$$

ψ^2 -gustoća vjerojatnosti mezona invarijantne gustoće naboja

$$\sqrt{-j^\mu j_\mu}$$

Specifični naboj polja (po mezonu), što je fizikalni skalar, dakle omeđen, je:

$$\frac{\sqrt{-j^\mu j_\mu}}{\psi^2} = \frac{\sqrt{-g_{00} j^0 j^0}}{\psi^2} = \sqrt{-g_{00}\left(2e^2 A^0\right)^2}.$$

Zaključujemo da je $g_{00}\left(A^0\right)^2$ omeđeno.

Dalje računamo b^μ za EM polje:

$$b^\mu_{EM} = A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} = \frac{-1}{4\pi} A_\nu F^{\mu\nu} \tag{12}$$

iz čega je lako pokazati da vrijedi $b^0_{EM} = 0$.

Ista razmatranja kao prije daju $b^\mu b_\mu$ je regularno na $\mathcal{H}$.

Jednadžba (3) za EM polje je

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} A_\mu + A_{\mu,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} \right) \sqrt{-g} d^4 x = 0. \tag{13}$$

Uvrštavamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -2e^2 \psi^2 A^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}$$

$$A_i = 0, \qquad A_{0,0} = 0$$

Slijedi

$$\int\limits_{\mathcal{E}} g_{00} \left[\frac{1}{4\pi} g_{ij} F^{0i} F^{0j} + 2 \left(eA^0 \right)^2 \psi^2 \right] \sqrt{-g} d^4 x = 0.$$

Ako $g_{00} \neq 0$, što je uvjet da raniji izraz (10) nije pozitivno definitan, mora biti $A^0 \stackrel{\mathcal{E}}{=} 0$.

Dokazali smo

$$\psi \stackrel{\mathcal{E}}{=} 0,$$

tj. ne može postojati skalarno masivno nabijeno polje u okolini statične, sferno-simetrične crne rupe, minimalno vezano za gravitaciju i EM polje.
Iz invarijantnosti na baždarnu transformaciju (5) slijedi da rezultat vrijedi svim baždarenjima.

U slučaju kada je ψ kompleksno, neutralno skalarno polje postupak je isti kao za nabijeno, s minimalnim vezanjem polja ψ za izmišljeno polje A_μ.
To polje neće doprinositi fizikalnim veličinama ($T^{\mu\nu}$ tenzoru) zbog baždarne invarijantnosti teorije, a vodi na isti rezultat.

VEKTORSKO POLJE B_μ

$\diamond$ neutralno, realno, mase $m > 0$, minimalno vezano za gravitaciju

Pripadni tenzor polja je

$$H_{\mu\nu} = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu},$$

a gustoća lagranžijana

$$\mathcal{L} = -\frac{H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}}{16\pi} - m^2 \frac{B^\mu B_\mu}{8\pi}.$$

Jednadžba gibanja je Proca jednadžba u zakrivljenom prostoru:

$$H^{\mu\nu}{}_{;\nu} + m^2 B^\mu = 0. \tag{14}$$

$H^{\mu\nu}$ je tenzor potpuno analogan $F^{\mu\nu}$, ali B^μ nije baždarno invarijantan kao A^μ, nego je s (14) potpuno određen iz $H^{\mu\nu}$, što znači da je fizikalno polje.

Računamo

$$b^{\mu} \equiv B_{\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{\nu,\mu}} = -\frac{H^{\mu\nu}B_{\nu}}{4\pi}$$

U statičnom slučaju vrijedi $b^0 = 0$ i $b_{\mu}b^{\mu}$ fizikalan skalar.
Jednadbi (3) odgovara

$$\int\limits_{\mathcal{E}} g_{00}\left[g_{ij}H^{0i}H^{0j} + m^2\left(B^0\right)^2\right]\sqrt{-g}\,d^4x = 0. \qquad (15)$$

g_{ij} je pozitivno definitna matrica.
Zaključujemo: H^{0i} i B^0 iščezavaju svugdje u $\mathcal{E}$.

Ako je B^{μ} mase $m = 0$, postoji baždarna invarijantnost, B^{μ} nije fizikalno polje; $b_{\mu}b^{\mu}$ nije nužno regularno.
Sferno simetrična statična crna rupa sa bezmasenim neutralnim vektorskim poljem je nabijena Reissner-Nordströmova crna rupa.
Za kompleksno nabijeno vektorsko polje možemo, postupkom kao za skalarno polje dobivamo isti rezultat

o sada smo pokazali da *statična, sferno simetrična crna rupa ne može imati vanjsko (masivno i bezmaseno) skalarno i (masivno) vektorsko polje, nabijeno, ni neutralno, minimalno vezano za gravitaciju.*

Sad ćemo gledati stacionaran slučaj.

ROTIRAJUĆA CRNA RUPA

$\underline{\diamond}$ stacionarnost: $g_{\mu\nu,0} = 0$
$\underline{\diamond}$ skalarno mezonsko polje, $m > 0$
Po Hawkingovom teoremu: okolina je osnosimetrična, a horizont $\mathcal{H}$ homeomorfan sferi pa metriku možemo pisati u obliku:

$$ds^2 = W\left(d\rho^2 + dz^2\right) + Adt^2 + Bd\varphi^2 + Cdtd\varphi, \qquad (16)$$

gdje su W, A, B, C neovisni o t i kutu simetrije φ .

$\underline{\diamond}$ Zahtjev za *kauzalnošću* u okolini nam daje $W \geq 0$ i W može iščezavati samo u izoliranim točkama $\rho - z$ ravnine.
$\underline{\diamond}$ $\mathcal{H}$ je, nesingularna svjetlosna hiperpovršina normale n_μ.
$\underline{\diamond}$ Zbog simetrija vrijedi $n_t = n_\varphi = 0$;

$$n_\mu n^\mu = 0 = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{\rho\rho} n_\rho n_\rho + g^{zz} n_z n_z$$

Dobivamo:

$$W^{-1}\left(d\rho^2 + dz^2\right) \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0. \qquad (17)$$

Klein-Gordonova jednadžba:

$$\psi_{,\mu}{}^{;\mu} - m^2\psi = 0$$

Iz simetrija ($\psi_{,t} = \psi_{,\varphi} = 0$) slijedi:

$$\psi_{,\rho}{}^{;\rho} + \psi_{,z}{}^{;z} - m^2\psi = 0.$$

Množimo s $\psi\sqrt{-g}d^4x$ i integriramo po $\mathcal{E}$:

$$\int_{\mathcal{E}} \left[\left(W^{-1}\psi_{,\rho}\sqrt{-g}\right)_{,\rho}\psi + \left(W^{-1}\psi_{,z}\sqrt{-g}\right)_{,z}\psi - m^2\psi^2\sqrt{-g} \right] d^4x = 0$$

Sređivanjem prva dva člana i korištenjem Stokesovog teorema dobivamo

$$\int\limits_{\partial\mathcal{E}} W^{-1}\psi\left(\psi_{,\rho}n_\rho + \psi_{,z}n_z\right)d\sigma$$

$$= \int\limits_{\mathcal{E}} \left[\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)W^{-1} + m^2\psi^2\right]\sqrt{-g}\,d^4x \qquad (18)$$

n_μ - normala na rub okoline $\partial\mathcal{E}$ ($\mathcal{H}$ i ∞)
$n_\mu d\sigma$ - vektorski element 3D hiperpovršine $\partial\mathcal{E}$

Integral po ∞ iščezava, kao i prije, zbog asimptotskog ponašanja polja.
SCB nejednakost nam daje

$$\left[W^{-1}\psi\left(\psi_{,\rho}n_\rho + \psi_{,z}n_z\right)\right]^2 \leq W^{-2}\psi^2\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)\left(n_\rho^2 + n_z^2\right) \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0.$$

$\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)\psi^2 W^{-1}$ možemo izraziti preko $T,\ T^2,\ T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$
$d\sigma$ je nesingularan $\Rightarrow \quad \int\limits_{\partial\mathcal{E}} = 0$

Dobivamo

$$\int_{\mathcal{E}} \left[\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right) W^{-1} + m^2\psi^2\right] \sqrt{-g}\, d^4x = 0$$

Zbog početnih uvjeta na W slijedi

$$\psi \overset{\mathcal{E}}{=} 0.$$

Ključno u dosadašnjim dokazima je $V' \geq 0$.
Za realno skalarno polje smo imali

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + V(\psi)\right),$$

došli do

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + V'\psi\right)\sqrt{-g}\,d^4x = 0$$

i zaključili da polje iščezava svugdje. Neka polja, kao Higgsovo, imaju $V' < 0$ na nekim područjima.

Sljedeći Bekensteinov dokaz: pozitivnost gustoće energije polja je *dovoljan* uvjet za isključivanje skalarne, minimalno vezane kose u asimptotski ravnoj okolini statične crne rupe.

$\diamond$ Djelovanje skalarnih polja ψ, χ minimalno vezanih za gravitaciju je

$$S_{\psi,\chi} = -\int \mathscr{E}\left(I, J, K, \psi, \chi\right)\sqrt{-g}d^4x,$$

gdje je $\mathscr{E}$ funkcija,

$$I \equiv g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}, \qquad J \equiv g^{\alpha\beta}\chi_{,\alpha}\chi_{,\beta}, \qquad K \equiv g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\chi_{,\beta}$$

su invarijante složene od prvih derivacija polja ("kinetički članovi"). Poopćenje na više polja je trivijalno.

$\diamond$ Tenzor energije i impulsa koji odgovara djelovanju $S_{\psi,\chi}$ je

$$T_{\alpha}^{\ \beta} = -\mathscr{E}\delta_{\alpha}^{\ \beta} + 2\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)\psi_{,\alpha}\psi^{,\beta} + 2\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right)\chi_{,\alpha}\chi^{,\beta} + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)\left(\chi_{,\alpha}\psi^{,\beta} + \psi_{,\alpha}\chi^{,\beta}\right). \qquad (19)$$

Opažač 4-brzine U^α opaža lokalnu gustoću energije

$$\rho = \mathscr{E} + 2\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial I}\right)(\psi_{,\alpha}U^\alpha)^2 \\ +2\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial J}\right)(\chi_{,\alpha}U^\alpha)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}\right)\chi_{,\alpha}U^\alpha\psi_{,\beta}U^\beta. \tag{20}$$

Pretpostavljamo da polje ima vremenski Killingov vektor. Ako se opažač giba duž tog Killing vektora imamo $\psi_{,\alpha}U^\alpha = 0$, $\chi_{,\alpha}U^\alpha = 0$, ... i $\rho = \mathscr{E}$, iz čega slijedi

$$\mathscr{E} \geq 0. \tag{21}$$

Ako se drugi opažač giba relativno prema prvome 3-brzinom $\mathbf{v}$, u slobodnopadajućem koordinatnom sustavu, sugibajućem sa prvim opažačem vrijedi $U^0 = \gamma$ i $\mathbf{U} = \gamma\mathbf{v}$, gdje je $\gamma = \left(1 - \mathbf{v}^2\right)^{-1/2}$. Kada $|\mathbf{v}| \to 1$, članovi u (20) koji sadrže derivacije očito dominiraju nad $\mathscr{E}$, prema tome ukupno moraju biti nenegativni.

Te članove možemo napisati kao kvadratnu formu i iz uvjeta na njenu nenegativnost dobivamo uvjete:

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}\right)^2 \leq 4 \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial I}\right) \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial J}\right) \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial I}\right) > 0, \quad \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial J}\right) > 0, \tag{23}$$

koje ćemo kasnije koristiti.

Pretpostavljamo statično asimptotski ravno rješenje Einsteinovih jednadžbi za skalarno polje. Metrika izvan horizonta:

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{24}$$

gdje su ν i λ funkcije od r i trnu kao $\mathcal{O}(r^{-1})$ kada $r \to \infty$ i $\psi = \psi(r)$ i $\chi = \chi(r)$.
$\mathcal{H}$ odgovara površini $r = r_h$, gdje $e^{\nu(r_h)} = 0$
Zakon očuvanja kojeg zadovoljava $T_{\mu}^{\ \nu}$ dan s (19) je

$$T_{\mu\ ;\nu}^{\ \nu} = 0, \tag{25}$$

r komponenta je

$$\left[\sqrt{-g}\,T_r^{\ r}\right]' - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial r}T^{\alpha\beta} = 0, \tag{26}$$

gdje crtica označava $\partial/\partial r$ i

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2\sin\theta.$$

Zbog statičnosti i sferne simetrije $T_\mu^{\ \nu}$ mora biti dijagonalan, $T_\theta^{\ \theta} = T_\varphi^{\ \varphi}$ i vrijedi $T_t^{\ t} = T_\theta^{\ \theta} = -\mathscr{E}$ što nam omogućuje da (26) pišemo u obliku

$$\left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2 T_r^{\ r}\right)' = -\left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2\right)' \mathscr{E}. \tag{27}$$

Integriramo dobivenu jednadžbu po r od r_h do r. Član izvrijednjen u r_h iščezava jer $e^{\nu(r_h)} = 0$, a $T_r^{\ r}$ je konačan (mora biti kako bi fizikalna invarijanta $T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$ bila konačna na $\mathcal{H}$).
Dobivamo

$$T_r^{\ r}(r) = -\frac{e^{\frac{\nu}{2}}}{r^2} \int\limits_{r_h}^{r} \left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2\right)' \mathscr{E} dr. \tag{28}$$

Primijetimo, $e^{\nu(r_h)} = 0$ i $e^{\nu(r > r_h)} > 0$ pa e^{ν}mora rasti s r blizu horizonta. Iz (28) slijedi da, uz $\mathscr{E} > 0$, **dovoljno blizu $\mathcal{H}$ mora vrijediti $T_r^{\ r} < 0$.**

Presložimo (27)

$$(T_r^{\ r})' = -\frac{e^{\frac{\nu}{2}}}{r^2}\left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2\right)' (\mathscr{E} + T_r^{\ r})\,, \tag{29}$$

a (19) daje

$$\mathscr{E} + T_r^{\ r} = 2e^{-\lambda}\left[\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial I}\right)(\psi_{,r})^2 + \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial J}\right)(\chi_{,r})^2 + \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}\right)\chi_{,r}\psi_{,r}\right].$$

$\underline{\diamond}$ Uvjeti (22) i (23) daju $\mathscr{E} + T_r^{\ r} \geq 0$ svugdje, što povlači $(T_r^{\ r})' < 0$ dovoljno blizu $\mathcal{H}$.

$\underline{\diamond}$ Asimptotsko ponašanje $e^{\nu/2} \to 1$ u (29) daje $(T_r^{\ r})' < 0$.

$\underline{\diamond}$ Kasnije ćemo vidjeti da asimptotska ravnosta zahtjeva da $\mathscr{E}$ pada barem sa r^{-3} u limesu $r \to \infty$ (jednadžba (32)).

$\underline{\diamond}$ Integral u (28) tada konvergira i $|T_r^{\ r}|$ trne asimptotski sa r^{-2}, ali kako je $(T_r^{\ r})' < 0 \;\Rightarrow$ asimptotski je $T_r^{\ r} > 0$ i smanjuje se s r.

$\underline{\diamond}$ Zaključujemo: *postoji interval* $[r_a, r_b]$ *gdje* $(T_r^{\ r})' > 0$ *i* $T_r^{\ r}$ *mijenja predznak na nekom* r_c*;* $r_a > r_c > r_b$.

Sada ćemo, pomoću Einsteinovih jednadžbi, pokazati da je takav rezultat NEOSTVARIV.

Relevantne Einsteinove jednadžbe su

$$e^{-\lambda}\left(r^{-2} - r^{-1}\lambda'\right) - r^{-2} = 8\pi G T_t{}^t = -8\pi G \mathscr{E} \tag{30}$$

$$e^{-\lambda}\left(r^{-1}\lambda' + r^{-2}\right) - r^{-2} = 8\pi G T_r{}^r. \tag{31}$$

Rješavanjem (30) dobivamo

$$e^{-\lambda} = 1 - 8\pi G r^{-1} \int_{r_h}^{r} \mathscr{E} r^2 dr - 2GMr^{-1}, \tag{32}$$

gdje je M konstanta integracije.
Asimptotska ravnost zahtjeva:
asimptotski $\mathscr{E} = \mathcal{O}\left(r^{-3}\right)$ tako da $\lambda = \mathcal{O}\left(r^{-1}\right)$.
Također, $e^{\lambda(r_h)} \to \infty$ tako da $2GM = r_h$ (M je masa crne rupe).
Iz (32) slijedi da je $e^{\lambda} \geq 1$ u cijeloj $\mathcal{E}$.
(Promjena predznaka nije moguća jer bi, uz $e^{\nu} > 0$, značila promjenu signature, što ne odgovara regularnosti rješenja.)

Drugu Einsteinovu jednadžbu (31) pišemo kao

$$e^{-\frac{\nu}{2}} r^{-2} \left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2 \right)' = \left[4\pi r G T_r{}^r + \frac{1}{2r} \right] e^{\lambda} + \frac{3}{2r} > 4\pi r G T_r{}^r e^{\lambda} + \frac{2}{r}, \tag{33}$$

gdje nejednakost dolazi od $\frac{e^{\lambda}}{2} + \frac{3}{2} > 2$.

U području $[r_c, r_b]$: $\quad T_r{}^r > 0 \implies e^{-\frac{\nu}{2}} r^{-2} \left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2 \right)' > 0$,

što uvršteno u (29) daje $(T_r{}^r)' < 0$, u *suprotnosti* sa ranijim zaključkom.

Jedini način za izbjeći kontradikciju: polja ψ, χ su konstantna u okolini $\mathcal{E}$, t. d. sve komponente $T_\alpha^{\ \beta}$ iščezavaju, tj. (jedn. (19))

$$\mathscr{E}(0, 0, 0, ..., \psi, \chi, ...) = 0.$$

Rješenje je identično *Schwarzschildovo*. Ako je crna rupa električki ili magnetski nabijena, a skalarna polja nisu vezana za EM, slična rasprava vodi na zaključak da crna rupa mora biti *Reissner-Nordströmova*.

PROTUPRIMJERI:

KONFORMNA KOSA

• Prvu kosu je našao Bekenstein u obliku *bezmasenog konformnog skalarnog polja.*

◇ Konformna transformacija je promjena skale

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x),$$

gdje x označava sve koordinate, a $\Omega(x)$ je neka funkcija.

◇ Polje ψ je konformno invarijantno ako zadovoljava jednadžbu

$$\psi_{,\alpha}{}^{;\alpha} - \frac{R}{6}\psi = 0, \tag{34}$$

gdje je R skalar zakrivljenosti.

$\underline{\diamond}$ Djelovanje konformnog polja ψ i ostalih polja, čija je gustoća lagranžijana $\mathcal{L}$, je

$$S = \int \left[\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} - \xi \frac{R}{2}\psi^2 + \mathcal{L} \right] \sqrt{-g} d^4 x, \qquad (35)$$

gdje je

$$\xi = \frac{n-2}{4(n-1)} \stackrel{n=4}{=} \frac{1}{6} \equiv \xi_c$$

za konformno vezanje skalarnog polja za gravitaciju u četiri dimenzije ($\xi = 0$ odgovara minimalnom vezanju).

$\underline{\diamond}$ Varijacijskim principom djelovanja (35) po ψ dobivamo (34), a varijacijom po $g^{\mu\nu}$ Einsteinove jednadžbe.

$\diamond$ Bekenstein je dokazao teorem po kojem *za svako rješenje Einsteinovih jednadžbi sa običnim skalarnim poljem postoje dva rješenja Einsteinovih jednadžbi sa konformnim skalarnim poljem.*

$\diamond$ Daje statično sferno-simetrično rješenje vezanih *Einstein-Maxwell-*ψ jednadžbi sa $\mathcal{H}$ regularne geometrije, parametrizirano električnim nabojem e i skalarnim nabojem q.

$\diamond$ Linijski element, EM polje i skalarno polje tog rješenja su redom:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

$$F_{\mu\nu} = er^{-2}\left(\delta_\mu^r \delta_\nu^t - \delta_\mu^t \delta_\nu^r\right)$$

$$\psi = q\left(r - M\right)^{-1}, \tag{36}$$

gdje je $M = \sqrt{e^2 - \frac{4\pi q^2}{3}}$.

$\underline{\diamond}$ Skalarno polje divergira na $\mathcal{H} \rightarrow$ nefizikalno rješenje?

$\underline{\diamond}$ Proučavanje putanja testnih čestica u prostorvremenu danom s (36), pokazao da je $\mathcal{H}$ fizikalno regularan jer vrijedi:

i) beskonačnost polja ψ nije povezana sa beskonačno visokom (odbojnom) potencijalnom barijerom (kao beskonačnost EM potencijala u $r = 0$ za odgovarajući predznak naboja)

ii) ne postoje putanje testnih čestica (slobodnih, električki ili skalarno nabijenih) koje završavaju na $\mathcal{H}$ u konačnom vlastitom vremenu

iii) plimne akceleracije (gravitacijskog, skalarnog ili EM porijekla) su omeđene na $\mathcal{H}$

$\diamond$ Za potpun opis rješenja je potreban dodatan parametar, skalarni naboj, dakle, rezultat je *crna rupa sa kosom*.

$\diamond$ Ispostavilo se da je to rješenje nestabilno pod radijalnim perturbacijama.

$\diamond$ QM fluktuacije se ne mogu isključiti pa će s vremenom ostati obično Schwarzschildovo rješenje.

$\rightarrow$ nestabilna rješenja se ugl. odbacuju kao astrofizički nerelevantna

! Bekensteinova konformna kosa je pokazala da postoje načini zaobilaženja NHC-a i potaknula nove potrage za kosom.

Postoji li analogno rješenje za $\xi \neq 1/6$ i poopćenje na $n \neq 4$?

Dokazano:

$\diamond$ Bekensteinova crna rupa NE postoji za $n = 3$ i za $n > 4$. [*Klimčik*]

$\diamond$ Statična sferno-simetrična nabijena ili neutralna crna rupa NE može imati kosu u obliku neutralnog skalarnog polja (ili više polja) sa standardnim kinetičkim djelovanjem, pozitivno-semidefinitnog potencijala samointerakcije i neminimalnog vezanja za gravitaciju sa $\xi < 0$ i $\xi \geq 1/2$. [*Mayo&Bekenstein*]

$\diamond$ Nabijena sferno-simetrična crna rupa NE može imati kosu u obliku nabijenog skalarnog polja sa standardnim kinetičkim djelovanjem, regularnim potencijalom samointerakcije i $\xi \neq 0$. [*Mayo&Bekenstein*]

Čini se da je Bekensteinova konformna crna rupa jedino rješenje tog tipa, neovisno o vrijednosti veličine ξ, broju dimenzija i potencijalu samointerakcije.

NE-ABELOVA KOSA

Obojene crne rupe

• Gornji dokazi ne vrijede za polja sa ne-Abelovom interakcijom.
• Za svako rješenje *Einstein-Maxwell* jednadžbi može se konstruirati skup rješenja vezanih *Einstein-Yang-Mills* (EYM) jednadžbi bilo koje baždarne grupe sa invarijantnom metrikom.
• Baždarna polja su bezmaseni vektorski mezoni, a baždarni naboji očuvane veličine kao izospin i hipernaboj.
• Postoji i rješenje Kerrove geometrije sa prisustvom konstantnog skalarnog polja sa spontanim lomom simetrije.
$\rightarrow$ kombinacija bi mogla dati crnu rupu sa masivnim YM poljem
• Nađeno je sferno-simetrično rješenje (EYMH) sa netrivijalnim SU(2) baždarnim i Higgsovim poljem izvan $\mathcal{H}$ (numerički)
Rješenje je nestabilna.

• Kako ne-Abelovska interakcija zaobilazi prijašnje NHC dokaze?
primjer: Lagranžijan SU(2) baždarne teorije se može pisati

$$\mathcal{L}_{EYM} = -\frac{1}{16\pi}\left[|F|^2\right] = -\frac{1}{16\pi}\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F^{(i)}_{\mu\nu}F^{(i)}_{\rho\sigma}\right],$$

gdje je i izospinski indeks,

$$F^{(i)}_{\mu\nu} = A^{(i)}_{\nu,\mu} - A^{(i)}_{\mu,\nu} + g\epsilon_{ijk}A^{(j)}_{\mu}A^{(k)}_{\nu}$$

i g je konstanta baždarnog vezanja.
Jednadžba koja odgovara Bekensteinovoj jednadžbi (3) je

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{E}} d^4x\sqrt{-g}\left[-8\pi\mathcal{L}_{EYM} + \frac{1}{2}\left(g\epsilon_{ijk}A^{(j)}_{\mu}A^{(k)}_{\nu}\right)F^{(i)\mu\nu}\right] = 0.$$

Ako gledamo statična polja i, zbog jednostavnosti, pretpostavimo $A^{(i)}_0 = 0$, slijedi $|F|^2$, ali drugi član nije nužno pozitivan pa postojanje takvog nelinearnog člana može voditi na zaobilaženje Bekensteinovog dokaza.

• Netrivijalna rješenja sistema EYM su nazvana *obojene crne rupe*.

• Parametrizirana su cijelim brojem n koji odgovara broju čvorova YM potencijala i sva su nestabilna na radijalne linearne perturbacije.

• Statična SU(2) EYM rješenja, za razliku od *Einstein-Maxwell* rješenja, nisu nužno sferno, već samo osnosimetrična.

Postoje: • statična, sferno simetrična SU(N) EYM rješenja i

• SU(2) kosa sporo rotirajuće crne rupe, čiji je statički limes neutralan, dok je naboj rotirajućeg rješenja proporcionalan zamahu crne rupe.

• *dilatonske obojene crne rupe* sličnih svojstava kao obične obojene, a pripadni integral djelovanja se javlja u različitim teorijama ujedinjenja.

- **Skyrme crne rupe**

Proizlaze iz nelinearnih $\sigma-$modela u interakciji sa gravitacijskim poljem. *Skyrme* je dao najjednostavniji nelinearni $\sigma-$model sa stabilnim solitonskim rješenjima i nađena su pripadna rješenja za crne rupe. Barem je jedno rješenje sa Skyrme kosom stabilno.

- **Proca crne rupe**

Proca polje je masivno YM polje koje interagira sa gravitacijom. Takvo *Einstein-non-Abelian-Proca* (ENAP) rješenje postoji i stabilno je.

- **Crne rupe u monopolima**

Monopoli su prvo razmatrani u okviru Maxwellove elektrodinamike, a zatim su nađeni monopoli kao rješenja YMH teorije i rješenja koja opisuju gravitacijske monopole. Crna rupa može postojati ako je gravitacijski radijus manji od veličine monopola.

KVANTNA KOSA

- **Aksionske crne rupe**

Aksionska kosa je prva poznata stabilna dinamička, ne-baždarna kosa . Rotacija crne rupe djeluje kao izvor aksionske kose, a kod nerotirajuće crne rupe tu ulogu ima postojanje i električnog i magnetskog naboja. Kosa ne modificira vakuumsku metriku okoline, tj. njen tenzor energije i impulsa iščezava, ali je ukupni aksionski naboj različit od nula i u principu bi se mogao mjeriti nelokalnim eksperimentima kvantne prirode.

- **Crne rupe sa diskretnim baždarnim nabojima**

Kvantna kosa povezana sa diskretnim baždarnim nabojima se može pojaviti kada lom lokalno kontinuirane baždarne simetrije ostavi neslomljenom diskretnu podgrupu baždarne grupe. Naboji neslomljene simetrije mogu ostati vezani za crnu rupu, a u principu se mogu mjeriti Aharonov-Bohm tipom raspršenja kozmičke strune na topološki stabilnoj struni vezanoj uz naboj neslomljene simetrije.

• Postoji rješenje rotirajuće crne rupe sa minimalno vezanim kompleksnim **skalarnim poljem** i to rješenje nema statičan limes. Zaobilaženje odgovarajućeg Bekensteinovog dokaza je omogućeno činjenicom da skalarno polje *ne nasljeđuje simetrije metrike*. Pripadno rješenje, osim M i J, ima očuvani kontinuirani Noetherov naboj, mjeru skalarne kose.

Sve se do sada odnosilo na asimptotski ravna rješenja. Eksperimentalna vrijednost kozmološke konstante Λ je približno

$$2 \cdot 10^{-35} s^{-2}$$

i svemir u kojem živimo nije asimptotski ravan, već negativno zakrivljen.
Koliko je opravdano zahtjevati asimptotsku ravnost rješenja i što možemo reći o kosi crnih rupa u svemiru sa $\Lambda \neq 0$?

$\boxed{\boldsymbol{\Lambda < 0}}$

• Skalarna ne-minimalno vezana kosa, bez polja samointerakcije oko 4D crne rupe je moguća samo za $\Lambda < 0$ i $\xi > 0$ i neka rj. su stabilna.

• Postoje stabilna SU(N) rješenja (za razliku od asimp. ravnih koja su sva nestabilna).

Kako asimptotski adS rješenja ne očekujemo opaziti u svemiru, zanimanje za njih je često vezano za korespodenciju anti-de Sitter prostora i konformne teorije polja (adS/CFT); poznato i kao baždarno-gravitacijska dualnost, koja se primjenjuje npr. u teoriji struna, nuklearnoj fizici i teoriji supravodiča.

$\boxed{\boldsymbol{\Lambda > 0}}$

Koliko nam je poznato za $\Lambda > 0$ nisu nađena stabilna rješenja sa kosom, već su, dokazani neki oblici NHC-a, iako nema dokaza za sasvim općenita svojstva kose.

CRNE RUPE NEMAJU KOSU?

NHC u najširem smislu očito ne vrijedi, ALI svakako nije dopuštena bilo kakva kosa.

Ključne pretpostavke:

- simetrije prostorvremena
- simetrije polja
- vezanje polja za gravitaciju i druga polja
- regularnost polja
- Abelova/ne-Abelova interakcija
- stabilnost
- masa i način generiranja mase polja
- asimptotski oblik rješenja
- potencijal samointerakcije

NHC se može dokazati samo za pojedinačno djelovanje i geometriju rješenja, ne općenito.

„CRNE RUPE NEMAJU KRATKU KOSU"

⋄YM kosa se nužno prostire dalje od $3/2r_H \to$ prva naznaka o graničnoj duljini kose.

⋄ Idući teorem se odnosi na sve, do nastanka teorema, nađene kose: Skyrme, EYM, EYMH, ENAP, dilatonska i poznat je kao „crne rupe nemaju kratku kosu".

⋄Slabi energijski uvjet (WEC) je zahtjev $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$ za svaki vremenski vektor t^μ.

Teorem 3. Ako je

$$ds^2 = -e^{-2\delta} \mu dt^2 + \mu^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right)$$

linijski element asimptotski ravnog prostorvremena sferno simetrične crne rupe, koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe sa poljima materije za koje vrijedi WEC, čiji je trag tenzora energije i impulsa nepozitivan i čija gustoća energije raste prema nuli brže od r^{-4}, onda je funkcija

$$\mathcal{W} \equiv e^{-\delta} r^4 T^r_r$$

negativno-semidefinitna na $\mathcal{H}$ i pada između r_H i r_0, gdje je $r_0 > \frac{3}{2} r_H$ i za neki $r > r_0$ počinje rasti prema asimptotskoj vrijednosti nula. [*Núñez, Quevedo, Sudarsky*]

$\diamond$ Teorem 3 kaže da se kosa mora protezati barem do

$$r > r_0 > \frac{3}{2} r_H.$$

$\diamond$ Fizikalnost rezultata? U stabilnim kosama je ključna nelinearanost materije; interakcija između dijela polja koje bi bilo uvučeno u crnu rupu i dijela koje bi bilo izračeno omogućava stabilnost kose iz čega možemo pretpostaviti da dužina kose ima graničnu donju vrijednost dužine, prostiranja od crne rupe.

$\diamond$ Postoji, ipak, sferno simetrično, statično rješenje crne rupe sa **anizotropnim** poljem materije proizvoljne duljine prostiranja. Materija može opstati u jakom gravitacijskom polju bez kolapsa samo ako su joj unutarnji tlakovi dovoljno veliki, što se može pojaviti u anizotropnom fluidu.

! razlika simetrije metrike i polja

Ključno u zaobilaženju ranijeg teorema je da pretpostavka o nepozitivnosti traga tenzora energije i impulsa ne vrijedi za anizotropni fluid.

$\underline{\diamond}$ Također, rotirajuće crne rupe mogu imati ekstremno kratku stacionarnu konfiguraciju skalarnih polja.

Koje je fizikalno objašnjenje granice $3/2r_H$?

$\underline{\diamond}$ *Fotonsfera (svjetlosna kružna orbita)* je granica područja gdje može postojati stacionarna, sferno-simetrična konfiguracija testnih čestica i gdje ne može.

$\rightarrow$ Fotonsfera Schwarzschildove crne rupe odgovara $3/2r_H$.

$\underline{\diamond}$ *Hod* dokazuje teorem, sličan teoremu 3, koji, uz iste pretpostavke i malo drugačiju definiciju dužine kose, kaže da kosa mora biti dulja od radijusa fotonsfere r_γ.

$\underline{\diamond}$ Također daje dokaz u prilog prijedlogu da uvijek vrijedi:

$$\frac{M - m(r_\gamma)}{m(r_\gamma) - m(r_H)} \geq 1,$$

gdje je M ukupna masa definirana u asimptotskoj beskonačnosti,

$$M - m(r_\gamma)$$

je masa kose izvan fotonsfere, a

$$m(r_\gamma) - m(r_H)$$

je masa kose između horizonta i fotonsfere.
Drugim riječima, područje izvan fotonsfere uvijek sadrži barem 50% ukupne mase kose. Analitički provjerava predloženu granicu za velike EYM crne rupe, za koje je taj omjer 2.08, i numerički za EYM, EYMH, EYMD, ENAP i ES crne rupe i sve ju poštuju.

EKSPERIMENTALNA PROVJERA

Centar Mliječne staze je supermasivna crna rupa Sagitarius A*
(Sgr A*) mase $\sim 4 \cdot 10^6 M_\odot$, gdje je $M_\odot$ masa Sunca.

S obzirom na udaljenost i veličinu, Sgr A* i supermasivna crna rupa galaksije M87 su najbolji kandidati za slikanje horizonta.

Opća teorija relativnosti (OTR) predviđa: zakrivljenost prostorvremena stvara tamnu *sjenu okruženu sjajnim prstenom*.
Sjena je kružnog oblika, dijametra proporcionalnog masi, skoro neovisna o zamahu.
Očekujemo je opaziti u submilimetarskim valnim duljinama.
Opažanje sjene i njenog oblika je novi test OTR-a.

Zbog obrnute proporcionalnosti kutne razlučivosti i dijametra teleskopa za razlučivanje sjene od Sgr A* potreban je teleskop Zemljinog dijametra.

Event horizon telescope (EHT)

EHT je projekt u kojem se koristi VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) tehnika istovremenog prikupljanja podataka iz teleskopa čime se efektivno postiže dijametar jednak naudaljenijim teleskopima.

[Preuzeto sa http://www.nasa.gov/centers/goddard/news/topstory/2007/nrao_agreement.html]

Posljedica pretpostavke da crne rupe nemaju kosu je da se svi viši multipolni momenti gravitacijskog polja neutralne crne rupe mogu izraziti kao funkcije M i J. Konkretno, kvadrupolni moment q_2, najniži koji će se mjeriti, zadovoljava

$$q_2 = -\frac{J^2}{M}.$$

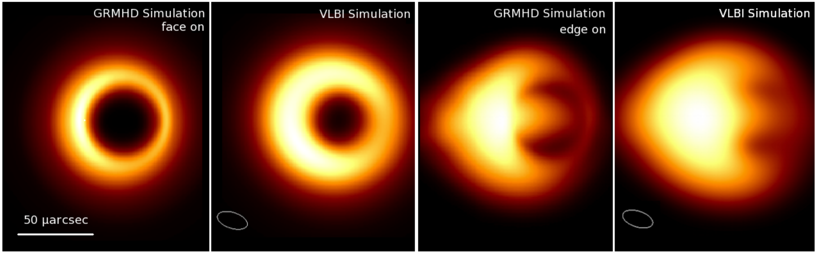
Observabilna provjera ove relacije je još jedno ispitivanje postojanja kose oko Sgr A*.

Sjena „ćelave” crne rupe razlikuje se od sjene u prisustvu kose pa se od analize sjene očekuju odgovori na neka pitanja o kosi.

Srednja slika je prikaz kružne sjene, a ako postoji kosa sjena može biti izduženog (oblate/prolate) oblika kao na desnom i lijevom prikazu.

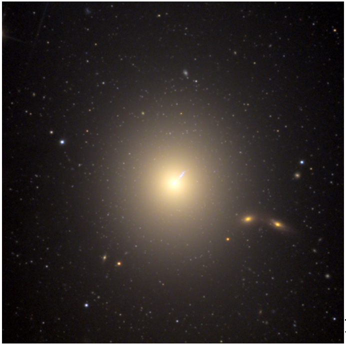
Preuzeto sa https://inspirehep.net/record/1254036/plots

Primjer simulacije:
usporedba GRMHD (general relativistic magnetohydrodynamic) i VLBI simulacije, gdje se u GRMH uzimaju u obzir procesi hlađenja zračenjem (sinkrotrono, bremsstrahlung i inverzno Comptonovo).



Preuzeto sa https://inspirehep.net/record/1263744/plots

M87 je aktivna galaktička jezgra koja generira mlazove. Lijeva slika je prikaz u vidljivom dijelu spektra, a desna je kompozicija vidljivog, radio i X zračenja.


[1]


[2]

[1] Preuzeto sa http://space-facts.com/m87-galaxy/

[2] Preuzeto sa http://chandra.harvard.edu/photo/2008/m87/

ZAKLJUČAK

- Jednostavnost opisa crnih rupa, točnije, mali broj parametara kojima su potpuno opisane postalo je poznato kao „crne rupe nemaju kosu”.
- U ovom radu smo se bavili tom pretpostavkom, od njenih začetaka do današnje situacije problema.
- Vidjeli smo da u najširem smislu ta pretpostavka **ne vrijedi** i da su nađena rješenja sa različitim kosama, ali da je za različita polja i simetrije metrike moguće dokazati njeno **nepostojanje**.
- <u>Primjeri isključenih polja oko sferno simetrične crne rupe sa asimptotski ravnom metrikom:</u>
masivno i bezmaseno skalarno i masivno vektorsko polje, nabijeno i neutralno, minimalno vezano za gravitaciju i s Abelovom interakcijom.
- <u>Primjeri mogućih polja oko sferno simetrične crne rupe sa asimptotski ravnom metrikom:</u>
konformno, anizotropni fluid, SU(N) baždarna polja, Skyrme.

• Primjeri mogućih polja oko sferno simetrične crne rupe sa asimptotski ravnom metrikom:
minimalno vezano kompleksno skalarno polje, skalarno polje sa spontanim lomom simetrije.

Vrlo je važno koje su pretpostavke uzete u analizi, a odnose se na:
- simetrije prostorvremena
- simetrije polja
- vezanje polja za gravitaciju i druga polja
- regularnost polja
- Abelova/ne-Abelova interakcija
- stabilnost
- masa i način generiranja mase polja
- asimptotski oblik rješenja
- potencijal samointerakcije

Najviše je dokaza vezano za skalarno polje i nekad se govori o teoremu o *nepostojanju skalarne kose*, ali, kako smo vidjeli to vrijedi samo za sferno simetrične crne rupe i ako se pretpostavi da polja nasljeđuju simetrije metrike.

Proučili smo predloženi teorem „crne rupe nemaju kratku kosu” i opet zaključili da ne vrijedi kada se izađe iz režima statičnosti ili nasljeđivanja simetrije.

Ne kraju smo se pitali o eksperimentalnoj provjeri teorijskih predviđanja i upoznali se sa EHT projektom koji bi, proučavajući horizonte supermasivnih crnih rupa Sgr A* i centra galaksije M87, uskoro mogao dati odgovore na neka pitanja o kosi.

LITERATURA:

W. Israel, Phys. Rev. 164, 1776 (1967); Commun. Math. Phys. 8, 245 (1968)
B. Carter, Phys. Rev. Lett. 26, 331 (1971)
R. Ruffini i J. A. Wheeler, Phys. Today 24, 30 (1971)
J. D. Bekenstein, Phys. Rev. Lett. 28, 452 (1972)
http://vlbiimaging.csail.mit.edu/
C. M. Will, The Astro. J. 674, L25 (2008)
A. E. Broderick i dr., arXiv: 1311.5564v1 (2013)
D.C. Robinson, Phys. Rev. Lett 34, 905 (1975)
K. S. Thorne, Rev. of Modern Phys. 52, No. 2 (1980)
J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 5, 1239 (1972); Phys. Rev. D 51, R6608 (1995)
C.V. Vishveshwara, J. Math. Phys. ˜, 1339 (1968)
J. B. Hartle, Phys. Rev. D 3, 2938 (1971)
C. Teitelboim, Lett. Al Nuovo Cim. 3, 397 (1972)
S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 25, 152 (1972)
https://en.wikipedia.org/wiki/Positive-definite_matrix#Quadratic_forms
J. D. Bekenstein, Annals of Physics 82, 535 (1974)
J. D. Bekenstein, Annals of Physics 91, 75 (1975)
K. A. Bronnikov i Y. N. Kireyev, Phys. Lett. A 67, 95 (1978)
C. Klimčik, J. Math. Phys. 34, 1914 (1993)

A. E. Mayo i J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 54, 5059 (1996)
T. Zannias, arXiv: 9409030v1 (1994)
A.Saa, Phys. Rev. D 53, 7377 (1996)
E. Ayon-Beato, arXiv: 0212050v1 (2002)
P. B. Yasskin, Phys. Rev. D 12, 2212 (1975)
B. R. Greene, S. D. Mathur, C. M. O'Neill, Phys. Rev. D 47, 2242 (1993)
B. Kleihaus, J. Kunz i A. Sood, arXiv: 9705179v2 (1997)
M. S. Volkov i N. Straumann, Phys. Rev. Lett 79, 1428 (1997)
E. E. Donetz i D. V. Gal'tsov, Phys. Lett. B, 302, 411 (1993)
T. Torii i K. Maeda, Phys. Rev. D 48, 1643 (1993);
G. Lavrelashvili i D. Maison, Nucl. Phys. B 410, 407 (1993)
T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. London A 260, 127 (1961)
S. Droz, M. Heusler i N. Straumann, Phys. Lett. B 268, 371 (1991)
P. Bizon i T. Chmaj, Phys. Lett. B 297, 55 (1992)
T. Torri, K. Maeda i T. Tachizawa, Phys. Rev. D 51, 1510 (1995)
K. Lee, V. P. Nair i E. J. Weinberg, Phys. Rev D 45, 2751 (1992)
S. A. Ridgway i E. J. Weinberg, Phys. Rev D 51, 638 (1995)
E. J. Weinberg, arXiv: 0106030v2 (2001)
G. Lavrelashvili, arXiv: 3701049v1 (1997)
T. Tachizawa, K. Maeda i T. Torii, Phys. Rev. D 51, 4054 (1995);
V. P. Frolov i I. D. Novikov, *Black hole physics,* Klumer Academic, Dordrecht (1998)

K. Lee i E. J. Weinberg, Phys. Rev. D 44, 3159 (1991)
M. J. Bowick i dr., Phys. Rev. Lett. 61, 2823 (1988)
S. Coleman, J. Preskill i F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 67, 1975 (1991)
Nucl. Phys. B 378, 175 (1992)
L. M. Krauss i F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 62, 1221 (1989)
C. A. R. Herdeiro i E. Radu, phys. Rev. Lett. 112, 221101 (2014)
M. Carmeli, arXiv: astro-ph/0111259v1 (2001)
E. Winstanley, Class. Quantum Grav. 22, 2233 (2005)
E. Winstanley, arXiv: 0801.0527v1 (2008)
https://en.wikipedia.org/wiki/AdS/CFT_correspondence#Applications_to_quantum
J. Fernández-Gracia i B. Fiol, arXiv:0906.2353 (2009)
C. Martinez i R. Troncoso, Phys. Rev. D 74, 064007 (2006);
T. Hertog, Phys. Rev. D 74, 084008 (2006)
T. Torii, K. Maeda i M. Narita, arXiv: gr-qc/9809036v1 (1998)
D. Sudarsky, Class. Quantum Grav. 12, 579 (1994)
J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 51, R6608 (1995)
A. Saa, J. of Math.Phys. 37, 2346 (1996)
E. Ayón-Beato, , arXiv: 0212050v1 (2002)
S. Bhattacharya, A. Lahiri, Phys. Rev. Lett. 99, 201101 (2007)
S. Bhattacharya, A. Lahiri, Phys. Rev. D 86, 084038 (2012)
G. Dotti, R. Gleiser, C. Martínez, Phys. Rev. D 77, 104035 (2008)
D. Núñez, H. Quevedo i D. Sudarsky, Phys. Rev. Lett. 76, 571 (1996)

J. D. Brown i V. Husain, Int. J. Mod. Phys. D 6, 563 (1997)
S. Hod, Phys. Lett. B 739, 196 (2014)
S. Hod, Phys. Rev. D 84, 124030 (2011)
V. P. Cunha, A. R. Herdeiro, E. Radu, H. F. Rúnarsson, arXiv: 1509.00021v2 (2015)