# Korelacijska funkcija tenzora energije i impulsa i anomalija traga

Clay James Grewcoe
Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu
Mentor: Maro Cvitan

# Konformalna transformacija

- Invertibilno preslikavanje $x \to x'$
- Metrika se transformira samo do na lokalni faktor skale $g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x)$
- Poincaréova grupa je podgrupa $(\Lambda(x) = 1)$

Opća infinitezimalna transformacija koordinata je $x'^{\mu} \to x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$. Metrika se pritom transformira

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} = (\delta^{\alpha}_{\mu} - \partial_{\mu}\epsilon^{\alpha})(\delta^{\beta}_{\nu} - \partial_{\nu}\epsilon^{\beta}) g_{\alpha\beta}$$
$$= g_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu}) \quad .$$

Želimo li da transformacija bude konformalna $\epsilon(x)$ nije proizvoljan već mora vrijediti

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d} \partial_{\rho}\epsilon^{\rho} g_{\mu\nu} \quad .$$

Može se pokazati da grupa konformalnih transformacija sadrži slijedeće transformacije:

- TRANSLACIJA $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$
- DILATACIJA $x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$
- ROTACIJA $x'^{\mu} = M^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$
- SCT $x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$

Također, se može pokazati da, ako gledamo podgrupu transformacija koje ostavljaju ishodište nepomičnim, generatori SCT transformacija iščezavaju.

Akcija

$$S = \int d^d x \, \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad ,$$

se transformira na opću infinitezimalnu transformaciju kao

$$\begin{aligned} S' &= \int d^d x \, \mathcal{L}(\Phi'(x), \partial_\mu \Phi'(x)) \\ &= \int d^d x' \, \mathcal{L}(\mathcal{F}(\Phi(x)), \partial_\mu \mathcal{F}(\Phi(x))) \\ &= \int d^d x \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}'}{\partial \boldsymbol{x}} \right| \mathcal{L}\left( \mathcal{F}(\Phi(x)), \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \partial_\nu \mathcal{F}(\Phi(x)) \right) \end{aligned}$$

gdje je $\Phi'(x') = \mathcal{F}(\Phi(x))$. Razvoj transformacije do prvog reda je

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}$$

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a}$$

Uvrštavanjem dobijemo za varijaciju akcije:

$$\delta S = -\int d^d x\, j_a^\mu \partial_\mu \omega_a$$

nakon parcijalne integracije

$$\delta S = \int d^d x\, \partial_\mu j_a^\mu\, \omega_a \quad .$$

Ako su jednadžbe gibanja zadovoljene onda $\delta S$ iščezava pa je struja sačuvana. Izraz za sačuvanu struju glasi

$$j_a^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \quad .$$

Koristimo sad Noetherin teorem na infinitezimalnu translaciju $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$.

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon^\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon^\nu} = 0$$

Struja je dakle

$$T_c^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad .$$

Ovo je kanonski tenzor energije i impulsa, kako bi ga se simetriziralo uvodi se Belinfante tenzor $B^{\mu\nu\rho}$ koji ne utječe na sačuvanje.

$$T_B^{\mu\nu} = T_B^{\nu\mu} = T_c^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu}$$

Pogledajmo sada definiciju tenzora energije i impulsa u općem prostoru, pretpostavimo da je tenzor simetričan, a transformacija opća

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\int d^d x \, T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu \\
&= -\frac{1}{2} \int d^d x \, T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \\
&= \frac{1}{2} \int d^d x \, T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad T^{\mu\nu} = 2 \frac{\delta S[g]}{\delta g_{\mu\nu}} \quad .
\end{aligned}$$

U kvantnom slučaju moramo promotriti vakuumski funkcional

$$Z[g] = \int [d\Phi]_g \exp -S[\Phi, g] \equiv \exp -W[g] \ ,$$

čija je transformacija na infinitezimalnu transformaciju metrike:

$$\begin{aligned} Z[g+\delta g] &= \int [d\Phi]_{g+\delta g} \exp -S[\Phi, g+\delta g] \\ &= \int [d\Phi]_g \left(1 - \frac{1}{2}\int d^d x \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}\right) \\ &\quad \cdot \exp -S[\Phi, g] \\ &= Z[g] - Z[g]\frac{1}{2}\int d^d x \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \langle T^{\mu\nu}\rangle \quad , \end{aligned}$$

dakle

$$\delta W[g] = -\frac{\delta Z[g]}{Z[g]} = \frac{1}{2}\int d^d x \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}\langle T^{\mu\nu}\rangle \ ,$$

$$\langle T^{\mu\nu}(x)\rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta W[g]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad .$$

Def. Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ mnogostrukosti, a $f$ preslikavanje $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, ako je $f$ bijekcija i beskonačno derivabilna ($\in C^\infty$) te posjeduje $C^\infty$ inverz, onda se $f$ naziva difeomorfizam.

Difeomorfizmi su važni u okvirima opće teorije relativnosti zbog toga što je to jedina teorija polja invarijantna na (aktivne) difeo-transformacije, zato se često izrazi opća kovarijantnost i invarijantnost difeomorfizma koriste u istom značenju.

Pogledajmo sad tenzor energije i impulsa u okvirima konformalnih transformacija.

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{2} \int d^d x \, T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^d x \, T^{\mu\nu} \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{d} \int d^d x \, T^\mu{}_\mu \partial_\nu \epsilon^\nu
\end{aligned}
$$

Slijedi da iščezavanje traga tenzora energije i impulsa implicira invarijantnost akcije na konformalne transformacije. Obrat ne vrijedi jer $\epsilon^\mu(x)$ nije proizvoljna funkcija. Ako teorija posjeduje invarijantnost skale, tenzor se može konstruirati tako da mu trag iščezava, kao što ga se moglo simetrizirati u teoriji s rotacijskom simetrijom.

Neka je dimenzija prostora neke opće teorije polja sa simetrijom skale $d > 2$, slijedi za infinitezimalnu dilataciju,

$$x'^{\mu} = (1+\alpha)x^{\mu}$$
$$\mathcal{F}(\Phi) = (1-\alpha\Delta)\Phi \quad ,$$

slijedi da je pripadna sačuvana struja

$$j_D^{\mu} = T^{\mu}_{c\,\nu}x^{\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\Delta\Phi$$
$$\partial_\mu j_D^{\mu} = T^{\mu}_{c\,\mu} + \Delta\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right) = 0 \quad .$$

Sada sličnim postupkom kao i konstrukcije Belinfante tenzora možemo konstruirati novi tenzor $X^{\mu\nu\rho\sigma}$ koji daje novi tenzor energije i impulsa,

$$T^{\mu\nu} = T_c^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu} \quad ,$$

takav da

$$T^{\mu}{}_{\mu} = \partial_\mu j_D^{\mu} \quad .$$

Počnimo od korelacijske funkcije dvije točke, tzv. Schwingerove funkcije

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} = \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0) \rangle$$

ona, zbog Lorentzove simetrije, nasljeđuje simetričnost $T^{\mu\nu}$ u indeksima:

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} = S_{\nu\mu\rho\sigma} = S_{\mu\nu\sigma\rho} = S_{\nu\mu\sigma\rho} \quad .$$

Translacijska simetrija sugerira,

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) &= \langle T_{\mu\nu}(0) T_{\rho\sigma}(-x) \rangle \\ &= \langle T_{\rho\sigma}(-x) T_{\mu\nu}(0) \rangle \\ &= S_{\rho\sigma\mu\nu}(-x) \quad , \end{aligned}$$

a invarijantnost na transformacije skale (iz akcije se vidi da dimenzija skaliranja mora biti 2)

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(\lambda x) = \lambda^{-4} S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \quad .$$

Kombinirajući te simetrije i Wardov identitet

$$\partial^{\mu} \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0) \rangle = \partial^{\mu} S_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$

dobijemo najopćenitiji oblik Schwingerove funkcije

$$\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = \frac{c/2}{x^4}\left(I_{\mu\rho}(x)I_{\nu\sigma}(x) + I_{\nu\rho}(x)I_{\mu\sigma}(x) - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\right) \tag{1}$$

gdje je

$$I_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - 2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \quad .$$

Trivijalno se vidi

$$\begin{aligned}
S^{\mu}{}_{\mu}{}^{\nu}{}_{\nu} &= \langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)T^{\nu}{}_{\nu}(0)\rangle \\
&= \frac{c}{2x^4}\Bigg(\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} + 8\frac{x^\mu x_\mu x^\nu x_\nu}{x^4} + \eta^{\mu}{}_{\mu}\eta^{\nu}{}_{\nu} - 2\eta^{\mu\nu}\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} - 2\eta_{\mu\nu}\frac{x^\mu x^\nu}{x^2} - 2\eta^{\mu}{}_{\nu}\frac{x_\mu x^\nu}{x^2} \\
&\qquad - 2\eta_{\mu}{}^{\nu}\frac{x^\mu x_\nu}{x^2}\Bigg) \\
&= \frac{c}{2x^4}(d + 8 + d - d^2 - 2 - 2 - 2 - 2) \overset{2D}{=} 0 \\
&\Rightarrow \quad \langle T^{\mu}{}_{\mu}\rangle = 0 \quad .
\end{aligned}$$

# Diferencijalna regularizacija

U ovom razmatranju nije uzeta u obzir UV divergencija kad $x \to 0$. Stoga, prvo treba regularizirati Schwingerovu funkciju koristeći diferencijalnu regularizaciju.

*Diferencijalna regularizacija* radi se tako da, ako imamo funkciju $F(x)$ koju želimo regularizirati, moramo naći najopćenitiju funkciju $f(x)$ takvu da je $\mathcal{D}f(x) = F(x)$ i $\mathcal{D}f$ ima dobro definiran Fourierov transformat, gdje je $\mathcal{D}$ opći diferencijalni operator koji odgovara simetrijama teorije.

U našem slučaju,

$$\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}f(x) \quad ,$$

simetrije nam nalažu Wardov identitet

$$\partial^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial^\rho \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial^\sigma \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$

i simetrija, i prva dva, i zadnja dva indeksa, drugim riječima diferencijalni operator mora biti transverzalan i simetričan u $\mu \leftrightarrow \nu$ i $\rho \leftrightarrow \sigma$. Najopćenitiji diferencijalni operator s tim simetrijama i četiri derivacije je

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \alpha\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} + \beta\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$$

gdje su,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma - (\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu)\Box + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\Box\Box \\
\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma - \tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho + \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho)\Box \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma})\Box\Box \quad .
\end{aligned}$$

Trag operatora je

$$\begin{aligned}
\eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\rho\partial_\sigma\Box - (2\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\Box)\Box + 2\eta_{\rho\sigma}\Box\Box = (\eta_{\rho\sigma}\Box - \partial_\rho\partial_\sigma)\Box \\
&= \eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} \quad .
\end{aligned}$$

Iz dimenzionalne analize

$$\dim \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = -4, \quad \dim S_{\mu\nu\rho\sigma} = -4$$

slijedi da $f(x)$ mora biti bezdimenzionalan, dakle $f(x)$ je funkcija $\ln \mu^2 x^2$ gdje je uveden $\mu$ regulator masene skale kako bi argument logaritma bio bezdimenzionalan. Dakle, ukupni ansatz za korelacijsku funkciju iznosi

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\rho\sigma} = \quad & \mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\alpha_1 \ln \mu^2 x^2 + \alpha_2 \ln^2 \mu^2 x^2 + \cdots\right) \\ & + \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\beta_1 \ln \mu^2 x^2 + \beta_2 \ln^2 \mu^2 x^2 + \cdots\right) \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

Sada tražimo koeficijente $\alpha_i$ i $\beta_i$ takve da izraz nakon regularizacije (2) odgovara (1) za $x \neq 0$. Lako se vidi da $\{\alpha_i, \beta_i\} = 0$ za $i > 2$, stoga nam preostaje da odredimo $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ i $\beta_2$.

Nakon dosta manipulacija dobije se, konačno, regularizirana Schwingerova funkcija:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\rho\sigma} &= \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0) \rangle \\ &= -\frac{c}{24} \mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} \ln \mu^2 x^2 \\ &\quad - \frac{c}{96} \left( \mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} - \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} \right) \ln^2 \mu^2 x^2 \, . \end{aligned} \tag{3}$$

S obzirom na jednakost tragova $\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ i $\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ drugi član ne doprinosi tragu:

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu}{}_{\mu}(x) T_{\rho\sigma}(0) \rangle &= -\frac{c}{48} \eta^{\mu\nu} \mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} \ln \mu^2 x^2 \\ &= \frac{c}{48} \left( \partial_\rho \partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma} \Box \right) \Box \ln \mu^2 x^2 \quad . \end{aligned}$$

Vrijedi,

$$\Box \ln \mu^2 x^2 = 4\pi \delta^2(x)$$

pa je onda konačni izraz za anomalni trag tenzora energije i impulsa (ili anomalni drugi Wardov identitet)

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x) T_{\rho\sigma}(y) \rangle = c \frac{\pi}{12} \left( \partial_\rho \partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma} \Box \right) \delta^2(x - y) \, .$$

Ako smo u prostoru s malom perturbacijom metrike ($h_{\mu\nu}$),

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$
$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x)$$

onda dobijemo

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)\rangle = c\frac{\pi}{12}\left(\partial_\rho\partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\Box\right)h^{\mu\nu}(x) \quad .$$

U ovom izrazu lako prepoznajemo razvoj Riccijevog skalara do prvog reda perturbacije metrike

$$R = \left(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box\right)h^{\mu\nu}$$

stoga,

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)\rangle = c\frac{\pi}{12}R(x) \quad .$$

Callan-Symanzikov operator komutira s onim Wardovog identiteta, pa možemo provjeriti da je (3) zaista sačuvano i u $x = 0$. CS diferencijalni operator se u našem slučaju svodi na logaritamsku derivaciju po skali,

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \propto \left(\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} - \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\right)\ln\mu^2x^2 = 0 \quad .$$

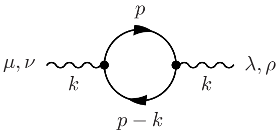
Dakle, zahtjev sačuvanja u $x = 0$ vodi na anomaliju traga.

Treba se još pozabaviti činjenicom da regularizacija nije jedinstvena, tj. da rezultati u procesima regularizacije jako često ovise o korištenoj metodi regularizacije. Kako bismo pokazali da anomalija traga nije rezultat same *diferencijalne* regularizacije, provjerit ćemo bi li dodatni dopušteni članovi u izrazu (3) uklonili anomaliju. Svi dopušteni članovi $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ (dodatni članovi moraju isključivo doprinostiti u $x=0$) su:

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\rho\sigma} = {} & A(\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu)\Box \ln \mu^2 x^2 \\ & + B(\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho + \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho)\Box \ln \mu^2 x^2 \\ & + C(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma})\Box\Box \ln \mu^2 x^2 + D\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\Box\Box \ln \mu^2 x^2 \quad . \end{aligned}$$

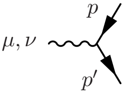
Kombinirajući koeficijente $A, B, C$ i $D$ ne može se ostvariti da iščezavaju oba Wardova identiteta, stoga ova anomalija nije posljedica vrste regularizacije, već stvarna anomalija koja može biti prikazana u formi anomalije traga ili u formi anomalije difeomorfizma.

Pogledajmo sada isti račun preko Feynmanovog dijagrama kiralnog fermiona,




Slika: Feynmanov dijagram procesa

vrh vezanja gravitona i fermionske linije iznosi




$$= \frac{i}{8}\left[\left(p+p'\right)_{\mu}\gamma_{\nu} + \left(p+p'\right)_{\nu}\gamma_{\mu}\right]\frac{1+\gamma_{*}}{2}$$

u impulsnom prostoru.

Koordinatna reprezentacija korelacijske funkcije je onda

$$\langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(y)\rangle = 4\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik(x-y)} S_{\mu\nu\rho\sigma}(k) \ .$$

Iz dijagrama slijedi,

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(k) = -\tfrac{1}{64}\int \tfrac{d^2p}{(2\pi)^2} \,\mathrm{tr}\Big[ \tfrac{1}{\not p}\big((2p-k)_\mu\gamma_\nu + (2p-k)_\nu\gamma_\mu\big) \tfrac{1}{\not p - \not k}\big((2p-k)_\rho\gamma_\sigma + (2p-k)_\sigma\gamma_\rho\big)\tfrac{1+\gamma_*}{2}\Big]$$

Nakon dimenzionalne regularizacije slijedi rezultat za trag tenzora

$$S^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma}(k) = \frac{1}{192\pi}\left(\eta_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma\right) \quad ,$$

što odgovara u koordinatnom prostoru

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}\rangle = -\frac{1}{48\pi}\left(\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\Box\right) h^{\rho\sigma} \quad .$$

Ovaj izraz nije kovarijantan, što znači da proces regularizacije nije čuvao kovarijantnost (invarijantnost difeomorfizma).

Narušenje sada treba provjeriti računajući divergenciju.

$$D_{\nu\rho\sigma}(k) = -\frac{1}{96\pi}\eta_{\rho\sigma}k_\nu k^2$$

što u koordinatnoj reprezentaciji odgovara anomaliji difeomorfizma

$$\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu}\rangle = \frac{1}{12\pi}\eta_{\rho\sigma}\partial_\nu \Box h^{\rho\sigma} \quad .$$

Sada preostaje vratiti kovarijantnost dodavanjem članova akciji koji ne utječu na simetrije. Može se pokazati da dodavanjem varijacije kontračlana $C$ akciji vratimo kovarijantnost.

$$C = -\frac{1}{96\pi}\int d^2x \, h\Box h$$

Slijedi već viđeni kovarijantni oblik,

$$\frac{1}{48\pi}\int d^2x \, \omega \, (\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h)$$

i sačuvanje struje. Treba primijetiti da dimenzionalna regularizacija nije čuvala kovarijantnost.

Poopćenje (1) na $d$ dimenzija glasi,

$$\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = \frac{c/2}{x^{2d}}\left(I_{\mu\rho}(x)I_{\nu\sigma}(x) + I_{\nu\rho}(x)I_{\mu\sigma}(x) - \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\right)$$

$I_{\mu\nu}$ je zadržao istu definiciju kao i u (1). Istim postupkom diferencijalne regularizacije dobije se regularizirani izraz

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = &-\frac{c/2}{2(d-2)^2d(d^2-1)}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{1}{x^{2d-4}}\right)\\ &+\frac{c/2}{2(d-2)^2d(d+1)}\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{1}{x^{2d-4}}\right) .\end{aligned} \tag{4}$$

gdje su $\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ i $\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ kao i u 2D slučaju. Trivijalno slijede relacije,

$$\partial^{\mu}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial^{\mu}\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$

$$\eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} = -(d-1)(\partial_\rho\partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\Box)\Box$$

$$\eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} = -(\partial_\rho\partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\Box)\Box$$

ako se ograničimo na $d=4$ onda je lako pokazati

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle \overset{(d=4)}{=} 0 \quad .$$

Opet trebamo provesti diskusiju o jedinstvenosti regularizacije stoga ćemo promotriti opći član koji možemo dodat izrazu (4), a da ne utječe na vrijednosti u $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mu\nu\rho\sigma} = \quad & \Big[A\,\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma\Box + B\,(\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho + \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho)\Box^2 \\ & + C\,(\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu)\Box^2 + D\,(\eta_{\mu\rho}\eta\nu\sigma + \eta_{\nu\rho}\eta\mu\sigma)\Box^3 \\ & + E\,\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\Box^3\Big]\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

zahtjevamo da vrijedi sačuvanje iz čega slijede uvjeti na koeficijente:

$$C = -A + 2D, \quad D = -B, \quad E = A + 2B \quad .$$

Trag onda postaje

$$\mathcal{A}^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma} = -4\pi^2(3A + 4B)(\eta_{\rho\sigma}\Box - \partial_\rho\partial_\sigma)\Box\,\delta(x)\;.$$

što odgovara trivijalnoj anomaliji $\propto \Box R$ koja se može ukloniti prikladnim kontračlanom u akciji. Slijedi da ova anomalija nije "prava" već da samo može proizaći kao rezultat vrste regularizacije.

Pokazano je da:

- klasično $T^{\mu}{}_{\mu}$ mora iščezavati
- anomalija u 2D kvantnom slučaju je posljedica regularizacije za $x = 0$ i zakrivljenosti prostora za $x \neq 0$
- anomalija prisutna u 2D kvantnom slučaju nije posljedica *vrste* regularizacije i da se može prikazati u formi anomalije traga ili invarijantnosti difeomorfizma ili oboje
- dimenzionalna regularizacija ne čuva *nužno* kovarijantnost
- u 4D kvantnom slučaju nema anomalije tj. da i ako se pojavi je samo posljedica *vrste* regularizacije i može ju se eliminirati prikladnima kontračlanom