Kauzalna struktura prostor-vremena i narušenja kronalnosti

Mateo Pauličić

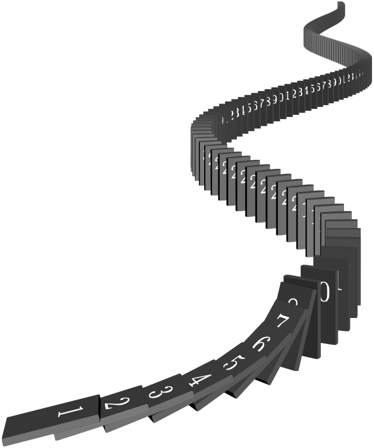
University of Zagreb
Faculty of Science
Department of Physics

Zagreb, 3. Veljače 2016

Sadržaj

Uvod

Kauzalnost



⇒ Kauzalna struktura prostor-vremena

Definicije

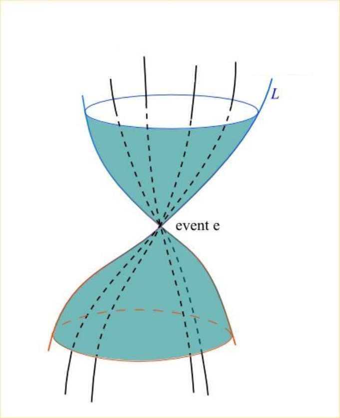
Definicija prostor-vremena

Prostor-vrijeme je vremenski orijentabilna povezana Hausdorfova C^∞ mnogostrukost sa prebrojivom bazom (M, g), dimenzije $m \geq 2$, sa Lorentzovom metrikom (metričkim tenzorom) g predznaka $(-, +, ..., +)$

TM označava prostor svih tangentnih vektora na mnogostrukosti M. Vektorsko polje $X \in TM$ može biti:

- **Prostornog tipa** ("space-like"), ako je $g(X(p), X(p)) > 0, \forall p \in M$
- **Vremenskog tipa** ("time-like"), ako je $g(X(p), X(p)) < 0, \forall p \in M$
- **Svjetlosnog tipa** ("lightlike"), ako je $g(X(p), X(p)) = 0, \forall p \in M$

Definicije



- Kronološka budućnost:
  $I^+(p) = q \in M : p \ll q$
- Kronološka prošlost:
  $I^-(p) = q \in M : q \ll p$
- Kauzalna budućnost:
  $J^+ = q \in M : p \leq q$
- Kauzalna prošlost:
  $J^-(p) = q \in M : q \leq p$

Kronološko prostor-vrijeme

Ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju vremenskog tipa

Kronološko prostor-vrijeme

Ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju vremenskog tipa

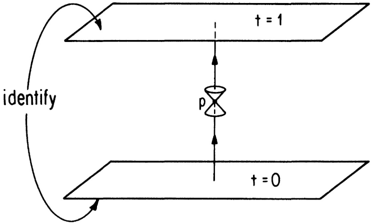


Figure: Prostor-vrijeme sa povredom kronološkog uvjeta

Kronološko prostor-vrijeme

Ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju vremenskog tipa

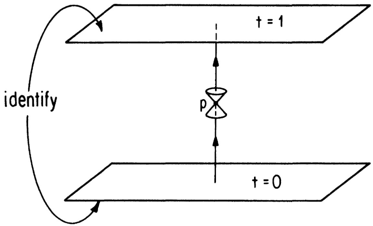


Figure: Prostor-vrijeme sa povredom kronološkog uvjeta

Kauzalno prostor-vrijeme

Ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju kauzalnog tipa

Jako kauzalno prostor-vrijeme

Svaka točka prostor-vremena ima proizvoljno male kauzalno konveksne okoline

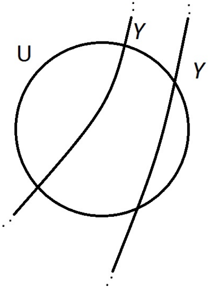


Figure: Primjer gdje U nije kauzalno konveksan skup

Definicije

Uvjeti kauzalnosti

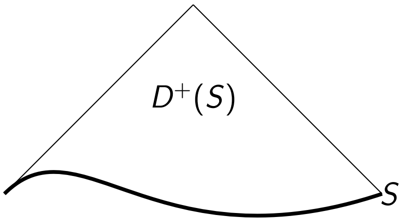


Figure: Buduća domena ovisnosti od S

Ukupna domena ovisnosti je $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$

Cauchyjeva ploha

Σ je Cauchyjeva ploha ako vrijedi $D(\Sigma) = M$

Globalna hiperbolnost

Prostorvrijeme je **globalno hiperbolno** ako posjeduje Cauchyjevu plohu

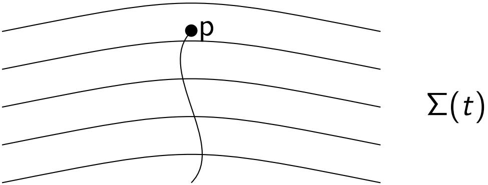


Figure: Svaku Cauchyjevu plohu svaka ne-prostorna krivulja presjeca samo jednom

Definicije

Einsteinova jednadžba

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

Uzimajući trag, i prebacivanjem članova

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right)$$

Slabi energijski uvjet

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0, \text{ za } v^a \text{ vremenski vektor}$$

Slabi energijski uvjet

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0, \text{ za } v^a \text{ vremenski vektor}$$

Pr. Savršeni fluid

$$T^{ab} = (p+\rho)e_0^a e_0^b + pg^{ab} \Rightarrow \rho \geq 0,\ \rho + p > 0$$

Slabi energijski uvjet

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0, \text{ za } v^a \text{ vremenski vektor}$$

Pr. Savršeni fluid

$T^{ab} = (p + \rho)e_0^a e_0^b + pg^{ab} \Rightarrow \rho \geq 0,\ \rho + p > 0$

Svjetlosni energijski uvjet

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0, \text{ za } k^a \text{ vremenski vektor}$$

Slabi energijski uvjet

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0, \text{ za } v^a \text{ vremenski vektor}$$

Pr. Savršeni fluid
$T^{ab} = (p + \rho)e_0^a e_0^b + pg^{ab} \Rightarrow \rho \geq 0,\ \rho + p > 0$

Svjetlosni energijski uvjet

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0, \text{ za } k^a \text{ vremenski vektor}$$

Jaki energijski uvjet

$$(T_{ab} - \tfrac{1}{2}g_{ab}T)v^a v^b \geq 0$$

Kongruencije geodezika

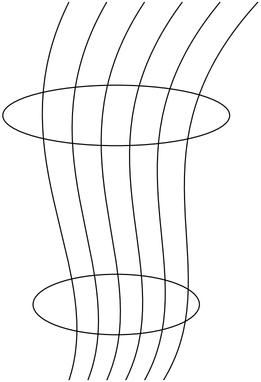


Figure: Kongruencija geodezika

- Tangentni vektor u^a
- Vektor devijacije ξ^a

$\Rightarrow$ Naći ponašanje vektora devijacije uzduž geodezika

Kongruencije geodezika

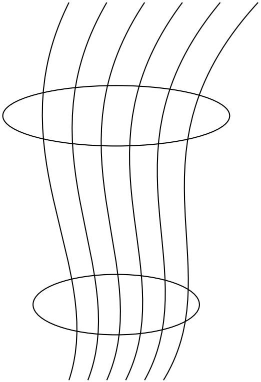


Figure: Kongruencija geodezika

$$\frac{d}{d\tau}\xi^a = u^b \nabla_b \xi^a = \xi^b \nabla_b u^a$$
$$= B^a{}_b \xi^b$$

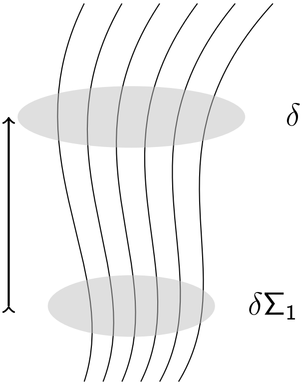
$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}$

θ - **skalar ekspanzije**

σ_{ab} - tenzor smicanja

ω_{ab} - tenzor rotacije

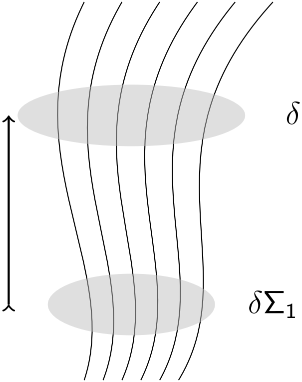
Skalar ekspanzije



$$\theta = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V$$

Figure: Kongruencija geodezika

Skalar ekspanzije

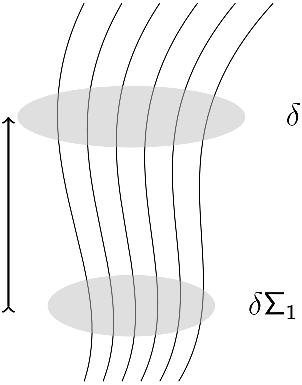


$$\theta = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V$$

$$\delta V = \sqrt{det[h_{ij}]}$$

Figure: Kongruencija geodezika

Skalar ekspanzije



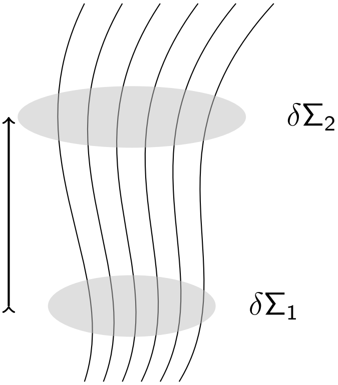
$$\theta = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V$$

$$\delta V = \sqrt{det[h_{ij}]}$$

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V = \frac{1}{2}h^{ij}\frac{dh_{ij}}{d\tau}$$

Figure: Kongruencija geodezika

Skalar ekspanzije



$$\theta = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V$$

$$\delta V = \sqrt{det[h_{ij}]}$$

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V = \frac{1}{2}h^{ij}\frac{dh_{ij}}{d\tau}$$

$$h^{ij}\frac{dh_{ij}}{d\tau} = 2B_{ab}g^{ab} = 2\theta$$

Figure: Kongruencija geodezika

Raychaudhurijeva jednadžba

Evolucija skalara ekspanzije

$$\frac{d}{d\tau}B_{ab} = \dots = -B_{ac}B^{c}{}_{b} - R_{adbc}u^{d}u^{c}$$

Raychaudhurijeva jednadžba

Evolucija skalara ekspanzije

$$\frac{d}{d\tau}B_{ab} = ... = -B_{ac}B^{c}{}_{b} - R_{adbc}u^{d}u^{c}$$

Raychaudhurijeva jednadžba

$$\boldsymbol{\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab}}$$

Važno je primijetiti da su $\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$ i $\omega_{ab}\omega^{ab} \geq 0$.

$$\frac{d}{d\tau} B_{ab} = \ldots = -B_{ac} B^{c}{}_{b} - R_{adbc} u^{d} u^{c}$$

Raychaudhurijeva jednadžba

$$\boldsymbol{\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab}}$$

Važno je primijetiti da su $\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$ i $\omega_{ab}\omega^{ab} \geq 0$.

Raychaudhurijeva jednadžba za svjetlosne geodezike

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{2}\theta^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab}$$

Teorem o fokusiranju

Neka je kongruencija vremenskih geodezika okomita na familiju prostornih površina ($\omega_{ab} = 0$) i neka vrijedi jaki energijski uvjet

$$R_{ab}u^a u^b \geqq 0$$

. Tada Raychaudhurijeva jednadžba povlači:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}u^a u^b \leq 0$$

"Gravitacija je privlačna sila"

Teorem o fokusiranju

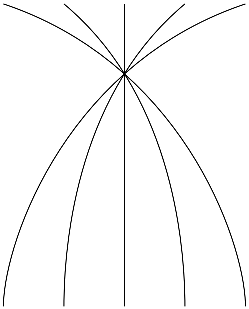


Figure: Kaustik u kongruenciji

- Jaki energijski uvjet, $\omega_{ab} = 0$

$$\Rightarrow$$

Teorem o fokusiranju

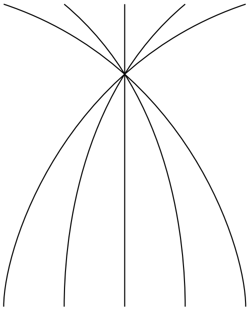


Figure: Kaustik u kongruenciji

- Jaki energijski uvjet, $\omega_{ab} = 0$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2$$

Teorem o fokusiranju

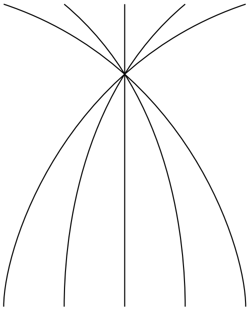


Figure: Kaustik u kongruenciji

- Jaki energijski uvjet, $\omega_{ab} = 0$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2$$

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{\tau}{3}$$

$(\theta_0 < 0)$ u konačnom vremenu $(\tau \leq 3/|\theta_0)$ razviti kaustik $(\theta(\tau) \to -\infty)$

Neka postoji barem jedan geodezik koji je beskrajan barem u jednom smjeru. Ako je njegova afina duljina konačna, prostor-vrijeme je singularno

Teoremi o singularitetima

Konjugirane točke

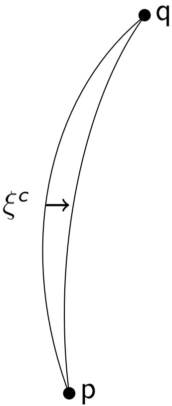


Figure: Par konjugiranih točaka

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^c = u^a\nabla_a(u^b\nabla_b\xi^c)$$

Teoremi o singularitetima

Konjugirane točke

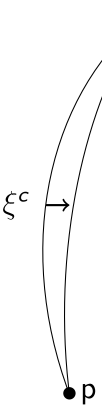


Figure: Par konjugiranih točaka

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^c = u^a\nabla_a(u^b\nabla_b\xi^c)$$

ξ^c nužno iščezava u p i $q \Rightarrow p$ i q su konjugirane

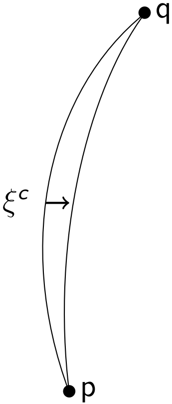


Figure: Par konjugiranih točaka

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^c = u^a\nabla_a(u^b\nabla_b\xi^c)$$

ξ^c nužno iščezava u p i $q \Rightarrow p$ i q su konjugirane

- Geodezik nije maksimalne duljine

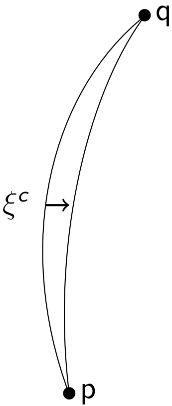


Figure: Par konjugiranih točaka

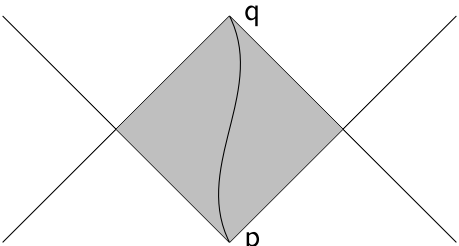
$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^c = u^a\nabla_a(u^b\nabla_b\xi^c)$$

ξ^c nužno iščezava u p i q $\Rightarrow$ p i q su konjugirane

- Geodezik nije maksimalne duljine
- Kongruencija razvija kaustik (vrijedi i obrat)

Globalna hiperbolnost $\Rightarrow \exists\gamma$ koja je maksimalne duljine između p i q.

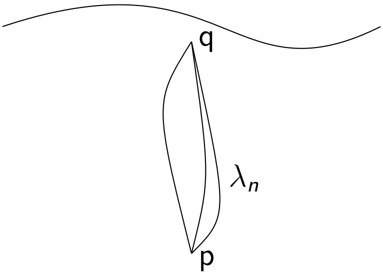
$$J^+(p) \cap J^-(q)$$



Teoremi o singularitetima

Dokaz:

- $C(p,q)$ (skup kauzalnih krivulja između p i q je kompaktan)



$f : C(kompaktan) \rightarrow \mathbb{R}$ je omeđeno, postiže min. i maks. vrijednosti

Teorem o singularnosti globalno hiperbolnog prostor-vremena

- (M, g_{ab}) globalno hiperbolno (1)
- vrijedi jaki energijski uvjet ($R_{ab}u^a u^b \geq 0 \ \forall u^a$ vremenskog tipa). (2)
- $\exists$ glatka (ili barem C^2) prostorna Cauchyjeva ploha Σ td. za ortogonalnu prošlosno orjentiranu kongruenciju od Σ vrijedi $K \leq C < 0$ svugdje na Σ. ($K = \theta_0$) (3)

$\Rightarrow$ Tada niti jedan prošlosno orjentirani geodezik od Σ nema duljinu veću od $3/|C|$

Dokaz:
pp. $\exists \lambda$ duljine $> 3/|C|$ od Σ do p.
Neka je $p \in \lambda$.

Dokaz:
pp. $\exists\lambda$ duljine $> 3/|C|$ od Σ do p.
Neka je $p \in \lambda$.
$\Rightarrow$ (po (1)) $\exists$ krivulja maksimalne duljine ($> 3/|C|$)

Dokaz:
pp. $\exists\lambda$ duljine $> 3/|C|$ od Σ do p.
Neka je $p \in \lambda$.
$\Rightarrow$ (po (1)) $\exists$ krivulja maksimalne duljine ($> 3/|C|$)
Nužan uvjet - nema konjugiranih točaka između p i Σ.

Dokaz:

pp. $\exists\lambda$ duljine $> 3/|C|$ od Σ do p.

Neka je $p \in \lambda$.

$\Rightarrow$ (po (1)) $\exists$ krivulja maksimalne duljine ($> 3/|C|$)

Nužan uvjet - nema konjugiranih točaka između p i Σ.

Teorem o fokusiranju -> Za $\theta_0 < 0$ $\theta \to -\infty$ unutar $3/|C|$.

Dokaz:
pp. $\exists\lambda$ duljine $> 3/|C|$ od Σ do p.
Neka je $p \in \lambda$.
$\Rightarrow$ (po (1)) $\exists$ krivulja maksimalne duljine ($> 3/|C|$)
Nužan uvjet - nema konjugiranih točaka između p i Σ.
Teorem o fokusiranju -> Za $\theta_0 < 0$ $\theta \to -\infty$ unutar $3/|C|$. $\Rightarrow$
Razvit će konjugiranu točku $\Rightarrow$ duljina mora biti $< 3/|C|$. $\square$

Teoremi o singularitetima

Teorem o singularnosti na rubu kompaktnog skupa narušene kronalnosti

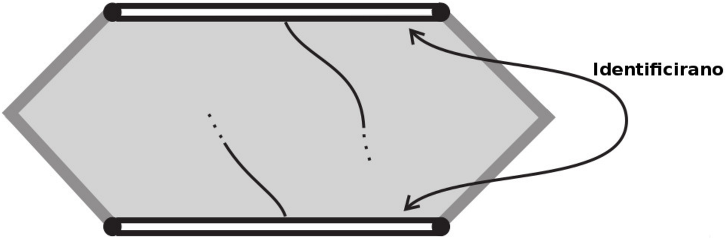


Figure: Skup narusene kronalnosti *vl*

Teorem o generičnosti

- (M, g) - potpuno po svjetlosnim geodezicima
- vrijedi svjetlosni energijski uvjet $R_{ab}k^a k^b \geq 0$
- vrijedi uvjet svjetlosne generičnosti $k^c k^d k_{[a}R_{b]cd[e}k_{f]}$

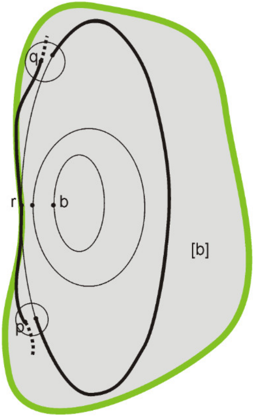
$\Rightarrow$ Tada svaki geodezik posjeduje konjugirane točke

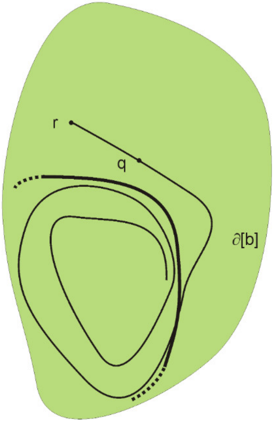
Teorem o singularnosti na rubu kompaktnog skupa narušene kronalnosti

- (M, g) posjeduje kompaktni skup narušene kronalnosti
- vrijedi svjetlosni energijski uvjet $R_{ab}k^a k^b \geq 0$
- vrijedi uvjet svjetlosne generičnosti $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]}$

$\Rightarrow$ Tada je (M, g_{ab}) singularno

Dokaz:





Literatura

- S.W. Hawking, G.F.R. Ellis *The large scale structure of space-time* 1973: Cambridge University Press
- J.K. Beeem, P.E. Erlich, K.L. Easly *Global Lorentz Geometry* Second edition, 1996: Marcel Dekker, Inc., New York
- Robert M. Wald *General Relativity* 1984: The University of Chicago Press
- Loring W. Tu *An introduction to Manifolds* Second edition, 2011: Springer