Ergopodručja u općoj teoriji relativnosti

Ana Bokulić

Mentor: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Lense-Thirringov efekt

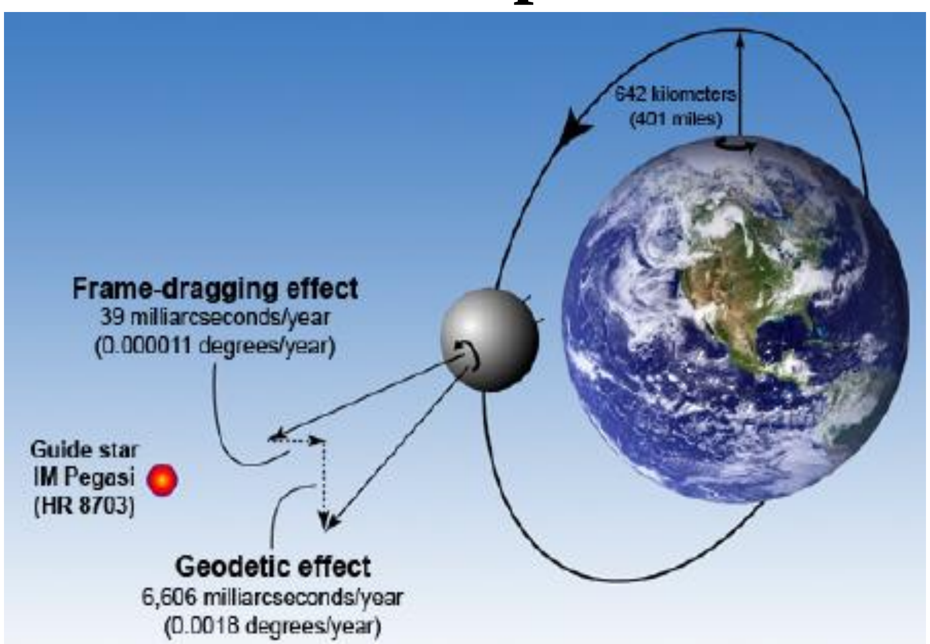
- Masivni objekti – zakrivljuju prostorvrijeme

→ **geodetski efekt**

- Rotirajući objekti – povlače okolno prostorvrijeme

→ **Lense-Thirringov efekt** – ekstreman u ergopodručju

Eksperiment Gravity Probe B



	Izmjereno	Teorijsko predviđanje
Geodetska precesija	6602±18	6606
Lense-Thirringova precesija	37.2±7.2	39.2

Ergopodručje

- Definicija:
  - (M, g_{ab}) – stacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme
  - k^a – Killingovo vektorsko polje, vremenskog tipa u $O \subset M$
  - $\mathscr{E} \subset M$ naziva se ergopodručjem ako je:

    a) k^a prostornog tipa u $\mathscr{E}$

    b) $\partial \mathscr{E} \bigcap \partial O \neq 0$

    c) $I^+(\mathscr{I}^-) \bigcap I^-(\mathscr{I}^+) \bigcap \mathscr{E} \neq 0$

Ergopodručje

- Fizikalna interpretacija:

a) U ergopodručju nema stacionarnih promatrača

- uvjet stacionarnosti: $g_{tt}(u^t)^2=-1$
- unutar ergopodručja: $k^a k_a=g_{tt}>0$

b) Postoji statička granica, ergoploha, na kojoj je $g_{tt}=0$

c) Čestice iz asimptotskog područja mogu ući u ergopodručje i obrnuto

Ergopodručje

- Teorem (Carter-Vishveshwara)
  - K^a Killingovo vektorsko polje
  - $S[K]$ hiperploha t.d. vrijedi:

    $N=K^aK_a=0$ i $dN\neq 0$ na $S[K]$
  - $S[K]$ – svjetlosnog tipa akko je Killingovo vektorsko polje ortogonalno na $S[K]$
- Posljedica: u statičnom prostorvremenu ergoploha se podudara s Killingovim horizontom

Vakuumska rješenja

Kerrovo rješenje

- Osnosimetrična, rotirajuća, nenabijena crna rupa

$$ds^2 = -dt^2\left(1-\frac{2Mr}{\rho^2}\right) - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}dt\,d\phi$$

$$+\left(r^2+a^2-\frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$a = J/M, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

- $\rho=0$ prstenasti singularitet: $r=0$, $\theta=\pi/2$
- $\Delta=0$ Killingovi horizonti $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$

  Killingovih vektorskih polja $\xi_\pm = k + \left(\frac{a}{r_\pm^2 + a^2}\right)m$

Vakuumska rješenja

Kerrovo rješenje

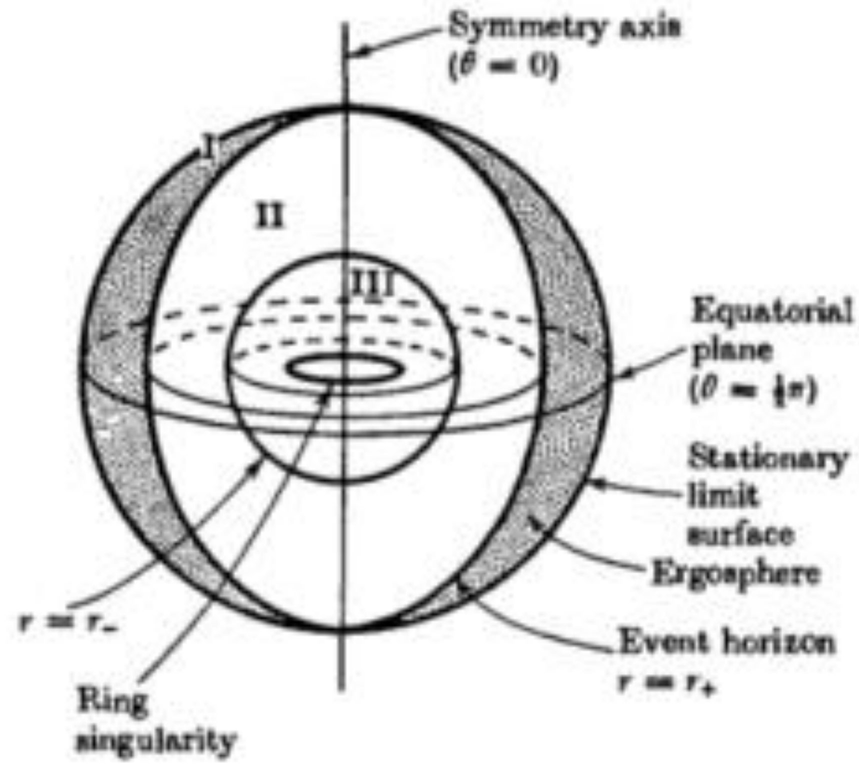
- Ergoploha:

$$r_+^E(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$$

- Granice ergopodručja:

$$r_+ < r < r_+^E(\theta)$$

- $a \to 0$: Schwarzschildovo rješenje



Struktura Kerrovog prostorvremena

Vakuumska rješenja

Kerr-Newmanovo rješenje

- Osnosimetrična, rotirajuća i nabijena crna rupa

$$ds^2 = -dt^2 \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} - 2a\sin^2\theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho^2} dt d\phi$$

$$+ \frac{r^2 + a^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

- *Δ=0* Killingovi horizonti: $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$
- Ergoploha: $r_+^E(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta - Q^2}$

Vakuumska rješenja

Kerr-Newman-NUT i Kerr-NUT rješenje

- Osnosimetrična, rotirajuća, nabijena crna rupa s dodatnim NUT nabojem *l*

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - P\,d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2 + a^2 + l^2)d\phi - a dt)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 - l^2, \quad P = a\sin^2\theta - 2l\cos\theta, \quad \rho^2 = r^2 + (l + a\cos\theta)^2$$

- $\rho=0$ prstenasti singularitet: $r=0$, $\cos\theta=-l/a$
- $\Delta=0$ Killingovi horizonti: $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 + l^2 - Q^2 - a^2}$
- Ergoploha: $r_+^E(\theta) = M + \sqrt{M^2 + l^2 - Q^2 - a^2\cos^2\theta}$
- Za $Q=0$ – Kerr-NUT

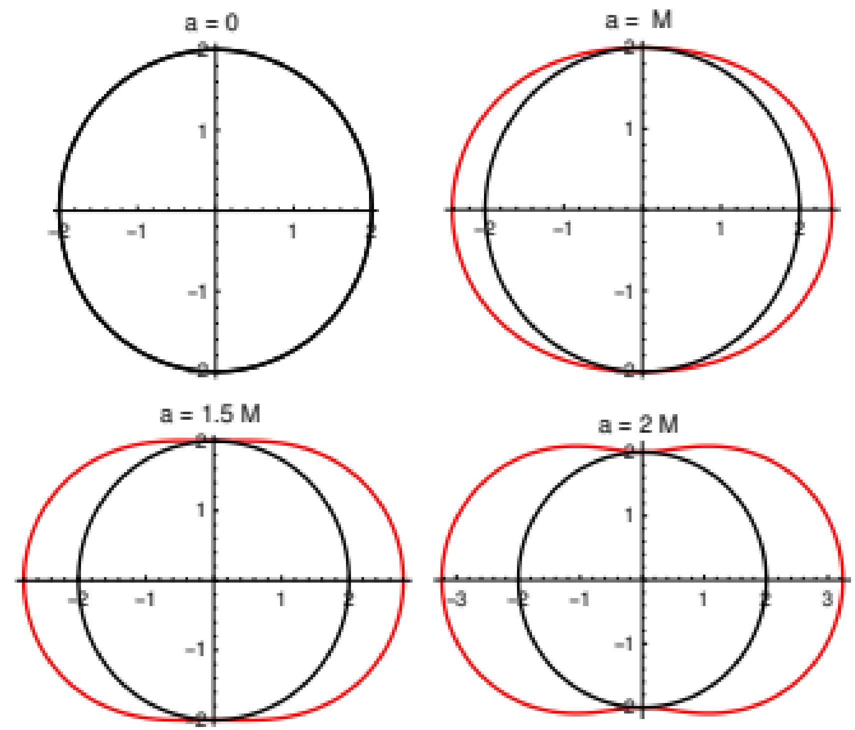
Vakuumska rješenja

Kerr-Newman-NUT i Kerr-NUT rješenje

Specijalni slučaj: $Q^2=l^2-a^2$

- Horizont događaja: $r=2M$
- Za $l>a$ nema singulariteta
- Ergoploha:

$$r_+^E(\theta) = M + \sqrt{M^2 + a^2 \sin^2 \theta}$$



Veličina ergopodručja (crveno) povećava se porastom parametra *a*, horizont (crno) je Schwarzschildov, r=2M

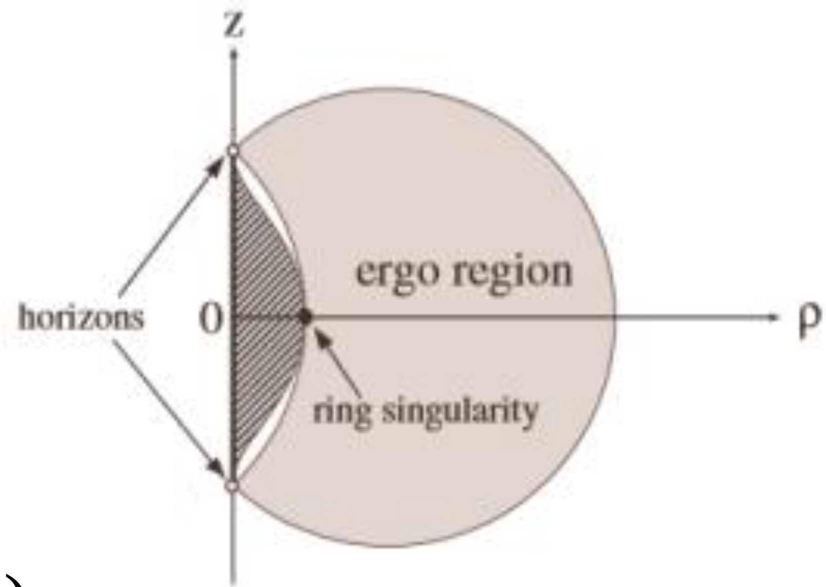
Vakuumska rješenja

Tomimatsu-Sato rješenje

$$ds^2 = Bp^{-4}(x^2 - y^2)^{-4}(dz^2 + d\rho^2)$$
$$- AB^{-1}(dt - 2mqA^{-1}C(1 - y^2)d\phi)^2 + \rho^2 BA^{-1} d\phi^2$$

- *B(x,y=0)=0* prstenasti singularitet
- Nema horizonta događaja
- $g_{\phi\phi}<0$ zatvorene vremenske krivulje
- Ergoploha: $x^2 = 1 + \lambda^2(1 - y^2)$

$$\left(p^2\lambda^4 + q^2 - 4pq\lambda(\lambda^2 + 1) = 0\right)$$



Struktura Tomimatsu-Sato prostorvremena

Nevakuumska rješenja

Rotirajuće zvijezde

- U aproksimaciji spore rotacije:

$$g_{tt} = -e^{2\phi(r)}(1 + h(r,\theta)) + \omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

- Za kompaktne zvijezde:

$e^{2\phi(r)} \ll 1$, $h(r,\theta)$ je reda veličine $\omega^2 r^2$

$\longrightarrow$ zanemarujemo $h(r,\theta)$

- Ergoploha: $-e^{2\phi(r)} + \omega^2 r^2 \sin^2\theta = 0$
- Ergopodručje je torus
- Ovakva su rješenja nestabilna – realistične zvijezde nemaju ergopodručje

Nevakuumska rješenja

Rotirajuće crvotočine

- Osnosimetrično i stacionarno prostorvrijeme:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{\mu} dr^2 + r^2 K^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta (d\phi - \omega dt)^2)$$

$R(r,\theta) = rK(r,\theta)$ - radijalna udaljenost, $\mu = -\ln\left(1 - \frac{b(r,\theta)}{r}\right)$

- "grlo" crvotočine: $r=b$

  $\partial b / \partial\theta \big|_{r=b} = 0 \longrightarrow$ bez singulariteta

  $\partial b / \partial r \big|_{r=b} < 1 \longrightarrow$ određuje oblik crvotočine

- a je angularni moment ako: $\omega = \frac{2a}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$

- Energijski uvjet $R_{ab} v^a v^b \geq 0$ narušen u području grla

Nevakuumska rješenja

Rotirajuće crvotočine

- Prostorvrijeme mora biti asimptotski ravno, za $r \to \infty$:

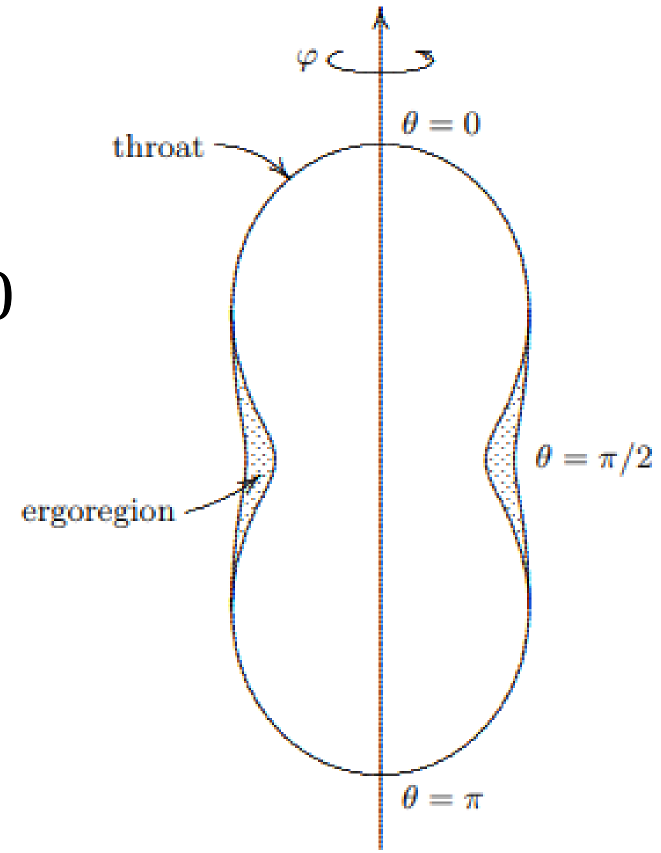
$$N \to 1, \quad b/r \to 0, \quad K \to 1, \quad \omega \to 0$$

- Biramo:

$$N = K = 1 + \frac{(4a\cos\theta)^2}{r}, \quad b = 1, \quad \omega = \frac{2a}{r^3}$$

- Ergopodručje:

$$r^2 = |2a\sin\theta| > 1 \longrightarrow |a| > 1/2$$



Poprečni presjek grla crvotočine

Ekstrakcija energije

Penroseov proces

- Stacionarno prostorvrijeme – sačuvana je energija: $E = -p^{\mu}k_{\mu}$
- Unutar ergopodručja – moguće $E<0$
- p_0 – impuls čestice koja se raspada u dvije čestice impulsa p_1 i p_2
- Zakon očuvanja: $p_0^{\mu} = p_1^{\mu} + p_2^{\mu}$
- Ako $E_2 = -p_2^{\mu}k_{\mu} < 0,\ \ E_1 = E_0 - E_2 > E_0$
- Dobivena je energija na račun rotacijske energije crne rupe

Ekstrakcija energije

Efikasnost Penroseovog procesa

- Čestice s $E<0$ imaju i $J<0$ – angularni moment crne rupe se smanjuje
- Masa crne rupe ne može postati manja od ireducibilne mase:

$$M_{irr}^2 = \frac{1}{2}M^2 + \sqrt{M^4 + J^2} \longrightarrow M^2 = M_{irr}^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2} \geq M_{irr}^2$$

- Dobivena energija: $\Delta E = \Delta M = M_0 - M_{irr}(M_0, J_0)$
  - Maksimalna za $M_0^2 = J_0$:

$$\Delta M_{\max} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) M_0 \approx 0.29 M_0$$

Ekstrakcija energije

Penroseov proces i 2. zakon termodinamike crnih rupa

- 2. zakon termodinamike: $\delta A_H \geq 0$
- Kerrova crna rupa: $A = 16\pi M_{irr}^2$
- ξ_+ - svjetlosnog tipa i buduće usmjeren na horizontu: $0 \geq \xi_+^a p_a = -E + \Omega_H L$
- Nakon apsorpcije čestice: $\delta M = E$ i $\delta J = L$
- Slijedi: $\delta M \geq \Omega_H \delta J$, tj. $\delta M_{irr} \geq 0$

Ekstrakcija energije

Superradiance

- Amplituda vala reflektiranog od horizonta može biti veća od amplitude upadnog vala
- Teukolskyjeva jednadžba – opisuje interakciju polja s crnom rupom
  - U Kerrovom prostorvremenu: $$\frac{d^2{}_s\chi_{lm}}{dr_*^2} + {}_sV_{lm}\,{}_s\chi_{lm} = 0$$

$$\frac{d}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2}\frac{d}{dr}, \quad \chi = (r^2 + a^2)^{1/2}\Delta^{s/2}R$$

  - ${}_sV_{lm}$ – kompleksni efektivni potencijal
  - Asimptotska rješenja:

$$\chi \propto r^{\mp s} e^{\pm i\omega r_*}, \quad r \to \infty$$

$$\chi \propto \Delta^{\pm s/2} e^{\pm i\bar{\omega} r_*}, \quad r \to r_+ \qquad (\bar{\omega} = \omega - m\Omega_H)$$

Ekstrakcija energije

Superradiance

- Skalarno polje (*s=0*):
  - Asimptotska rješenja:

$$\chi \propto e^{-i\varpi r_*}, \quad r \to r_+$$

$$\chi \propto A_{out}(\omega)e^{i\omega r_*} + A_{in}(\omega)e^{-i\omega r_*}, \quad r \to \infty$$

  - Koeficijent refleksije: $R=A_{out}/A_{in}$
  - Koeficijent transmisije: $T=1/A_{in}$
  - Iz Wronskijana: $\left(1-\frac{m\Omega_H}{\omega}\right)|T|^2 = 1-|R|^2$

$\longrightarrow$ $R>1$ ako $0<\omega<m\Omega_H$

Ekstrakcija energije

Superradiance i 2. zakon termodinamike crnih rupa

- 1. zakon termodinamike: $\delta M = \frac{k}{8\pi}\delta A_H + \Omega_H \delta J$
- Omjer toka angularnog momenta i energije za skalarno polje: $\mathscr{L}/\mathscr{E} = m/\omega$
- Promjena parametara crne rupe: $\delta J/\delta M = m/\omega$

$$\longrightarrow \delta M = \frac{k\omega}{8\pi} \frac{\delta A_H}{(\omega - \Omega_H m)}$$

- $\delta A_H \geq 0$, energija se dobiva za $\delta M < 0$: $\omega < \Omega_H m$

Hvala na pažnji!