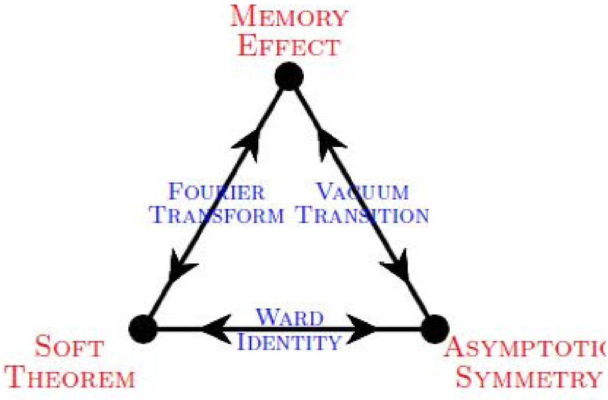
Infracrvena struktura gravitacije

Nikola Crnković
mentor: doc. dr. sc. Maro Cvitan
Fizički odsjek, PMF, Bijenička cesta 32, 10 000 Zagreb

January 29, 2018

- Infracrveni efekti su pojave koje imaju vrlo malu energiju i zbog toga se ne mogu lagano detektirati u eksperimentima.



Slika: IC trokut za sve bezmasene čestice.

Uvod u gravitaciju

- metrika: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
- Minkowskijev prostor u Kartezijevim koordinatama:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + (d\vec{x})^2 \Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ∇_a - kovarijantna derivacija-vrijedi u svim sustavima
- $\nabla_a \phi = \partial_a \phi$
- $\nabla_b x^a = \partial_b x^a + \Gamma^a_{bc} x^c$
- $\nabla_c W^{ab} = \partial_c W^{ab} + \Gamma^a_{cd} W^{ab} + \Gamma^b_{ca} W^{ad}$
- Raditi ćemo s $c = \hbar = 1$

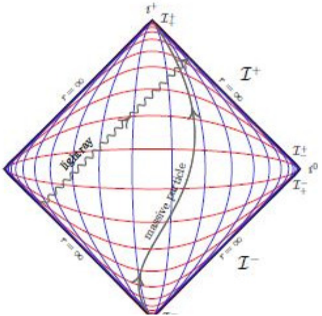
- Einstenova jednadžba:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G T^{M}_{ab}. \tag{1}$$

- T^{M}_{ab} - tenzor energije i momenta (kratko tenzor stresa)
- G - gravitacijska konstanta
- R_{ab} Riccijev tenzor
- R - Riccijev skalar
- gravitacijski valovi: $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$

$$\partial_c \partial^c h_{ab} = 4\pi T^{M}_{ab} \tag{2}$$

Penroseov dijagram



Slika: Penrose dijagram Minkowskijeveg prostora. Crvene linije predstavljaju površine konstantnog t, dok plave linije predstavljaju površine konstantnog r. Puna siva linija je svjetska linija masivne čestice koja se kreće pri konstantnoj brzini, a puna valovita siva linija je svjetska linija svjetlosne zrake. Svaka S^2 konstantog $(r > 0; t)$ prikazana je s dvije točke, jedna s lijeve strane i druga s desne strane, koje se razmjenjuju antipodalnim preslikavanjem. Beskonačna budućnost i prošlost svjetlosnog tipa su označene s $\mathcal{I}^{\pm}$,a njihove četiri S^2 granične komponente s $\mathcal{I}^{\pm}_{\pm}$. Točke $i^{\pm}$ su beskonačna prošlost i budućnost vremenskog tipa, dok je točka i^0 prostorna beskonačnost.

Bondijeve koordinate

- retardirane Bondijeve koordinate:

$$\vec{x} = r\hat{x}, \quad t = u + r, \quad x^1 + ix^2 = \frac{2rz}{1+z\tilde{z}}, \quad x^3 = r\frac{1-z\tilde{z}}{1+z\tilde{z}}. \tag{3}$$

- s inverzom:

$$u = t - r, \quad z = \frac{x^1 + ix^2}{x^3 + r}. \tag{4}$$

- z je kompleksna koordinata na jediničnoj sferi S^2 koja ima metriku $\gamma_{z\tilde{z}} = \frac{2}{(1+z\tilde{z})^2}$
- sjeverni pol je $z = 0$, a južni $z = \infty$, ekvator je u $z\tilde{z} = 1$ i $z \to -\frac{1}{\tilde{z}}$ je antipodalna točka.

$$ds^2 = -dt^2 + (d\vec{x})^2 \Rightarrow -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z} \tag{5}$$

Bondijeve koordinate

- napredne Bondijeve koordinate:

$$\vec{x} = -r\hat{x} \quad t = v - r, \quad x^1 + ix^2 = -\frac{2rz}{1 + z\tilde{z}}, \quad x^3 = -r\frac{1 - z\tilde{z}}{1 + z\tilde{z}}, \tag{6}$$

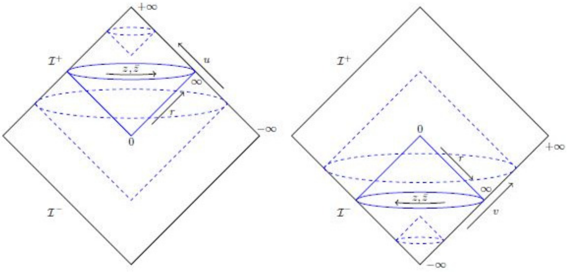
- s inverzom:

$$v = t + r, \quad z = \frac{x^1 + ix^2}{x^3 - r} \tag{7}$$

$$ds^2 = -dv^2 + 2dvdr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z}. \tag{8}$$

- antipodalne transforamcije:

$$v = u + 2r, \quad z \to -\frac{1}{\tilde{z}} \tag{9}$$



Slika: $\mathcal{I}^+$ je parametriziran retardiranim vremenom u i sfernim koordinatama $(z, \tilde{z})$ u retardiranim Bondijevim koordinatama (lijevo), dok je $\mathcal{I}^-$ parametriziran naprednim vremenom v i sferičnim koordinatama $(z, \tilde{z})$ u naprednim Bondijevim koordinatama. Napredne i retardirane koordinate su izabrane tako da su povezane antipodalnim preslikavanjem na sferi. Ako uzmemo svjetlosnu zraku koja prelazi Minkowskijev prostor, tada vrijednost z-a na kojoj svjetlost počinje u naprednim koordinatama bit će ista kao i vrijednost z na kojoj završava u retardiranim koordinatama.

Asimptotski ravno prostor-vrijeme

Općenita Lorentzianova metrika se može lokalno zapisati u retardiranim Bondi koordinatama:

$$ds^2 = -Udu^2 - 2e^{2\beta}dudr + g_{AB}\left(dx^A + \frac{U^A}{2}du\right)\left(dx^B + \frac{U^B}{2}du\right), \quad (10)$$

uz Bondijevo baždarenje:

$$\partial_r det\left(\frac{g_{AB}}{r^2}\right) = 0, \quad g_{rr} = g_{rA} = 0. \quad (11)$$

- $A, B = z, \tilde{z}$.
- Razvijemo metriku oko $\mathcal{I}^+$ $(r = \infty)$

$$g_{uu} \approx -1 + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}) + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}), \quad g_{ur} \approx -1 + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}), \quad g_{rA} = g_{rr} = 0$$
$$g_{uA} \approx \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}), \quad g_{AB} \approx r^2\gamma_{AB} + \mathcal{O}(\mathrm{r}) + \mathcal{O}(1) \quad (12)$$

- Nema *a priori* preferirani način utvrđivanja onoga što komponente moraju biti. Obično su odabrane kako bi bile dovoljno slabe da dopuštaju sva zanimljiva rješenja koja uključuju gravitacijske valove, ali dovoljno jaka da se isključe nefizička rješenja kao ona s beskonačnim energijama.
- Za uvjet da dobijemo gravitacijske valove metrika je oblika:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z} + \\
&+ \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{zz}dz^2 + rC_{\tilde{z}\tilde{z}}d\tilde{z}^2 + D^z C_{zz}dudz + D^{\tilde{z}} C_{\tilde{z}\tilde{z}}dud\tilde{z} + k.k + \dots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

- D_A - kovarijantna derivacija s obzirom metrike na jediničnoj sferi γ_{AB}.
- $m_B = m_B(u, z, \tilde{z})$ - Bondijeva gustoća mase
- $C_{AB} = C_{AB}(u, z, \tilde{z})$ - opisuje gravitacijske valove
- $N_{AB} = \partial_u C_{AB}$ - Bondijev tenzor, opisuje gravitacijsko zračenje koji prolazi kroz $\mathcal{I}^+$

- Pretpostavljamo da je metrika vođena Einstenovom jednadžbom:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T^M_{\mu\nu}. \tag{14}$$

- Integral T^M_{uu} po površini dobivamo tok energije, tako da ako želimo isključiti rješenja s beskonačnim energijama moramo poštivati :

$$T^M_{uu} \sim \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}) \Rightarrow \partial_u m_B = \frac{1}{4}[D_z^2 N^{zz} + D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}}] - T_{uu} \tag{15}$$

gdje je :

$$T_{uu} = \frac{1}{4} N_{zz} N^{zz} + 4\pi \lim_{r\to\infty} [r^2 T^M_{uu}]. \tag{16}$$

- Izraz T_{uu} sadrži korekcije iz tenzora stresa za linearizirane gravitacijske valove.

- N_{zz} se trivijalno određuje C_{AB} do integrirane funkcije
- Uz uvjet da je u vakuumu $N_{AB} = 0$, $T^M_{uA} = 0$ i iz (15) dobivamo:

$$C_{zz}|_{\mathcal{I}^+_-} = -2D_z^2 C, \tag{17}$$

- gdje je $C(z, \tilde{z})$ neka funkcija na $\mathcal{I}^+_-$.
- Cauchyjev skup podataka na $\mathcal{I}^+$ uključuje:
  $$\{N_{AB\mathcal{I}^+_-}(u, z, \tilde{z}), C(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, m_B(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, C_{AB}(u, z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}\}. \tag{18}$$

- Sličan skup jednadžbi primjenjuje se blizu $\mathcal{I}^-$

$$ds^2 = -dv^2 + 2dvdr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z} + \frac{2m_B^-}{r}dv^2 + rC^-_{zz}dz^2 + rC^-_{\tilde{z}\tilde{z}}d\tilde{z}^2 + \dots, \tag{19}$$

- Analog Cauchyjevom skup podataka (18) za $\mathcal{I}^-$ je:

$$\{N_{AB}{}^-_{\mathcal{I}^-_+}(v, z, \tilde{z}), C^-(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+}, m^-_B(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+}, C^-_{AB}(v, z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+}\}. \tag{20}$$

Supertranslacije

- Liejeva derivacija - $\mathcal{L}$ promjena tenzorskog polja uzduž toka nekog drugog vektorskog polja x^a
- $\mathcal{L}_x \phi = x^a \partial_a$
- $\mathcal{L}_x Y_a = x^b \partial_b Y_a + Y_a \partial_a (x^b)$
- Prostor ima egzaktne simetrije opisane pomoću Killingovog vektorskog polja ξ, ako $\delta g_{ab} = \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$
- Asimptotske simetrije: $\delta g_{ab} = \mathcal{L}_\xi g_{ab} \approx \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}) + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}) + \dots$
- Za neko polje F kažemo da je naslijedilo simetriju prostora ako njegova derivacija po tom isto Killingovom polju takoder iščezava: $\mathcal{L}_\xi F = 0$
- U kvantoj mehanici ako neki naboj uzrokuje (infinitezimanlu) simetriju na nekom polju, tada je $\delta F = [Q, F] = i \mathcal{L}_\xi F$.

- Uzmimo da Kilingovo polje ima sljedeća ograničenja

$$\zeta^u, \zeta^r \sim \mathcal{O}(1), \quad \zeta^A \sim \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}) \tag{21}$$

- Ovaj uvjet eliminira 6 Lorentzovih generatora (boostove i rotacije), koji rastu s r u beskonačnosti.

$$\Rightarrow \zeta_f = (f, D_z^2 f, -\frac{1}{r} D^z f, -\frac{1}{r} D^{\tilde{z}} f), + \ldots, \tag{22}$$

- $f(z, \tilde{z})$ - bilo koja funkcija
- Transformacije generirane s (22) se zovu *supertranslacije*.
- $f(z, \tilde{z}) = konst$ (22) generira u translaciju
- Ako uzmemo da je $f(z, \tilde{z}) = Y_m^1$ ($l = 1$ harmonik) na sferi dobivamo tri prostorne translacije

- Djelovanjem supertranslacija na $\mathcal{I}^+$ polja m_B , N_{AB}, C i C_{AB} dobivamo:

$$\mathcal{L}_\zeta N_{AB} = f\partial_u N_{AB} \tag{23}$$

$$\mathcal{L}_\zeta m_B = f\partial_u m_B + \frac{1}{4}(N^{AB}D_A D_B f + 2D_A f D_B N^{AB}), \tag{24}$$

$$\mathcal{L}_\zeta C_{AB} = fN_{AB} - 2D^2 f, \tag{25}$$

$$\mathcal{L}_\zeta C = f. \tag{26}$$

- Simetrije ne mogu promijeniti fizikalnu masu ili stvoriti gravitacijske valove.
- C_{AB} na $\mathcal{I}^+$ nije invarijantna pod supertranslacijama. Drugim riječima, supertranslacijska simetrija spontano je slomljena i mijenja fizikalno stanje sustava.
- Pri izboru $f = C$, C je Goldstoneov bozon spontano razbijene supertranslacijske simetrije, koji parametrizira nejednaki gravitacijski vakuum. Ovi vakuumi imaju različite kutne momente ('problem kutnoga momenta' u OTR-u).

Očuvani naboji

$$m_B^-(z,\tilde{z})|_{\mathcal{I}_+^-} = m_B(z,\tilde{z})|_{\mathcal{I}_-^+}, \quad C^-(z,\tilde{z})|_{\mathcal{I}_+^-} = C(z,\tilde{z})|_{\mathcal{I}_-^+},$$
$$f^-(z,\tilde{z})|_{\mathcal{I}_+^-} = f(z,\tilde{z})|_{\mathcal{I}_-^+} \tag{27}$$

- Obitelj očuvanih naboja - supertranslatirani naboji:

$$Q_f^+ = \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}_-^+} dz^2 \gamma_{z\tilde{z}} f m_B, \quad Q_f^- = \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}_+^-} dz^2 \gamma_{z\tilde{z}} f m_B \tag{28}$$

- Granični uvjeti (27) podrazumijevaju zakone očuvanja:

$$Q_f^+ = Q_f^- \tag{29}$$

- Jednadžba (29) nam daje beskonačno mnogo zakona oćuvanja, jedan za svaku funkciju f.
- $f = konst$ - očuvanje ukupne energije
- $f = Y_m^1$ - očuvanje momenta.

- Primjenom komutatora s $Q_f^{\pm}$ s $C_{AB}^{\pm}$, $C^{\pm}$, $m_B^{\pm}$ i na C_{AB} dobivamo:

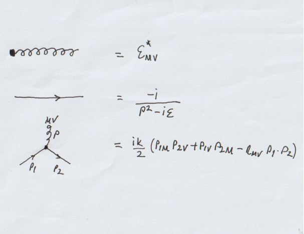
$$[Q_f^{\pm}, C_{AB}^{\pm}] = i\mathcal{L}_{\zeta} C_{AB}^{\pm}, \tag{30}$$
$$[Q_f^{\pm}, C^{\pm}] = i\mathcal{L}_{\zeta} C^{\pm}, \tag{31}$$
$$[Q_f^{\pm}, N_{AB}^{\pm}] = i\mathcal{L}_{\zeta} N_{AB}^{\pm}, \tag{32}$$
$$[Q_f^{\pm}, m_B^{\pm}] = i\mathcal{L}_{\zeta} m_B^{\pm}. \tag{33}$$

- Supertranslatirani naboji generiraju simetrije na poljima C_{AB}, C, m_B i na C_{AB}, iako mijenjaju fizikalno stanje sustava.

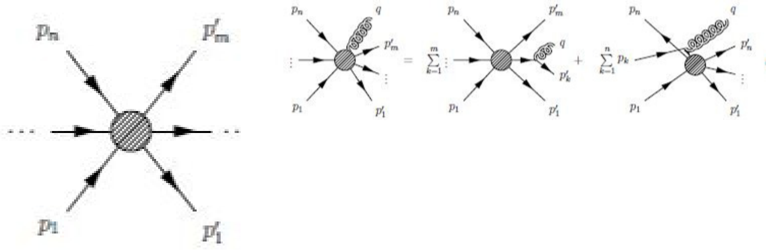
Pregled teorema o mekanim raspršenjima

$$\mathcal{L} = \frac{2R}{k^2} + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{k}{2}h^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi\right], \qquad (34)$$

- $k^2 = 32\pi G$
- $h_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})/k$ gravitonsko polje koje se veže za materiju i normalizirano tako da nema konstante G u kinetičkom članu.
- Graviton ima 4-moment q^μ i polarizacijski tenzor $\epsilon_{\mu\nu}$ koji zadovoljavaju: $\epsilon_{\mu\nu}q^\mu = 0, \quad \epsilon^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0, \quad q^2 = 0$



Slika: Feynmanovi dijagrami za graviton.



Slika: (Lijevo):Raspršenje n dolaznih (sa momentima $p_1, \dots, p_n$) i m odlaznih (sa momentima $p'_1, \dots, p'_n$) bezmasivnih skalarnih čestica; (Desno): Dominanti dijagrami pri raspršenju mekanih gravitona.

- Promotrimo n dolaznih (s momentima $p_1, \dots, p_n$) i m odlaznih (s momentima $p'_1, \dots, p'_n$) bezmasivnih skalarnih čestica.
- Promotrimo realni (virtualni ne pridonose polu) mekani graviton ($q^\mu \to 0$) koji se raspršuje od odlaznih ili dolaznih čestica.

$$\Rightarrow \mathcal{M}(q,\{p'_k\},\{p_k\}) = \frac{k}{2}\Big[\sum_{k=1}^{m}\frac{p'_{k\mu}p'_{k\nu}}{p'\cdot q} - \sum_{k=1}^{n}\frac{p_{k\mu}p_{k\nu}}{p\cdot q}\Big]\epsilon^{\mu\nu}\mathcal{M}_0(\{p'_k\},\{p_k\})$$
$$= \mathcal{M}_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\mathcal{M}_0(\{p'_k\},\{p_k\}) \tag{35}$$

- Iz Wardovog identiteta: $q^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu} = 0$
  slijedi da je $\mathcal{M}(q,p',p)$ invarijatan na transformaciju:
  $$\epsilon^{\mu\nu} \to \epsilon^{\mu\nu} + B^\mu(q)q^\nu = \epsilon^{\mu\nu} + \delta\epsilon^{\mu\nu}. \tag{36}$$
  $$\Rightarrow \delta\epsilon^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu} = kB^\mu(q)\Bigg[\sum_{k=1}^{m}p'_{k\mu} - \sum_{k=1}^{n}p_{k\mu}\Bigg]\mathcal{M}_0 = 0 \tag{37}$$
- Zakon očuvanja 4-momenta

Od simetrija do teorema mekanog raspršenja

- Kvantne amplitude raspršivanja se mogu napisati pomoću S matrice $\langle f|\, S\, |i\rangle$
- Iskoristimo li očuvanja naboja (29), činjenicu da je S konstruirana od eksponencijala Hamiltonijana [16] i svojstvo $[Q_f^+, Q_{f'}^+] = 0$: $\Rightarrow [Q^\pm, S] = 0 \Rightarrow \langle f|\,(Q_f^+ S - S Q_f^-)\,|i\rangle = 0$.
- Iskoristimo jednadžbe ograničenja, ubacimo li taj izraz gore i označimo n dolaznih (m odlaznih) čestica na u točku z_k^i (z_k^f) koji nose energiju E_k^i (E_k^f) gdje vrijedi zakon očuvanja energije ($\sum_{k=1}^m E_k^i = \sum_{k=1}^n E_k^f$)

$$\Rightarrow \langle f(x)|\, P_z S\, |i(x)\rangle = \frac{1}{4\pi G}\left[\sum_{k=1}^{m} E_k^i f(z_k^i) - \sum_{k=1}^{n} E_k^f f(z_k^f)\right] \langle f(x)|\, S\, |i(x)\rangle\,, \tag{38}$$

- gdje je $P_z = \frac{1}{8\pi G}\int d^2z\gamma^{zz} D_z^2 f\left[\int_{\mathcal{I}^+} du N_{zz} - \int_{\mathcal{I}^-} dv N_{zz}^-\right]$, struja mekanog gravitona
- Jednadžba (38) nam daje beskonačno mnogo Wardovih identiteta, jedan za svaku funkciju f.

- $f(x) \equiv f(\{z_k^f\}), \; i(x) \equiv (\{z_k^i\})$

$$\Rightarrow \langle f(x)| P_z S |i(x)\rangle = \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^i}{z - z_k^i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^f}{z - z_k^f} \right] \langle f(x)| S |i(x)\rangle . \quad (39)$$

- Blizu $\mathcal{I}^+$ gravitacijsko polje $h'_{\mu\nu}$ postaje slobodno i može se aproksimirati ekspanzijom po modovima:

$$h'_{\mu\nu}(x) = \sum_{\alpha=\pm} \int \frac{d^3 g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} [\epsilon^{*\alpha}_{\mu\nu}(\vec{q}) a'_\alpha(\vec{q}) e^{iq\cdot x} + \epsilon^{\alpha}_{\mu\nu}(\vec{q}) a'_\alpha(\vec{q})^\dagger e^{-iq\cdot x}], \quad (40)$$

- $\omega_q = q^0 = |\vec{q}|$
- α - heliciteti $(\pm)$
- $a'_\alpha(\vec{q})$ - operatori anhilacije (stvaranja) i vrijedi

$$[a'_\alpha(\vec{q}), a'_\beta(\vec{q'})^\dagger] = (2\omega_q)(2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{q} - \vec{q'}). \quad (41)$$

- U retardiranim Bondijevim koordinatama možemo uočiti:

$$C_{AB}(u,z,\tilde{z}) = k \lim_{r\to\infty} \frac{h'_{AB}}{r}(u,r,z,\tilde{z}). \tag{42}$$

- Parametrizirajmo 4-moment gravitona i njegov polarizacijski tenzor:

$$\begin{gathered} q^{\mu} = \frac{\omega_q}{1+z\tilde{z}}(1+z\tilde{z}, z+\tilde{z}, -iz+i, 1-z\tilde{z}) \\ \epsilon^{\pm\mu\nu} = \epsilon^{\pm\mu}\epsilon^{\pm\nu} \\ \epsilon^{+\mu}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{z}, 1, -i, -\tilde{z}), \quad \epsilon^{-\mu}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z, 1, -i, -z), \end{gathered} \tag{43}$$

- Definirajmo sada sljedeće veličine:

$$\begin{gathered} N^{\omega}_{zz}(z,\tilde{z}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\omega u}\partial_u C_{zz}|_{\mathcal{I}^+}, \\ M^{\omega}_{zz}(z,\tilde{z}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\omega v}\partial_v C_{zz}|_{\mathcal{I}^-}, \\ N^{0}_{zz}(z,\tilde{z}) \equiv \lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{2}[M^{\omega}_{zz} + N^{-\omega}_{zz}] \\ M^{0}_{zz}(z,\tilde{z}) \equiv \lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{2}[M^{\omega}_{zz} + M^{-\omega}_{zz}] \end{gathered} \tag{44}$$

- Struja mekanih gravitona postaje:

$$\Rightarrow P_z = \frac{1}{4G}\gamma^{z\tilde{z}}\partial_{\tilde{z}} O_{zz}, \quad O_{zz} = N^0_{zz} + M^0_{zz}. \tag{45}$$

$$\Rightarrow \langle f(z')| O_{zz} S |i(z)\rangle = \frac{k}{2\pi(1+z\tilde{z})^2} \lim_{\omega\to 0^+} [\omega \langle f(z')| a'_+(\omega\hat{x}) S |i(z)\rangle] \tag{46}$$

Definiramo amplitudu mekanog raspršenja na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0^+} [\omega \langle f(x)| a'_+(\omega\hat{x}) S |i(x)\rangle] \equiv \frac{k}{2} \lim_{\omega\to 0^+} \Bigg[\sum_{k=1}^{m} \frac{\omega[p'_k \cdot \epsilon^+(\vec{q})]^2}{p'_k \cdot q} - \\ - \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega[p_k \cdot \epsilon^+(\vec{q})]^2}{p_k \cdot q} \Bigg] \langle f(x)| S |i(x)\rangle .\end{aligned} \tag{47}$$

- Koristeći već zadano parametriziranje 4-momenta impulsa i tenzora polarizacije gravitona , parametriziramo još i impuls čestica p_k i p'_k na sličan način:

$$p_k^\mu = E_k^i\left(1, \frac{z_k^i + \tilde{z}_k^i}{1 + z_k^i \tilde{z}_k^i}, \frac{-(z_k^i - \tilde{z}_k^i)}{1 + z_k^i \tilde{z}_k^i}, \frac{1 - z_k^i \tilde{z}_k^i}{1 + z_k^i \tilde{z}_k^i}\right), \quad p_k^\mu = \left(E_k^i \to E_k^f,\, z_k^i \to z_k^f\right). \tag{48}$$

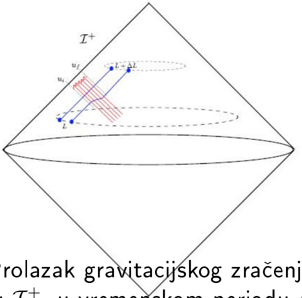
$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle f(x)|\, O_{zz} S \,|i(x)\rangle = \frac{8G}{1 + z\tilde{z}}\Bigg[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^f(\tilde{z} - \tilde{z}_k^f)}{(z - z_k^f)(1 + z_k^f \tilde{z}_k^f)} - \\ - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^i(\tilde{z} - \tilde{z}_k^i)}{(z - z_i^f)(1 + z_i^f \tilde{z}_k^i}\Bigg] \langle f(x)|\, S \,|i(x)\rangle\end{aligned} \tag{49}$$

$$\Rightarrow \langle f(x)|\, P_z S \,|i(x)\rangle = \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^i}{z - z_k^i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^f}{z - z_k^f}\right] \langle f(x)|\, S \,|i(x)\rangle\,. \tag{50}$$

Memorijski efekt kao posljedica supertranslacije

- U vremenskom periodu $u < u_i$, na sferi su postavljena dva detektora koji su istom $r = r_0$, ali su udaljena međusobno za δz . Njihovu vlastitu udaljenost L je dana pomoću: $L = \int \sqrt{g^i_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$
- $g^i_{\mu\nu}$ - početna metrika
- U vremenskom periodu $u_i < u < u_f$ prolazi gravitacijski val koji mijenja metriku u $g^f_{\mu\nu}$. Nakon prolaska gravitacijskog vala detektori su opet u vakuumu ostavivši promijenjenu metriku i njihova međusobna kutna udaljenost se promijenila zbog te razlike u metrici. $\Rightarrow$ gravitacijski memorijski efekt
- Promjena u međusobnoj udaljenosti ΔL je dana s:

$$\Delta L = \int \sqrt{g^f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} - \int \sqrt{g^i_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \tag{51}$$



Slika: Memorijski efekt. Prolazak gravitacijskog zračenja kroz dva inercijalna detektora, koji se nalaze u $\mathcal{I}^+$, u vremenskom periodu $u_f - u_i$ uzrokuje promjenu u njihovoj relativnoj udaljenosti za ΔL.

$$\Delta L \approx \frac{r}{2L} \delta C_{zz} (\delta z)^2 + k.k \tag{52}$$

- promjena u udaljenosti između detektora je inducirana s promjenom u C_{AA}, koja se javlja ako supertranslacije mijenjaju vakuumsko stanje
- $\Rightarrow$ supertranslacije induciraju memorijski efekt.

- Braginky i Thorne [17]: sudari masivnih objekata poput neutronskih zvijezda ili crnih rupa.
- Nakon sudara će pojaviti promijena u metrici $\Delta h(\vec{x})_{\mu\nu}$ na $\mathcal{I}^+$, koja je dana s:

$$\Delta h(u,\vec{x})_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{G}{2\pi}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{p_{i\mu}p_{i\nu}}{p_i\cdot k} - \sum_{i=1}^{n}\frac{p'_{i\mu}p'_{i\nu}}{p'_i\cdot k}\right)\theta(u-u_f) \qquad (53)$$

- p_ν (p'_ν) - 4- momenti od m (n) odlaznih (dolaznih) objekata u sudaru
- $k=(1,\vec{x})$ je 4-vektor koji gleda od mjesta sudara (u centru Penrose dijagram) do udaljenog promatrača na $\mathcal{I}^+$
- usporedimo to s predfaktorom amplitude raspršenja:

$$\mathcal{M}_{\nu\mu} = \sqrt{8\pi G}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{p'_{k\mu}p'_{k\nu}}{p'\cdot q} - \sum_{k=1}^{n}\frac{p_{k\mu}p_{k\nu}}{p\cdot q}\right], \quad q^\mu = \omega(1,\hat{x}) \qquad (54)$$

- Razlika je u faktoru $\frac{1}{\omega}$
- Primjenimo Fourijerov tranformat $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\omega u}$ na $\Delta h(\vec{x})_{\mu\nu}$ i iskoristimo da vrijedi: $\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{i\omega u}}{\omega} = i\pi\theta(u)$
- Postoji i općenitiji izvod [11]
- Memorijski efekt igra važnu ulogu u fizičkoj realizaciji apstraktno formuliranih rezultata od ostala dva efekta, dajući izravne opservacijske posljedice velikog broja simetrija i zakona očuvanja.

- Andrew Strominger: Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory,promijeni ovo " Am. Math. Monthly 109:5 (2002) 409–442."
- S. Weinberg, "Infrared photons and gravitons," Phys.Rev. 140 (1965) B516-B524.
- H. Bondi, M. van der Burg, and A. Metzner, "Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems," Proc.Roy.Soc.Lond. A269 (1962) 21-52.
- R. Sachs, "Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically at space-times," Proc.Roy.Soc.Lond. A270 (1962) 103-126.
- A. Strominger, "Asymptotic Symmetries of Yang-Mills Theory," JHEP 07 (2014) 151, arXiv:1308.0589 [hep-th]; T. He, P. Mitra, A. P. Porfyriadis, and A. Strominger, "New Symmetries of Massless QED," JHEP 10 (2014) 112, arXiv:1407.3789 [hep-th].
- Y. B. Zel'dovich and A. G. Polnarev, "Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars," Soviet Astronomy 51 (Feb., 1974) 30.

D. Christodoulou, "Nonlinear nature of gravitation and gravitational wave experiments," Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1486-1489; V. B. Braginskii and K. S. Thorne, "Gravitational-wave bursts with memory and experimental prospects," Nature 327 (May, 1987) 123125.

Abbott, Benjamin P.; et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2016). "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger". Phys. Rev. Lett. 116 (6): 061102. arXiv:1602.03837

P. D. Lasky, E. Thrane, Y. Levin, J. Blackman, and Y. Chen, "Detecting gravitational-wave memory with LIGO: implications of GW150914," Phys. Rev. Lett. 117 no. 6, (2016) 061102, arXiv:1605.01415 [astro-ph.HE].

L. Susskind, "Electromagnetic Memory," arXiv:1507.02584 [hep-th].

A. Strominger and A. Zhiboedov, "Gravitational Memory, BMS Supertranslations and Soft Theorems," JHEP 01 (2016) 086, arXiv:1411.5745 [hep-th].

A. Strominger, "On BMS Invariance of Gravitational Scattering," JHEP 07 (2014) 152, arXiv:1312.2229 [hep-th].

T. He, V. Lysov, P. Mitra, and A. Strominger, "BMS supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem," JHEP 05 (2015) 151, arXiv:1401.7026 [hep-th].

D. Christodoulou and S. Klainerman, "The global nonlinear stability of minkowski space," Seminaire Equations aux Derivees Partielles (Polytechnique) (1989-1990) 1-29. http://eudml.org/doc/111984.

D. A. Nichols, "Spin memory effect for compact binaries in the post-Newtonian approximation," arXiv:1702.03300 [gr-qc].

(Frontiers in Physics) Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder-An introduction to quantum field theory-Addison-Wesley Pub. Co (1995)

K. S. Thorne, "Gravitational-wave bursts with memory: The christodoulou effect," Phys. Rev. D 45 (Jan, 1992) 520-524.