Fizikalni pogled na simetrije u ekonomskim modelima

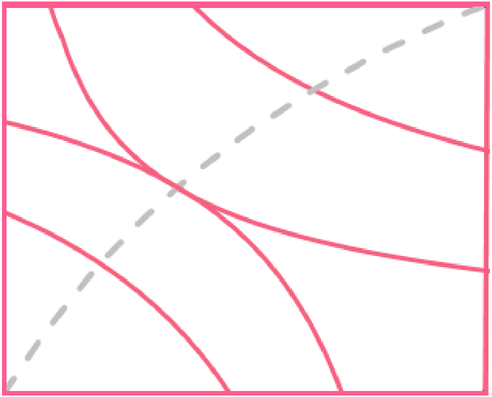
Dina Durmić

Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb

Neoklasična ekonomska teorija opće ravnoteže

- PITANJA
  - Što se proizvodi?
  - Tko i kako to proizvodi?
  - Tko dobije ono što se u konačnici proizvede?
- REZULTATI
  - U razumnim uvjetima, uvijek postoje cijene takve da tržište bude u ravnoteži.
  - Kada je tržište u stanju ravnoteže, ono je i efikasno u smislu da nitko neće postići veću mjeru sreće, bez da naruši sreću nekog drugog.

Neoklasična ekonomska teorija opće ravnoteže



Slika: Edgeworth-ova kutija

Arrow-Debreu model

- **Prostor dobara** : $X^a \in \mathcal{P}$
- **Vrijeme**: ista roba ili dobro u različitim vremenima se smatra različitom robom, $\mathcal{P}^T$
- **Kovektor cijena**: $\vec{p} = p_a = \{p_1, p_2, ...\} \in \mathcal{P}^*$ koji odgovara cijenama N dobara
  - $p_a \geq 0$
  - Vrijednost inventara: $V = p_a X^a$

$$\sum_a p_a = 1 \tag{1}$$

  - potprostor cijena $S \subset \mathcal{P}$

Arrow-Debreu model

Tvrtke $A = 1, ..., F$

- proces proizvodnje Y_A^a
- $Y_1^{17} = -4$
- za svaku tvrtku postoji skup mogućih dostupnih procesa proizvodnje dan s $\mathcal{Y}_A \in P$
- zahtjev konveksnosti $\lambda Y_A^a \in \mathcal{Y}_A$ za $0 < \lambda \leq 1$
- profit $p(y)_A = p_a y_A^a$
- funkcija opskrpbe $S_A^a(p)$ tvrtke A odgovara mapiranju iz prostora cijena S u $\mathcal{P}$

Arrow-Debreu model

Kućanstvo ili potrošač $\alpha = 1, ..., H$

- plan potrošnje $X^a_\alpha \in P_+$
- trošak $p_a X^a_\alpha$
- $r^a_\beta \in P_+$
- X^5_{13}=12
- prihod

$$i_\beta = p_a r^a_\beta \tag{2}$$

- udio koji kućanstvo posjeduje u nekoj tvrtci α^α_A
- ukupni prihod kućanstva

$$I^\beta_{ukupno} = p_a r^a_\beta + \sum_A \alpha^\beta_A p_a y^a_A \tag{3}$$

Arrow-Debreu model

- funkcija korisnosti U_β na P_+ td. $U_\beta(X_\beta^1) \geq U_\beta(X_\beta^2)$ ako $X_\beta^1 \geq X_\beta^2$
- s obzirom na danu cijenu p_a, postoji domena planova potrošnje $\tilde{P}(p)_+^\beta$ koje si kućanstvo β može priuštiti

$$p_a X_\beta^a \leq I_{ukupno}^\beta \tag{4}$$

- funkcija potražnje $D(p)_\beta^a$ koja je jednaka planu potrošnje X_β^a koji maskmizira funkciju korisnosti po danim cijenama

Ekonomsko ravnotežno stanje

- Zakon ponude i potražnje

$$Z^a(p) = \sum_\beta D(p)^a_\beta - \sum_A S(p)^a_A - \sum_\beta r^a_\beta. \tag{5}$$

- ravnoteža

$$Z^a(p^*) = 0. \tag{6}$$

- Walras-ov zakon

$$p_a Z^a(p) = 0 \tag{7}$$

- za barem jedan skup cijena postoji ravnotežno stanje

$$T(p)_a = \frac{pa + max[0, Z_a(p)]}{1 + \sum_a max[0, Z_a(p)]} \tag{8}$$

Invarijantnosti

- **reskaliranje cijena**
- $\Lambda > 0$
- globalna baždarna invarijantnost

$$p_a \to \Lambda p_p \tag{9}$$

- **reskaliranje funkcije korisnosti**
- $\lambda_\alpha > 0$
- lokalna baždardna invarijantnost

$$U_\alpha \to \lambda_\alpha U_\alpha \tag{10}$$

Kritika Arrow-Debreu modela

- Pokazano je da ravnoteža postoji i da je Pareto učinkovita, međutim nije jedinstvena.
- Ne postoji mehanizam koji nam govori o tome što vodi stanje u ravnotežu.
- Postoje pitanja na koje ne daje odgovore kao što su kako brzina konvergencije u stanje ravnoteže ovisi o generičnim pretpostavkama modela kao što su broj dobara, tvrtki ili kućanstava.
- Nedostaje neravnotežna teorija s dinamikom koja objašnjava koliko brzo se ravnoteža postiže.
- Nema općenitih rezultata o stabilnosti ravnoteže s obzirom da nisu jedinstvene, onda po definiciji nisu nužno ni stabilne.
- Ne može se dobro testirati na stvarnim podacima.

Model temeljen na agentima

- Ciljevi
  - Odrediti stacionarno stanje za tržišta i aproksimativno pokazati da odgovara ideji ravnotežnog stanja u neoklasičnoj ekonomiji.
  - Proučiti faznu strukturu ekonomskih modela i odrediti bitne makroskopske opservable.
  - Proučiti prijelaz iz neravnotežnog u ravnotežno stanje i odrediti kako relaksacijsko vrijeme ovisi o makroskopskim parametrima.
  - Pručiti fluktuacije oko ravnoteže i njihovu narav.

Model temeljen na agentima

- Početni principi
  - Vrijeme se mora definirati tako da prepoznaje ireverzibilnost većine provedenih djelovanja kao i asimetriju prošlosti, sadašnjosti i budućnosti.
  - Budućnost je neodređena.
  - Ekonomske opservable su vezane za računovodsvto i ostale povijesne podatke.
  - Termodinamička ravnoteža nije analogna ekonomskoj ravnoteži jer ekonomski sustav nije izoliran.
  - Ekonomija ima pristup velikom broju mogućih kvazi-stabilnih stanja.
  - Tržišta s velikim brojem agenata imaju velike aproksimativne simetrije.
  - Postoje baždarne simetrije povezane s reskaliranjem jedinica kojima se vrednuju pojedinačna dobra. Dinamika tržišta bi trebala biti invarijantna na ove baždarne transformacije.

Model temeljen na agentima

- Osnovna ideja
  - **Dobra** su materijalna dobra ili usluge koje se mogu posjedovati, transformirati i kojima se može trgovati.
  - **Agent** je osoba, tvrtka ili korporacija koja ima mogućnost: posjedovati stvari koje pripadaju njegovom inventaru, transformirati
  - **Ekonomska operacija** je promjena stanja jednog ili više agenata.
  - **Statistička se ekonomija definira kao proučavanje kolektivnog ponašanje velikog broja ekonomskih agenata**.

Model temeljen na agentima

- Ekonomska povijest: krivulja $\alpha(t)$ u $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^*$ što daje sekvencu inventara i cijena.
- Neka je $\mathcal{C}$ potprostor od $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^*$ takav da vrijedi $p_a q^a = 0$ i neka je krivulja $\alpha(t)$ u $R = \mathcal{P} \times \mathcal{P}^* - \mathcal{C}$. Tada je $\alpha(t) = (q^a(t), p_b(t))$ vremenski promjenjiva košara dobara $q^a(t)$ i cijena $p_b(t)$.

$$A = \frac{q^a dp_a}{q^c p_c}. \tag{11}$$

- Globalno reskaliramo cijene $p_a \to \Lambda p_a$:

$$A \to A + dln(\Lambda). \tag{12}$$

- Troškovi života:

$$P = e^{\int_\alpha A} \tag{13}$$

Model temeljen na agentima

- Promotrimo li ekonomsku povijest koja je mala krivulja koja je zatvorena oko (q^a, p_a) specificirana malim promjenama (dq_0^a, dp_b^0), tada je:
$$P \approx e^F. \tag{14}$$
- kurvatura
$$F = \frac{1}{q^c p_c}\left[\delta_b^a - \frac{q^a p_b}{q^d p_d}\right] dq_0^b \Lambda dp_a^0 \tag{15}$$

Model temeljen na agentima

- **Agenti** $i, j = 1, ..., P$
- **Dobra** $a, b, c... = 1, ..., N$
- **Vrijeme**: sve veličine su funkcije koje evoluiraju u diskretnim vremenima n
- **Inventar**: V_i^a
- **Baždarenje**
- ništa u dinamici ekonomije ne smije ovisiti o jedinicama u kojima se vrednuju različiti inventari

$$V_i^a \to V_i^{a'} = \phi_i^a V_i^a \tag{16}$$

- **Adjungirani element**

$$V_i^a \to (V_i^a)^* = \frac{1}{V_i^a} \tag{17}$$

- **Invarijantna norma**

$$|V|^2 \equiv \sum_{i,a} (V_i^a)^* V_i^a = n = NP \tag{18}$$

Model temeljen na agentima

- za svakog agenta matrica W_{ia}^{b} je vrijednost koju i-ti agent ima u razmjeni a i b tj. $W_{ia}^{b} = a/b$
- $W_{ia}^{b} = 3$
$$W_{ia}^{b} \to W_{ia}^{b'} = (\phi_i^a)^{-1} W_{ia}^{b} \phi_i^b \tag{19}$$
- inventar
$$\mathcal{I}^b = W_{ia}^{b} V^a \tag{20}$$
- Ako agent i ne zna omjer vrijednosti dobra a i b, onda se piše $W_{ia}^{b} = ?$.
- Matrica W_{ia}^{b} je potpuna ako nema zapisa ?, tako da agent ima informaciju o svim mogućim razmjenama dobara.
- Matrica W_{ia}^{b} je konzistentna ako $W_{ia}^{b} = 1/W_{ib}^{a}$ i $W_{ia}^{b} = W_{ia}^{c} W_{ic}^{b}$ za sve a, b, c.
- Ako je matrica konzistentna i potpuna, onda je proporcionalna operatoru projekcije.

Model temeljen na agentima

- **Ekonomska operacija**

$$O_{ia}^{jb} = \frac{n_j^b}{n_i^a} \tag{21}$$

$$O_{ia}^{jb} \to (O_{ia}^{jb})' = (\phi_i^a)^{-1} O_{ia}^{jb} \phi_j^b. \tag{22}$$

- **Kurvature i opservable**
- kurvature mjere dobitke i gubitke u ciklusima trgovanja

$$R_{ijka}^d \equiv O_{ia}^{jb} O_{jb}^{kc} O_{kc}^{id} \tag{23}$$

$$R_{ijka}^d \to (R_{ijka}^d)' = (\phi_i^a)^{-1} R_{ijka}^d \phi_i^d \tag{24}$$

- Dijagonalni element R_{ijka}^a je baždarno invarijantna opservabla. To je omjer dobra a koji je vraćen agentu i od k i razmijenjen od agenta i agentu j. Dakle, određuje profit ili gubitak ukupnog ciklusa što se tiče dobra a.

Model temeljen na agentima

- **Efektivna dinamika**
- **Bilateralna dinamika**

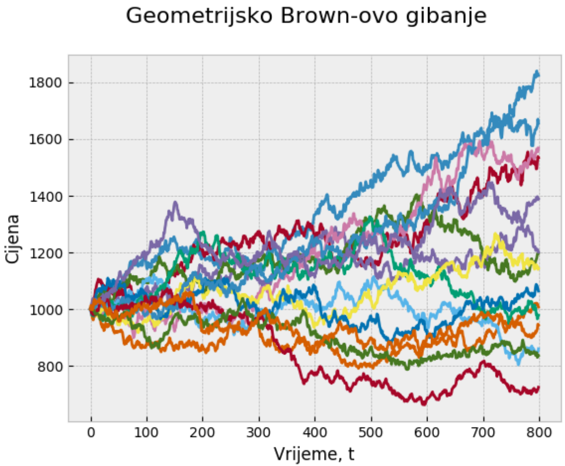
$$S^{razmjena} = \sum_{i \neq j} Tr(W_i O_i^j W_j O_j^i) \tag{25}$$

- **Dinamika trgovanja dominirana ciklusima**

$$S^{ciklusi} = \sum_{ciklus:ijk...} \alpha_R TrR_{ijk}...|\alpha_S TrS_{ijk}... \tag{26}$$

Stohastički pristup

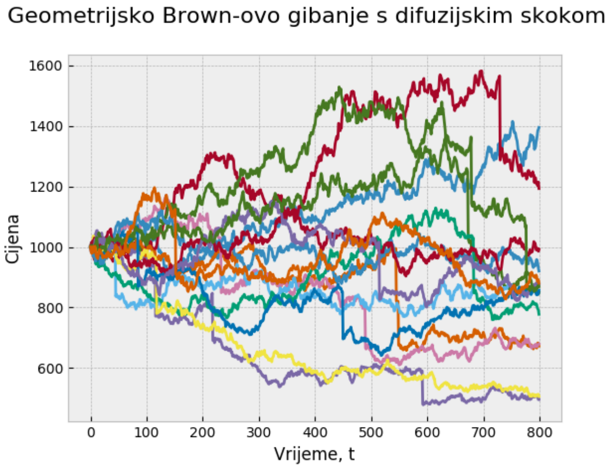
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma dS_t W_t \tag{27}$$



Slika: Geometrijsko Brown-ovo gibanje je Brown-ovo gibanje s dodatnom komponentom drifta i volatilnosti.

Stohastički pristup

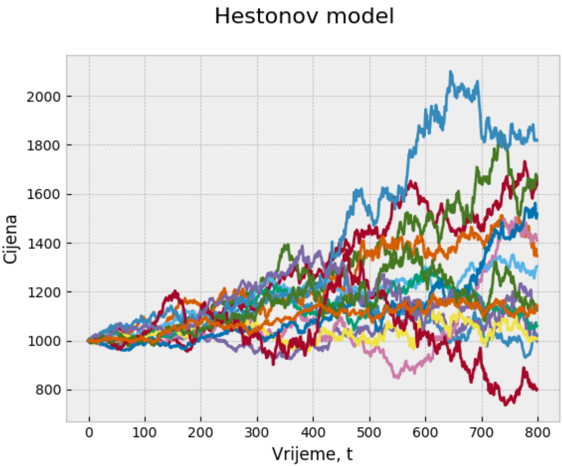
$$dS_t = \mu Stdt + \sigma S_t dW_t + dJ_t \qquad (28)$$



Slika: Prikazuje se Geometrijsko Brown-ovo gibanje s difuzijskim skokom gdje se mogu primjetiti diskontinuiteti dodani difuzijskim skokom koji mogu predstavljati lom tržišta zbog fenomena kao što su panike ili mjehuri gore diskutirani.

Stohastički pristup

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S, \quad dv_t = a(b - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v \qquad (29)$$



Slika: Hestonov model proširuje Geometrijsko Brown-ovo gibanje tako da pretpostavlja da volatilnost varira u vremenu.