

Računi na nivou dvije petlje za kvantnu elektrodinamiku

Autorica: Marta Fatović

Mentor: prof. dr. sc. Amon Ilakovac

Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

Uvod

1. Motivacija uvođenja renormalizacije

- Metoda renormalizacijske grupe je uvedena kako bi se riješio problem ograničenosti perturbacijske teorije za visoke energije
- Javljaju se divergencije: IR (emisija niskoenergetskih fotona), UV (veliki prijenosi impulsa)
- Divergencije su se uključile u redefiniciju fizikalnih veličina
- Mijenjanjem skale energije procesa se mijenjaju i parametri teorije
- Renormalizacija je reparametrizacija teorije → fizikalne veličine postaju konačne

2. Klizna skala

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \supseteq \left(\alpha \ln \frac{q^2}{m_e^2} \right)^n \rightarrow \text{Divergira za velike prijenose impulsa}$$

- Koristi se perturbacijska teorija u kojoj su konstante vezanja zapravo funkcije klizne skale mase, μ
- Definira se renormalizirana konstanta vezanja na μ : g_μ , parametri teorije se mogu prikazati kao funkcije od μ i g_μ
- Npr. IR konačne funkcije:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right) \xrightarrow{\mu = E} \Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right)$$

- Preostaje izračunati g_E :
 - g_μ se može dobiti preko početne g_R uz uvjet $\frac{\mu}{m} \approx 1$
 - $g_{\mu'}$ se može dobiti preko g_μ uz uvjet $\frac{\mu'}{\mu} \approx 1$
 - ...

- ▶ Krene li se od prikaza konstante klizanja kao funkcije: $g_{\mu'} = G(g_{\mu}, \mu'/\mu, m/\mu)$ i derivira li ju se po μ' te pomnoži s μ' , uz nametanje uvjeta: $\mu' = \mu$, dobije se:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_{\mu} = \beta\left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) \xrightarrow{m \rightarrow 0} \boxed{\mu \frac{d}{d\mu} g_{\mu} = \beta(g_{\mu}, 0) \equiv \beta(g_{\mu})}$$

gdje je: $\beta\left(g_{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \frac{\mu'}{\mu}} G\left(g_{\mu}, \frac{\mu'}{\mu}, m/\mu\right) \right]_{\frac{\mu'}{\mu}=1}$

- ▶ Iz crveno uokvirene jednačbe se dobije važan rezultat:

$$\boxed{\ln \frac{E}{M} = \int_{g_M}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)}}$$

3. Minimalna suptrakcija

- ▶ Potrebno je uvesti skaliranje koje osigurava bezdimenzionalnost golih (bare) konstanti vezanja: $g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)}$
- ▶ Bezdimenzionalnu veličinu se prikaže u obliku sume konačnog člana te članova koji divergiraju za limes $D \rightarrow 4$:

$$g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)} = g^l(\mu, D) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (D-4)^{-\nu} b_{\nu}^l(g(\mu, D))$$

- ▶ Postavlja se zahtjev da $g^l(\mu, d)$ bude analitička ne samo za $D=4$, već za svaki D
- ▶ Na gornji izraz se djeluje operatorom $\mu \frac{d}{d\mu}$ što dalje vodi na:

$$\begin{aligned} & -\Delta^l(D) \left[g^l + \sum_{\nu=1}^{\infty} (D-4)^{-\nu} b_{\nu}^l(g) \right] = \\ & = \beta^l(g, D) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{\nu m}^l(g) \beta^m(g, D) (D-4)^{-\nu} \end{aligned}$$

- ▶ Vrijede izrazi: $b_{\nu m}^l(g) \equiv \frac{\partial}{\partial g^m} b_{\nu}^l(g)$ i $\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu, D) = \beta^l(g(\mu, D), D)$

- ▶ Obzirom da su dimenzionalnosti linearne funkcije od D , mogu se zapisati kao:

$$\Delta_l(D) = \Delta_l + \rho_l(D - 4)$$

- ▶ Korištenjem ove činjenice se lijeva strana prethodno uokvirene jednadžbe može napisati kao:

$$- \rho_l g^l (D - 4) - [\Delta_l g^l + b_1^l(g) \rho^l] - \\ - \sum_{\nu=1}^{\infty} (D - 4)^{-\nu} [\rho_l b_{\nu+1}^l(g) + \Delta_l b_{\nu}^l(g)]$$

- ▶ Najviša potencija dimenzije D u analitičkom dijelu je jedan što znači da mora biti istinito i s desne strane \rightarrow beta je linearna u D : $\beta^l(g, D) = \beta^l(g) + (D - 4)\alpha^l(g)$

- ▶ lščitava se:

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l \quad \text{i} \quad \beta^l(g) = -\Delta_l g^l - b_1^l(g) \rho_l + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{1m}^l(g) \rho_m g^m$$

što vodi na važan zaključak:

Beta funkcija jednoznačno je određena koeficijentima uz pol prvog reda!

Primjena na QED i rezultati računa

1. Renormalizirana perturbacijska teorija

- ▶ U dijagramima s petljama se javljaju UV divergencije
- ▶ RPT je takva reformulacija polazne teorije da su u njoj polja i parametri konačni
- ▶ Lagranžijan QED-a:
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_B)\psi - e_B\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$
- ▶ Cilj: razdvojiti lagranžijan na fizikalni dio i dio koji sadrži divergencije
- ▶ Renormalizacija fermionskog i fotonskog propagatora:

$$\begin{aligned}
 \text{Feynman diagram: } \text{fermion line with a loop} &= \text{fermion line} + \text{fermion line with 1PI loop} + \text{fermion line with 2PI loops} + \dots \\
 \text{Feynman diagram: } \text{photon line with a loop} &= \text{photon line} + \text{photon line with 1PI loop} + \text{photon line with 2PI loops} + \dots
 \end{aligned}$$

$$P_f = \frac{iZ_2}{\not{p} - m}$$

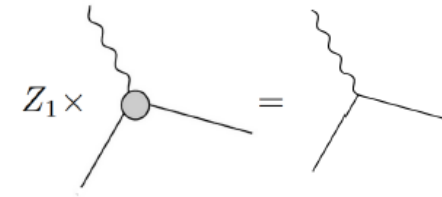
$$P_\gamma = \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2}$$

- ▶ Iz prethodnog slijedi da se polja mogu izraziti preko renormaliziranih polja:

$$\begin{aligned} \psi &= Z_2^{1/2} \psi_r \\ A^\mu &= Z_3^{1/2} A_r^\mu \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\psi}_r (i\partial - m_B) \psi_r - e_B Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu$$

- ▶ Fizikalni naboj i masa se definiraju kao:

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \quad \Sigma(\not{p} = m) = 0$$



- ▶ Početni lagranžijan se sad razdvaja na dva dijela što je i bio cilj:

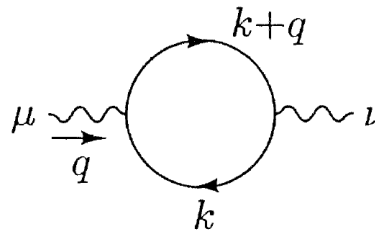
$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r (i \not{\partial} - m) \psi_r - e \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu \\ &+ \left(-\frac{1}{4} \delta Z_3 (F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r (i \delta Z_2 \not{\partial} - \delta m) \psi_r - e \delta Z_1 \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu \right) \end{aligned}$$

Uz:

$$\begin{aligned} \delta Z_1 &= Z_1 - 1 \\ \delta Z_2 &= Z_2 - 1 \\ \delta Z_3 &= Z_3 - 1 \\ \delta m &= Z_2 m_B - m \end{aligned}$$

2. Radijativne korekcije za QED na nivou jedne petlje

- ▶ Dijagram vakuumske polarizacije:



$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{(k+m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{(k+q+m)}{(k+q)^2 - m^2} \right]$$

- ▶ Račun:

- ▶ Feynmanova parametrizacija: $\frac{1}{A_1 \dots A_n} = (n-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \frac{\delta(x_1 + \dots + x_n - 1)}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}$

- ▶ Wickova rotacija: provođenje integracije u euklidskom prostoru uz $l^2 = -l_E^2$,
 $d^4 l = i d^4 l_E$.

- ▶ Dimenzionalna regularizacija : $\int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2}}$

$$\int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D \Gamma(n-1 - \frac{D}{2})}{2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-1 - \frac{D}{2}}$$

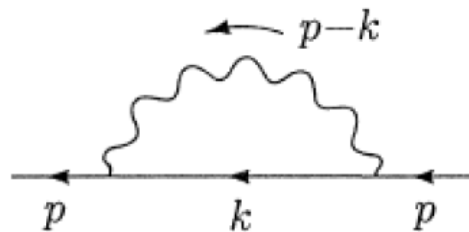
- ▶ Razvoj $\Gamma(\epsilon)$ uz zadržavanje članova uz ϵ^{-1} (konvencija: $D=4-2\epsilon$)

- ▶ Dobije se: $i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \supseteq \frac{-ie^2}{12\pi^2\epsilon} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$

te se iščita:

$$Z_3^{1L} = 1 - \frac{e^2}{12\epsilon\pi^2}$$

- ▶ Dijagram vlastite energije elektrona:



$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2}$$

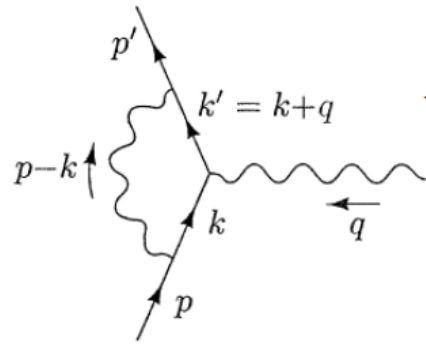
- ▶ Račun se provodi potpuno analogno kao i za dijagram vakuumske polarizacije te se dobiva:

$$-i\Sigma_2 \supseteq \frac{ie^2}{(4\pi)^2 \epsilon} \not{p}$$

iz čega se iščitava:

$$Z_2^{1L} = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$$

- ▶ Dijagram korekcije vrha:



$$-ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k} + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\rho)u(p)$$

- ▶ Dobije se: $-i\Sigma_1 \supseteq \frac{1}{\epsilon} \frac{-ie^3}{(4\pi)^2} \gamma^\mu$ iz čega se iščita: $(Z_1^{1L})^{-1} = 1 + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$

- ▶ Ovo je važan rezultat jer je potvrđen Wardov identitet:

$$Z_1^{-1}Z_2 = 1$$

3. Anomalni magnetski moment

- Pri računu ukupnog doprinosa vrhu je dobiveno:

$$\begin{aligned}
 -ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = & \int dx dy dz \delta(1-x-y-z) (-e^3) \cdot \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left[\frac{(2-D)^2}{D} \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} + \right. \right. \\
 & + \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1}{\Delta} \cdot (q^2(-(D-2)(1-x)(1-y)-z(4-D)) + \\
 & + m^2((D-2)z^2 + (12-2D)z + (10-3D))) \left. \right] + \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1}{\Delta} \cdot \\
 & \cdot ((p'+p)^\mu m [z^2(2-D) + z(-6+2D) - (4-D)])
 \end{aligned}$$

- Primjenjujući Gordonov identitet: $(p'+p)^\mu = 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ na gornji izraz te koristeći definiciju $\delta\Gamma^\mu$ preko form faktora:

$$\begin{aligned}
 -ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = \\
 = -ie\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right] u(p)
 \end{aligned}$$

moguće je iščitati faktore $\delta F_1(q^2)$ i $F_2(q^2)$ na nivou jedne petlje

- ▶ Od interesa je izračunati $F_2(q^2)$ zbog toga što postoji relacija koja ga povezuje s anomalnim magnetskim momentom:

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{S} \quad \text{gdje je giromagnetski faktor dan s: } g = 2 [F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0)$$

- ▶ Upotrijebljena je činjenica da je $F_1(0) = 1$ u svakom redu računa smetnje što slijedi iz Wardovog identiteta i iz definicije Γ_μ u limesu kad $q \rightarrow 0$
- ▶ U nultom redu računa smetnje vrijedi: $g = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$
- ▶ Integracijom izraza za form faktor $F_2(q^2)$ (koji je konačan), za slučaj $q^2 \rightarrow 0$ se dobiva:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} = a_e = \frac{g-2}{2} = 0.0011614$$

Eksperiment: Sturm, Sven and Vogel, Manuel and Kohler-Langes, Florian and Quint, Wolfgang and Blaum, Klaus and Werth, G. (2017). High-Precision Measurements of the Bound Electron's Magnetic Moment. *Atoms*. 5. 4. 10.3390/atoms5010004.

contribution	$^{12}\text{C}^{5+}$	$^{16}\text{O}^{7+}$	$^{28}\text{Si}^{13+}$
Dirac value	+1.998 721 354 391 (1)	+1.997 726 003 06 (2)	+1.993 023 571 551(5)
free QED	+0.002 319 304 358 (1)	+0.002 319 304 358 (1)	+0.002 319 304 358 (1)
BS-QED	+0.000 000 843 391 (6)	+0.000 001 594 38 (11)	+0.000 005 855 67 (165)
nuclear size	+0.000 000 000 407	+0.000 000 001 55 (1)	+0.000 000 020 468
nuclear recoil	+0.000 000 087 629	+0.000 000 116 97	+0.000 000 205 881
theory total	+2.001 041 590 117 (6)	+2.000 047 021 28 (11)	+1.995 348 957 93 (165)
experiment	+2.001 041 592 44 (232)	+2.000 047 025 4 (46)	+1.995 348 959 04 (81)

4. Renormalizacija u višim redovima računa smetnje

Prividni stupanj divergencije

- ▶ Divergencije se mogu naći prebrojavanjem potencija impulsa u petljama, uz notaciju:

N_e = broj vanjskih e^- linija

N_γ = broj vanjskih γ linija

P_e = broj e^- propagatora

P_γ = broj γ propagatora

V = broj vrhova

L = broj petlji

$$d = (\text{potencija } p \text{ u brojniku}) - (\text{potencija } p \text{ u nazivniku}) \\ = 4L - P_e - 2P_\gamma$$

$d > 0$: postoji divergencija

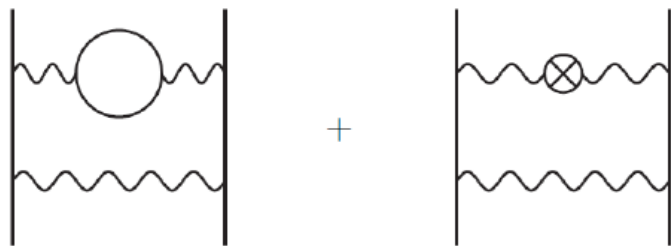
$d = 0$: logaritamska divergencija

$d < 0$: nema divergencije

- ▶ najpesimističnije predviđanje
- ▶ Zanemarene simetrije teorije, činjenica da su u definiciji d uključeni 4-impulsi koji nisu u petljama, činjenica da drvasti dijagrami nisu divergentni te činjenica da divergencije mogu doći od poddijagrama danog dijagrama

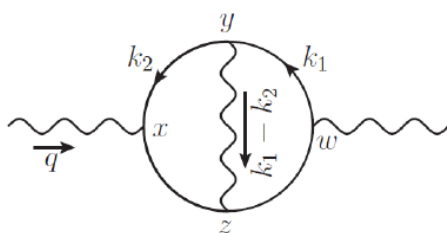
Divergentni dijagrami

- ▶ Mogu se javiti divergentni poddijagrami u nekim konačnim dijagramima, ali oni se lako tretiraju



→ ovakva suma je konačna
divergencije uz polinome u q^2 : lokalne

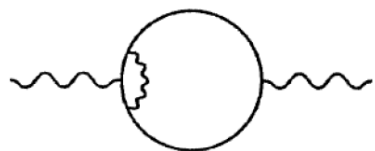
- ▶ Komplikacija se javlja kad se pojave preklopne divergencije:



→ pretpostavi se da je jedan impuls veći od drugog te se integrira po manjem:

$$\sim \alpha (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_2 (q^2) (\ln \Lambda^2 + \ln q^2) \cdot \alpha \ln \Lambda^2$$

divergencije uz $(\Pi_2 (q^2) \ln \Lambda^2)$: nelokalne





Kontračlanovi koji dokidaju
nelokalne divergencije



Kontračlan koji dokida
lokalne divergencije

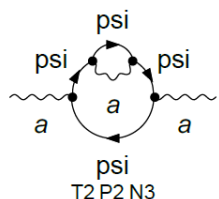
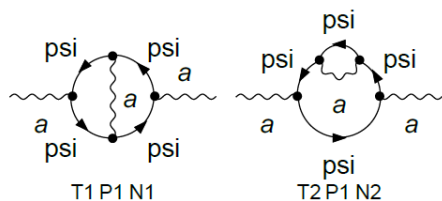
BPHZ teorem: za svaku renormalizabilnu teoriju polja divergencije se uklanjaju za *svaki red perturbacijskog računa* vrhovima- kontračlanovima koji odgovaraju "prividno" divergentnim amplitudama.

5. Radijativne korekcije za QED na nivou dvije petlje

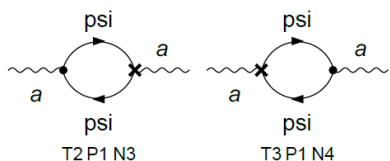
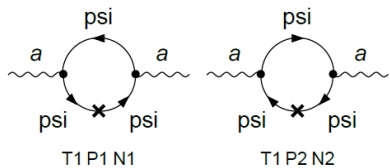
izračun amplituda obavljen pomoću programskog sustava Wolfram Mathematica, odnosno pomoću paketa FeynArts, FeynCalc i TARCER

- ▶ Dijagrami vakuumske polarizacije bez i sa kontračlanovima:

$a \rightarrow a$



$a \rightarrow a$



Suma doprinosa sadrži: $\frac{ie^4 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})}{128\pi^4 \epsilon}$ → nema logaritamskih članova!
Suma doprinosa dijagrama s CT je nula?

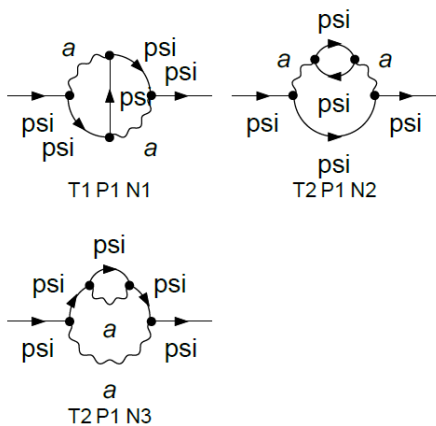
lščitava se:

$$\delta Z_3^{2L} = -\frac{e^4}{128\pi^4 \epsilon}$$

Suma doprinosa zbilja je nula!

► Dijagrami vlastite energije elektrona bez i sa kontračlanovima:

psi → psi

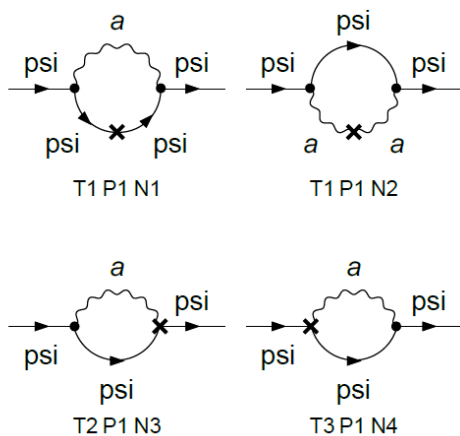


Suma doprinosa sadrži nelokalan član:

$$-\frac{ie^4 \log(-k^2)}{\pi^4 256\epsilon}$$

očekuje se neiščezavajuća suma doprinosa amplituda s kontračlanovima koja će dokinuti ovaj član

psi → psi



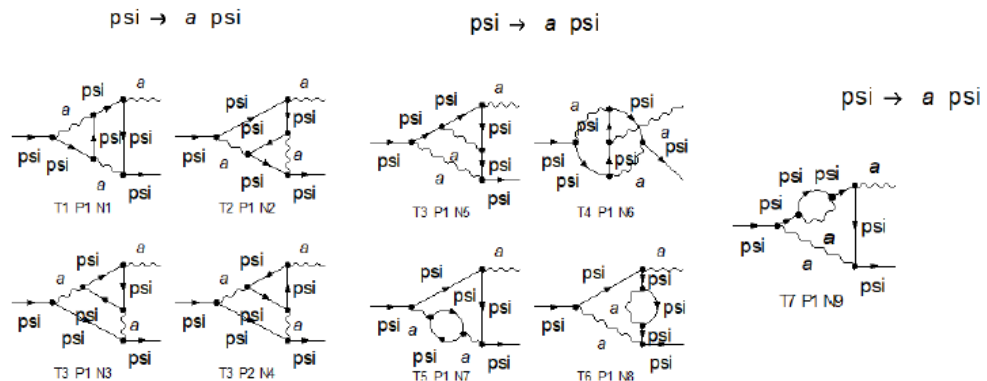
Nakon što se suma amplituda s kontračlanovima pribrojila gornjoj, nelokalan član nestaje i dobije se:

$$\frac{-7ie^4 k}{1024\pi^4\epsilon}$$

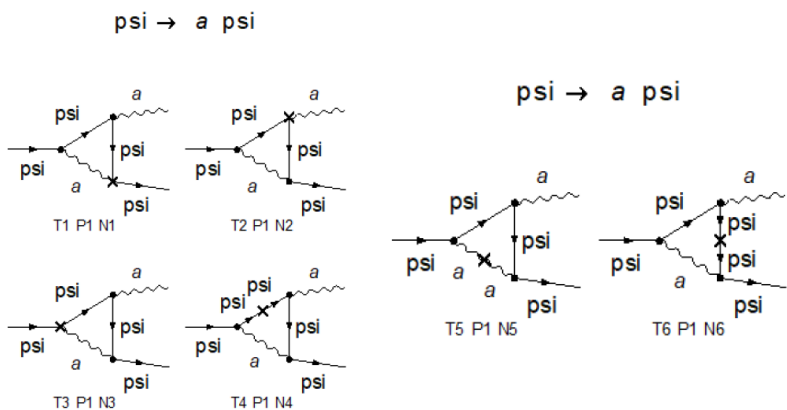
Iz toga se iščita:

$$\delta Z_2^{2L} = \frac{7e^4}{1024\pi^4} \frac{1}{\epsilon}$$

► Dijagrami korekcije vrha bez i sa kontračlanovima:



-u sumi se javlja nekolan član: $\frac{12ie^5\gamma^\mu \log(-k_1^2)}{3072\pi^4\epsilon}$
 -očekuje se da u sumi amplituda sa i bez kontračlanova neće biti $\log(-k_1^2)$



Zbilja, u sumi amplituda sa i bez kontračlanova nema

nelokalnog člana: $\frac{7ie^5 k}{1024\pi^4\epsilon}$

lščitava se:

$$\delta Z_1^{2L} = \frac{7e^4}{1024\pi^4} \frac{1}{\epsilon}$$

6. Renormalizacijske grupne jednačbe za QED na nivou dvije petlje

- ▶ Kreće se od dimenzijski korigiranog izraza na kojem je primijenjen Wardov identitet:

$$e = Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon}$$

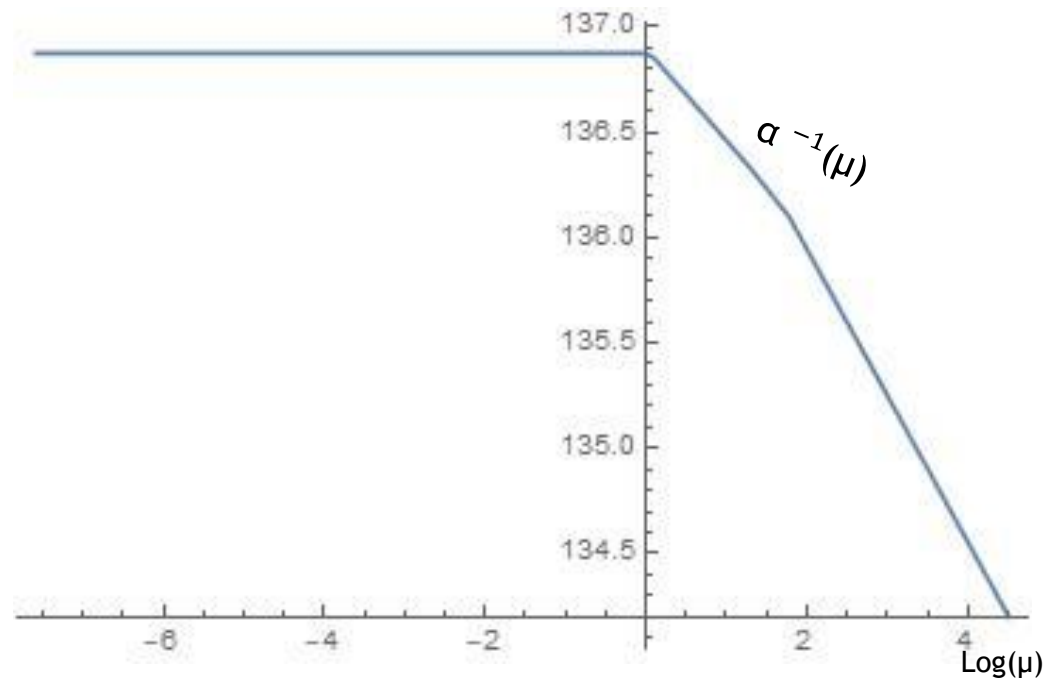
- ▶ Z_3 je izračunat na nivou dvije petlje i dobiveno je: $Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon}$

- ▶ Uvrštavanjem u gornji izraz se dobije:
$$e_B \mu^{-\epsilon} = e \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^4}{128\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\approx e \left(1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{e^4}{256\pi^4} \frac{1}{\epsilon} \right).$$

- ▶ Uz: $\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\partial e}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial e}$ i $\mu \frac{de}{d\mu} = \beta - \epsilon e$ dobije se izraz za beta funkciju:

$$\beta = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2}$$

- ▶ Numeričkom integracijom beta funkcije na nivou dvije petlje se dobije ovisnost konstante vezanja (naboja) o energiji
- ▶ Skala završava na masi Z bozona, a uzete su u obzir sve čestice koje se javljaju u teoriji
- ▶ Uključivanjem pojedinih čestica se mijenja nagib pravca



Zaključak

- ▶ RPT: uklonile su se divergencije koje se javljaju zbog velikog prijenosa impulsa
- ▶ Sve divergencije su se apsorbirale tako što su se redefinirale fizikalne veličine
- ▶ Uvedena je klizna: parametri teorije su postali ovisni o energiji- predviđanja za parametre na energijama višim od onih trenutno dostupnih eksperimentu
- ▶ Anomalni magnetski moment izračunat, a od interesa je bila i usporedba teorijski i eksperimentalno dobivenih magnetskih momenata za određene ione
- ▶ Otklonile su se sve nelokalne divergencije na razini dvije petlje
- ▶ Dobivena je beta funkcija na nivou dvije petlje koja je zatim i integrirana te je nađena ovisnost konstante vezanja o energiji

Literatura

- ▶ [1] Ilakovac, Amon: Relativistička kvantna fizika prema Peskin-Schroederu (skripta iz kolegija Teorija polja 1 i 2)
- ▶ [2] Mađor-Božinovic, Marija: Renormalizacijska grupa (diplomski rad) <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:295963>
- ▶ [3] Weinberg, Steven: The Quantum Theory of Fields, Volume II, Modern Applications 1st ed., Cambridge University Press 1996
- ▶ [4] Peskin, Michael E. ; Schroeder, Daniel V.: An Introduction To Quantum Field Theory, Addison-Wesley 1995
- ▶ [5] Machacek, Marie E.; Vaughn, Michael T.: Two-loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory, (I). Wave Function Renormalization, Nucl. Phys. B 222(1983) 83-103
- ▶ [6] Sturm, Sven and Vogel, Manuel and Köhler-Langes, Florian and Quint, Wolfgang and Blaum, Klaus and Werth, G. (2017). High-Precision Measurements of the Bound Electron's Magnetic Moment. Atoms. 5. 4. [10.3390/atoms5010004](https://doi.org/10.3390/atoms5010004).

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Amonu Ilakovcu,
mag. phys. Mariji Mađor - Božinović i
dr. sc. Hermesu Belusci
na volji, vremenu, savjetima, velikom strpljenju i pomoći s kodom.

HVALA NA PAŽNJI!