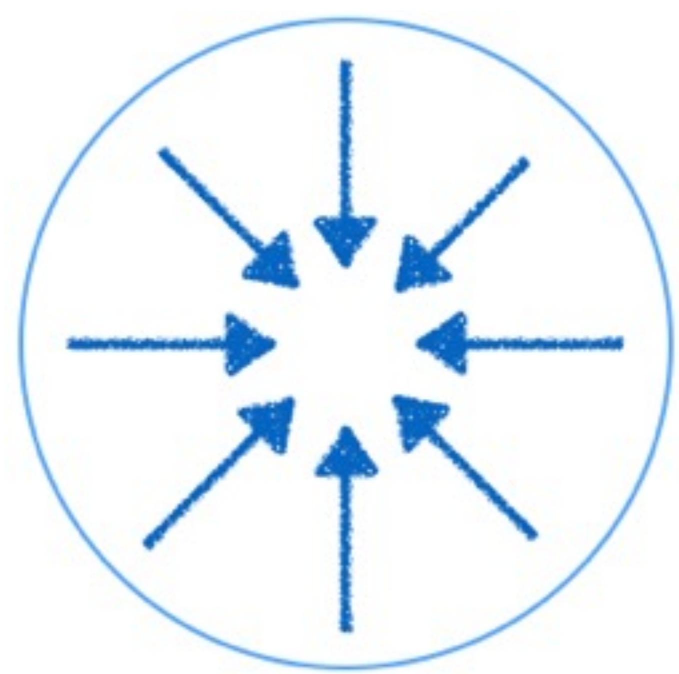
Samostalni seminar iz istraživanja u fizici
2.2.2016.

Gravitacija i entropija



Barbara Šoda
PMF, Fizički odsjek, Bijenička cesta 32, 10 000 Zagreb, Hrvatska

Mentor: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Crne rupe

Rješenja Einsteinovih jednadžbi

Primjeri:

Schwarzschild $M \neq 0,\ Q = 0,\ J = 0$

Reissner-Nordstrom $M \neq 0,\ Q \neq 0,\ J = 0$

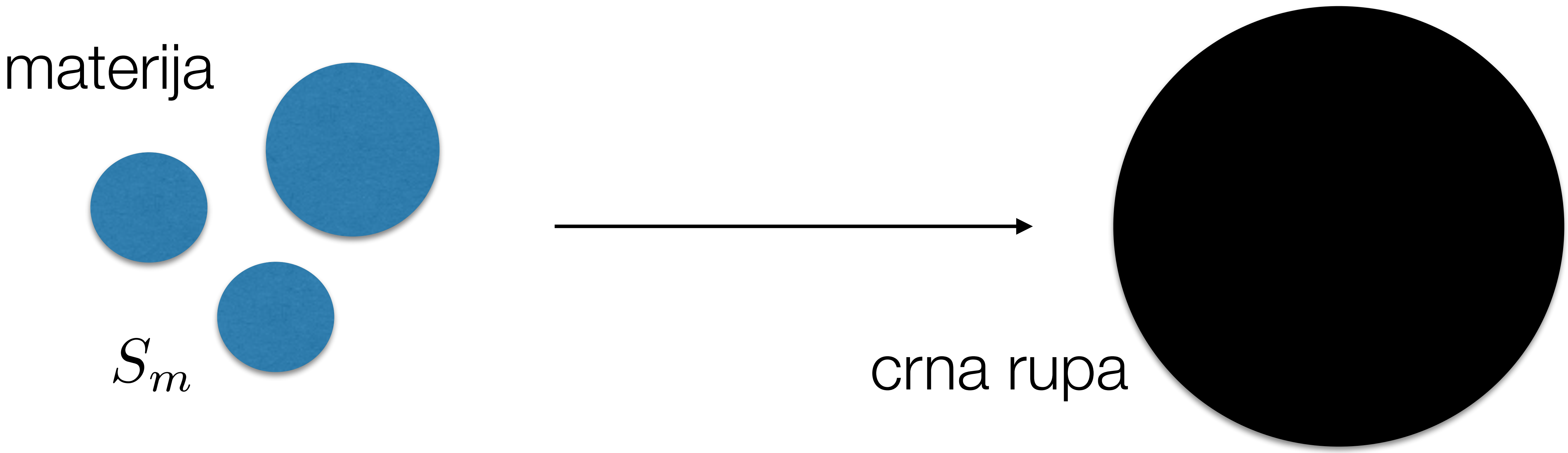
Kerr $M \neq 0,\ Q = 0,\ J \neq 0$

Kerr-Newman $M \neq 0,\ Q \neq 0,\ J \neq 0$

No-hair teorem: sve crne rupe su okarakterizirane samo s tri veličine: M, Q, J

Imaju li crne rupe temperaturu (i entropiju)?

Bekensteinova granica



$$S_{BH} = 0(?)$$

Drugi zakon termodinamike: $dS \geq 0$

<u>narušen</u>?

Bekensteinova granica

Rješenje je da pretpostavimo da crne rupe imaju entropiju: $S_{BH} = A/4$

Inspiracija iz Hawkingovog *teorema o površini crnih rupa*: $dA \geq 0$

(2. zakon termodinamike): $S_{BH} \propto A$

Konstantu proporcionalnosti 1/4 je fiksirao Hawking u računu temperature crnih rupa.

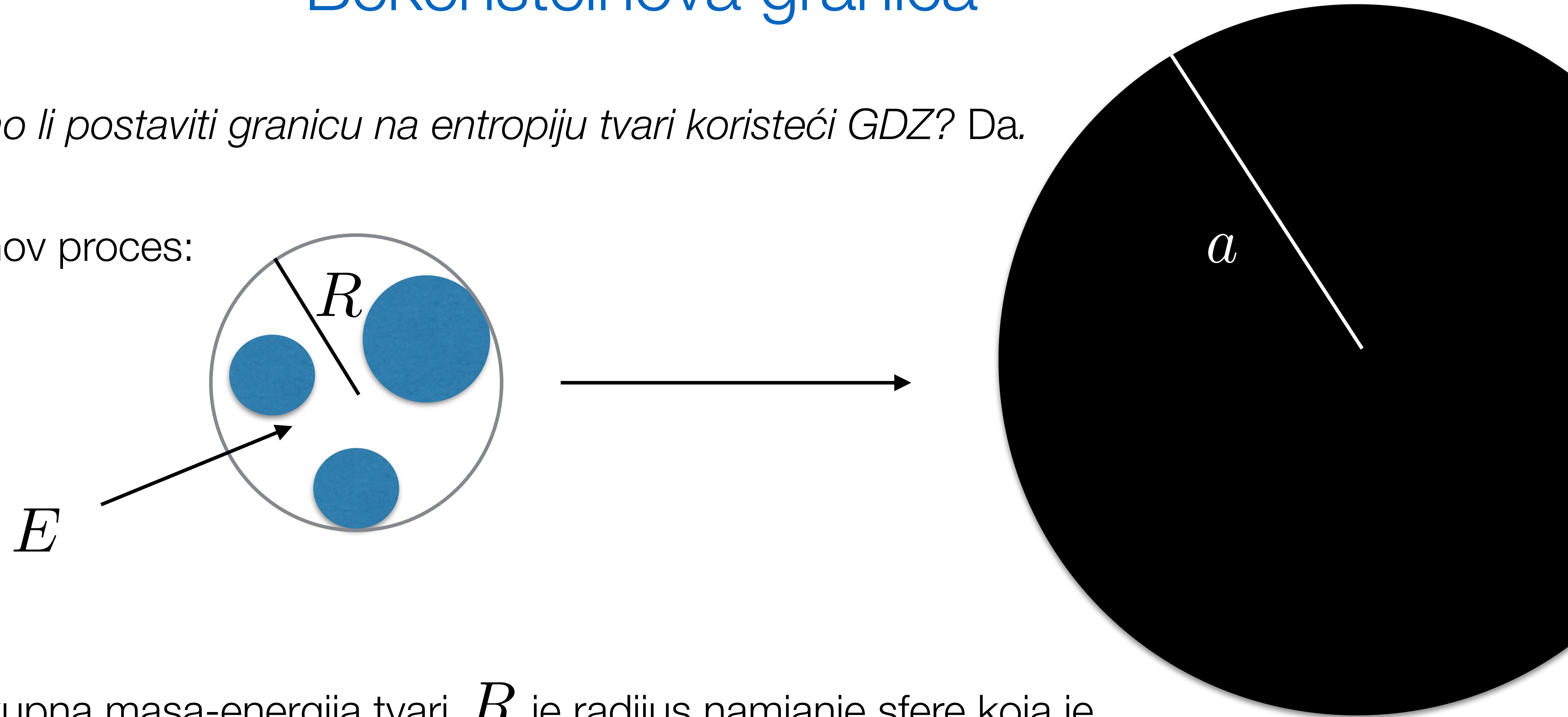
Iz ovoga postuliramo **generalizirani drugi zakon termodinamike (GDZ)**:

$$dS_{tot} = dS_m + dS_{BH} \geq 0$$

Bekensteinova granica

Možemo li postaviti granicu na entropiju tvari koristeći GDZ? Da.

Gerochov proces:

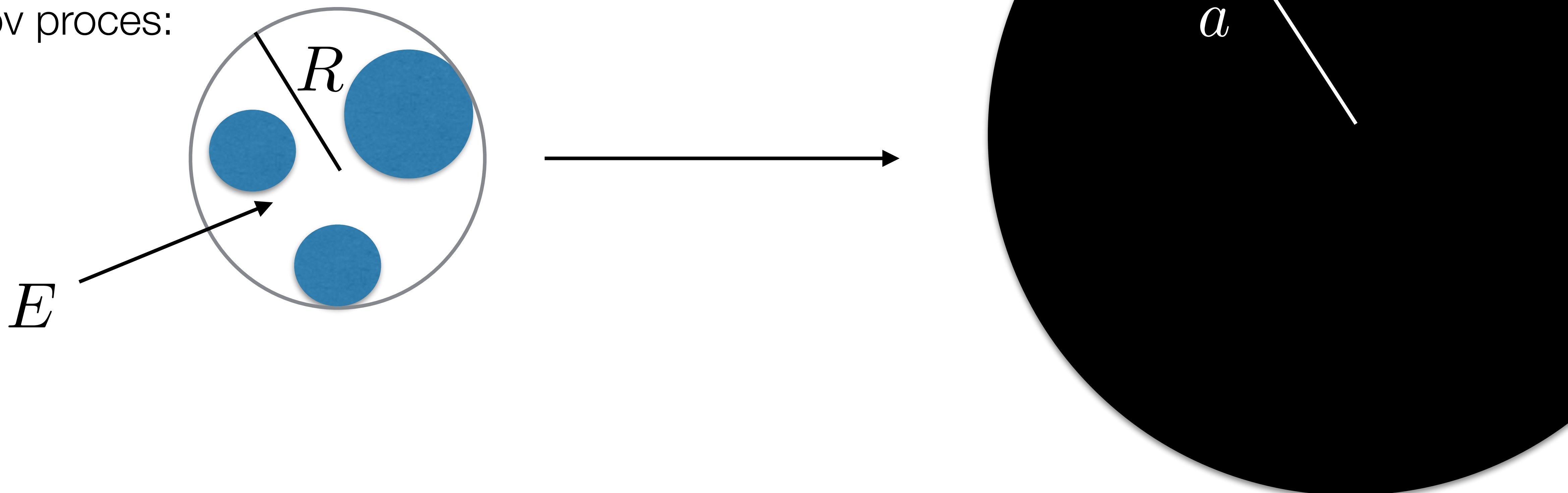


E je ukupna masa-energija tvari, R je radijus namjanje sfere koja je obuhvaća, a a radijus crne rupe, $a \gg R$

Min. ΔM $\Rightarrow$ Min. ΔR $\Rightarrow$ Min. ΔA $\Rightarrow$ Min. ΔS_{BH}

Bekensteinova granica

Gerochov proces:



Min. ΔS_{BH} uz $\Delta S_m + \Delta S_{BH} \geq 0$

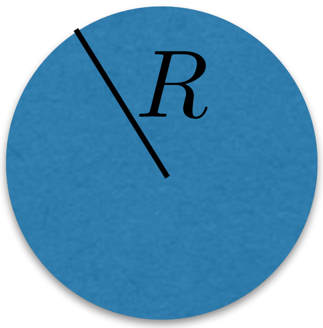
Ograničenje na to kolika je entropija tvari mogla biti prije ulaska u crnu rupu!

Iz ovoga procesa možemo dobiti granicu na entropiju tvari: $S \leq 2\pi E R$

(važno: pretpostavka je bila da u sustavu materije gravitacijska sila nije jako bitna globalno, tj. da je veličina R stabilna)

Sferična granica

Izvodimo slabiju granicu: Imamo sferno simetrični sustav materije



uvjet da nije kolabirao u crnu rupu: $R \geq 2M = 2E$

$$\Rightarrow S \leq \pi R^2 = A/4$$

Možemo li naći primjer gdje je ova granica narušena?

U prostorvremenu FRW:

$$\sigma = \frac{S}{V} = \mathrm{const.}$$

$$\Rightarrow S \propto R^3$$

$$A \propto R^2$$

za dovoljno veliki R granica je narušena.

Kovarijantna granica entropije

Motivirani smo pronaći granicu na entropiju koja ne može biti narušena.

Conjecture (Bousso, 1999):

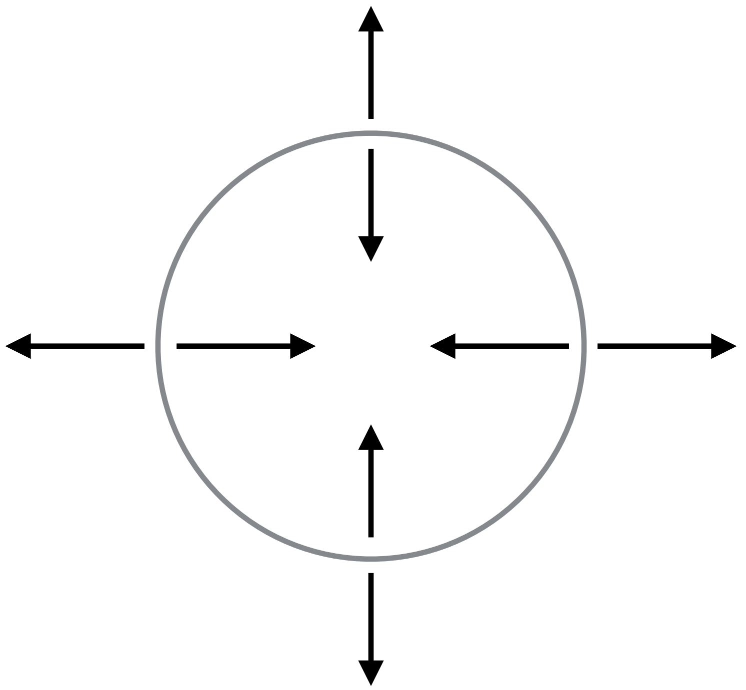
Neka je B bilo koja 2-dimenzionalna povezana prostorna ploha u 4-dimenzionalnom prostorvremenu M koje zadovoljava Einsteinovu jednadžbu i materija zadovoljava dominantni uvjet na energiju. Neka je A površina od B. Neka je L hiperploha ograničena s B i generirana jednom od 4 nul-kongruencije koje su ortogonalne s obzirom na B. Nadalje, neka je S entropija unutar hiperplohe L. Ako je ekspanzija kongruencije manja ili jednaka nuli u svakoj točki od L, onda je:

$$S \leq A/4$$

Kovarijantna granica entropije

1) Izaberemo 2D plohu B (npr. sferu) površine A
   (općenito ne treba biti zatvorena ploha)
2) pogledamo koje su 4 nul-kongruencije ortogonalne na B
3) odaberemo jednu čija ekspanzija nije pozitivna na B
4) pratimo svaku svjetlosnu zraku do točke u kojoj ekspanzija postane pozitivna
5) na taj način smo konstruirali svjetlosnu hiperplohu L
6) tvrdnja: entropija na toj hiperplohi L zadovoljava:

$$S \leq A/4$$

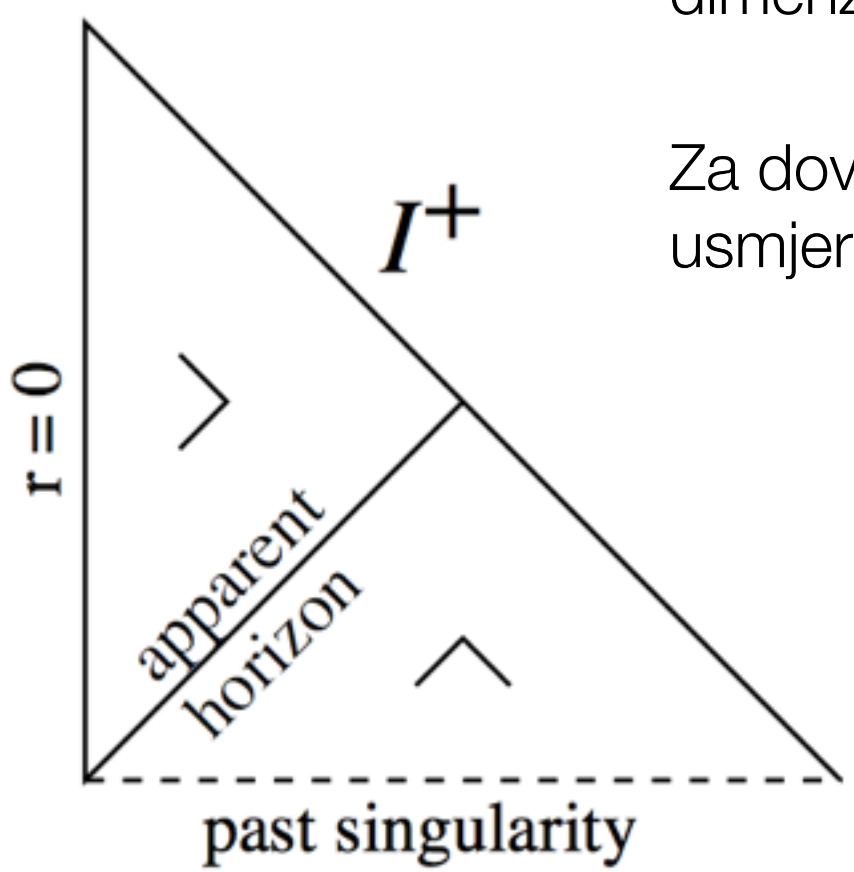


Kovarijantna granica entropije

Za razliku od Bekensteinove, ova granica nije narušena u FRW prostorvremenu.

Bekenstein: problem je bio brži rast entropije od površine s dimenzijom sustava materije.

Za dovoljno velike sfere, dopuštene su samo hiperplohe L usmjerene prema prošlosti.



Na njima entropija raste kao $S \propto R^2$,

jednako kao površina, i može se pokazati da granica nije narušena.

Kovarijantna granica entropije

Dokazi Boussoove granice:

1) u klasičnom režimu (Bousso, Flanagan, Marolffor, 2003)
2) kvantna tvar u nekom režimu (Bousso, Casini, Fisher, Maldacena, 2014)

Možemo li je općenito dokazati?

Ova granica trebala bi biti jedan od sastavnih dijelova teorije kvantne gravitacije.

Skrećemo pozornost na općenitio razumijevanje veze između entropije i geometrije.

“Kvantna” entropija

von Neumannova entropija: $S = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho)$

Za matricu gustoće koja opisuje čisto stanje $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ entropija je jednaka nuli.

Za d-dimenzionalni Hilbertov prostor, maksimalna entropija je $S = \log d$.

Za Hilbertov prostor koji je tenzorski produkt tri potprostora $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

entropija zadovoljava netrivijalnu nejednakost:

$$S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) \geq S(\rho) + S(\rho_2)$$ **(Strong subadditivity, SSA)**

gage su $\rho_{i(j)}$ reducirane matrice gustoće dobivene parcijalnim tragom
po odgovarajućim Hilbertovim potprostorima:

$$\rho_{12} = \mathrm{Tr}_3 \rho$$

$$\rho_2 = \mathrm{Tr}_{1,3} \rho$$

Može se pokazati da za Hilbertov prostor koji je tenzorski prostor nekog po volji velikog broja potprostora, $\mathcal{H} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{H}_i$

ako su A i B podskupovi skupa indeksa I i ako su odgovarajući Hilbertovi prostori $\mathcal{H}_{A,B} = \bigotimes_{i \in A,B} \mathcal{H}_i$

a odgovarajuće reducirane matrice gustoće $\rho_{A,B} = \mathrm{Tr}_{I-A,B}\,\rho$

onda vrijedi:

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cap B) + S(A \cup B)$$

$$S(A) + S(B) \geq S(A - B) + S(B - A)$$

gdje je $S(A) = S(\rho_A)$.

Ovo su općenita svojstva von Neumannove entropije.

Sada se fokusiramo na kontinuirane kvantne sustave u $\mathbb{R}^d$.

Hilbertov prostor je Fockov prostor $\mathcal{H} = \oplus_0^\infty \mathcal{H}_n$

gdje je 1-čestični prostor $\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

a n-čestični je produkt n 1-čestičnih prostora $\mathcal{H}_1$.

Slično tome, možemo opisati kontinuirani kvantni sustav ograničen na potprostor V od $\mathbb{R}^d$.

Da bismo mogli primjenjivati ranije izvedene općenite nejednakosti, zahtijevamo:

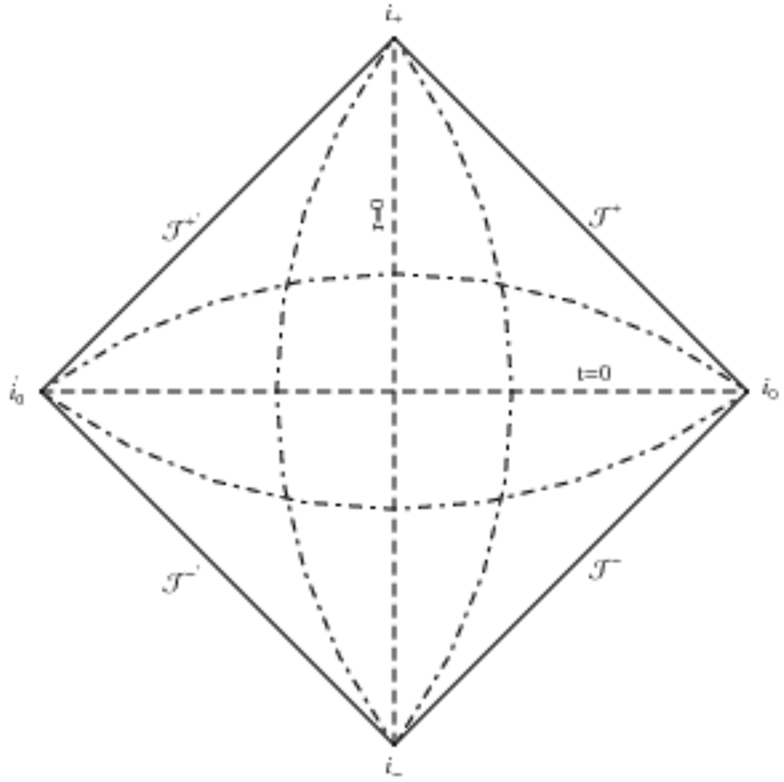
Ako V_1 i V_2 imaju presjek mjere nula, tada je ukupni Hilbertov prostor produkt:

$$\mathcal{H}(V_1 \cup V_2) = \mathcal{H}(V_1) \otimes \mathcal{H}(V_2)$$

A matrice gustoće zadovoljavaju: $\rho_V = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(\mathcal{V}')} \rho_{V \cup V'}$

Koristimo i činjenicu da ako je ukupno stanje ρ invarijantno na transformaciju U, onda je entropija S(U(A)) jednaka S(A).

Izvest ćemo svojstva entropije u Minkowski prostorvremenu. Važno je napomenuti da matricu gustoće pripisujemo podskupovima Cauchyjeve plohe, a zatim baratamo ranije spomenutim nejednakostima itd.

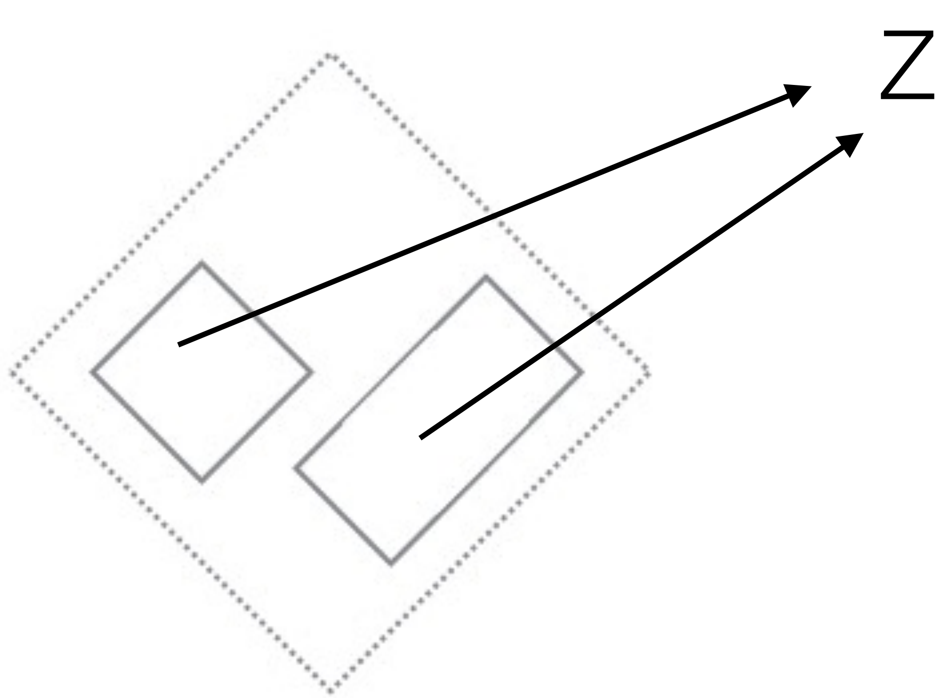


Iz simetrija prostorvremena Minkowskog i nejednakosti koje zadovoljava kvantna entropija možemo izvesti sljedeći teorem:

Teorem 1. Najopćenitiji oblik za relativističku funkciju entropije na podskupu Z u (1+1)-dimenzionalnom Minkowski prostoru dan je s

$$S(Z) \equiv S_m = \gamma + (m-1)\beta$$

gage je m bro povezanih komponenti od Z, γ je definirana kao entropija na iščezavajuće maloj Cauchy plohi, $\gamma = \lim_{x\to 0} S(x)$, i γ ≥ β ≥ 0.



Za (d+1)-dimenzionalno Minkowski prostorvrijeme može se pokazati:

Teorem 2. Najopćenitiji oblik za relativističku funkciju entropije na relativističkom poliedru u (d + 1)-dimenzionalnom Minkowski prostorvremenu, za d > 1, dan je s

$$S(X) = a + s \ \mathrm{area}(X)$$

gdje su a i s ne-negativne konstante i area(X) je površina granice Cauchyjeve plohe od X.

Sažetak

Uveli smo pojam granice na entropiju.

Izveli smo Bekensteinovu i sferičnu granicu i objasnili u kojim režimima vrijede te koja ima je važnost.

Motivirani ovim granicama, uveli smo kovarijantnu granicu. Raspravili smo o važnosti i podrijetlu te granice.

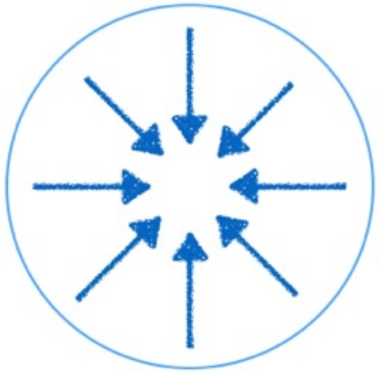
Na kraju, izveli smo vezu između entropije i geometrije pretpostavljajući samo općenita svojstva kvantne entropije i koristeći svojstva prostorvremena Minkowskog.

Dobili smo da entropija ima konstantni doprinos i doprinos proporcionalan površini Cauchyjeve plohe podskupa prostorvremena Minkowskog.

Reference

- S. W. Hawking and G. F. R. Ellis: *The Large scale structure of spacetime* (Cambridge, Cambridge University Press, 1973)
- S. W. Hawking: *Black hole explosions?*, Nature 248, 30 - 31 (1974)
- J.D. Bekenstein: *Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics*, Physical Review D, Volume 9, Number 12 (1974)
- G. ’t Hooft: *Dimensional reduction in quantum gravity*, e-print gr-qc/9310026 (1993)
- L. Susskind: *The world as a hologram*, J. Math. Phys. 36, 6377 (1995)
- R. Bousso: A covariant entropy conjecture, Journal of High Energy Physics 1999 (1999)
- R. Bousso, H. Casini, Z. Fisher, and J. Maldacena: *Proof of a quantum Bousso bound*, Phys. Rev. D 90, 044002 (2014)
- R. Bousso, É. É. Flanagan, and D. Marolf: *Simple sufficient conditions for the generalized covariant entropy bound*, Phys. Rev. D 68, 064001 (2003)
- E. H. Lieb, M. B. Ruskai: *Proof of the strong subadditivi*ty of quantum-mechanical entropy, a chapter in "Inequalities", (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002) p. 63-66
- H. Casini: *Geometric entropy, area and strong subadditivity*, Classical and Quantum Gravity, Volume 21, Number 9 (2004)

Hvala na pažnji!



Pitanja?