Buchdahlova granica

Ema Kompar
mentor: izv. prof. Ivica Smolić

Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek
Bijenička cesta 32, 10000 Zagreb

January 25, 2023

Uvod

Buchdahlov teorem postavlja granicu na maksimalnu održivu kompaktnost obične gravitirajuće materije. Za statične sferno-simetrične konfiguracije s masom M i radijusom R mora biti zadovoljeno $2M/R \leq 8/9$, tj. $M \leq 4R/9$, gdje se koriste prirodne jedinice ($c = G = 1$) i $(-, +, +, +)$ signatura metrike.
Izvodimo:

- Schwarzschildovo vanjsko i unutarnje rješenje za idealni fluid
- Tolman-Oppenheimer-Volkoff hidrostatsku jednadžbu
- Buchdahlovu granicu na masu zvijezde sa zadanim radijusom i nenegativnom monotono padajućom gustoćom

Einsteinova jednadžba polja – sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Einsteinova jednadžba povezuje geometriju prostorvremena s raspodjelom mase, energije i impulsa te su rješenja komponente metrike. Trag jednadžbe (1) omogućuje zapis:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \tag{2}$$

Vakuumsko rješenje:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

Prvo netrivijalno vakuumsko rješenje dao je Schwarzschild 1916.

Promatramo statično, sferno-simetrično rješenje Einsteinove jednadžbe s materijom zatvorenom radijusom R koja se ponaša kao idealni fluid s gustoćom koja se ne povećava s radijalnom koordinatom.
Idealni fluid može se u potpunosti opisati gustoćom u mirujućem sustavu ρ i izotropnim tlakom P; nema viskoznost, ne podliježe smicanju i toplinskoj vodljivosti.
Pretpostavljamo $\rho > 0$ i $P > 0$. Masa mora zadovoljavati:

$$M \leq \frac{4Rc^2}{9G} \equiv \frac{4R}{9} \tag{4}$$

Za dokaz teorema Buchdahl koristi Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) jednadžbu.

Rješenje opisuje vanjsko gravitacijsko polje statičnog sferno-simetričnog tijela s 4D Lorentzovom metrikom čiji Riccijev tenzor iščezava, koja je statična i sferno-simetrična.
Prostorvrijeme je:

- stacionarno – ako postoji vremensko Killingovo vektorsko polje ξ^μ
- statično – ako je stacionarno i postoji prostorna hiperploha Σ na koju je ξ^μ ortogonalno, tj. invarijantno je na transformacije $t \to t+$konst. i $t \to -t$, komponente metrike ne ovise o vremenu i ne postoji miješani član $dtdx^i$
- sferno-simetrično – invarijantno na rotacije

Metrika proizvoljnog statičnog sferno-simetričnog prostorvremena:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{5}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

Christoffelovi simboli računaju se:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right) \tag{7}$$

Neiščezavajući simboli su:

$$\Gamma^t{}_{rt} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}$$

$$\Gamma^r{}_{tt} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{h(r)}$$

$$\Gamma^r{}_{rr} = \frac{1}{2}\frac{h'(r)}{h(r)}$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{h(r)}$$

$$\Gamma^r{}_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{h(r)}$$

$$\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cot\theta$$

gdje je (′) oznaka derivacije po r.

Schwarzschildovo rješenje

Izvod Schwarzschildovog rješenja

Riemannov tenzor računamo formulom:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} \tag{8}$$

Neiščezavajuće komponente su:

$$R^{r}{}_{trt} = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)}$$

$$R^{\theta}{}_{t\theta t} = \frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{h(r)} = R^{\phi}{}_{t\phi t}$$

$$R^{\theta}{}_{r\theta r} = \frac{1}{2r}\frac{h'(r)}{h(r)} = R^{\phi}{}_{r\phi r}$$

$$R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1 - \frac{1}{h(r)}$$

Riccijev tenzor iz Riemannovog dobije se formulom:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{9}$$

Komponente Riccijevog tenzora su konačno:

$$R_{tt} = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)} \tag{10}$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)f(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)} + \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} \tag{11}$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{r}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{r}{2}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + 1 - \frac{1}{h(r)} \tag{12}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \cdot R_{\theta\theta} \tag{13}$$

Rješavamo vakuumsku Einsteinovu jednadžbu $R_{\mu\nu} = 0$.

$$R_{tt} = 0 \tag{14}$$

$$\implies \frac{1}{2} f''(r) = \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} - \frac{1}{r} f'(r) \tag{15}$$

$$R_{rr} = 0 \tag{16}$$

$$\implies \frac{1}{2} f''(r) = \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f(r)}{h(r)} \cdot h'(r) \tag{17}$$

Izjednačavamo komponente pa time i izraze $f''(r)$. Oduzimanjem odgovarajućih članova dobivamo:

$$-\frac{1}{r} f'(r) = \frac{1}{r}\frac{f(r)}{h(r)} \cdot h'(r) \implies \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{h'(r)}{h(r)} = 0 \tag{18}$$

$$f(r) = \frac{C}{h(r)} \tag{19}$$

Bez smanjenja općenitosti, $C = 1$.

Rješavamo $R_{\theta\theta}$ te $h(r)$ pišemo preko $f(r)$.

$$R_{\theta\theta} = -\frac{r}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{r}{2}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + 1 - \frac{1}{h(r)} = 0 \tag{20}$$

$$-\frac{r}{2}f'(r) + \frac{r}{2}f^2(r) \cdot \frac{-f'(r)}{f^2(r)} + 1 - f(r) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{d}{dr}(rf(r)) = 1 \implies f(r) = 1 + \frac{C}{r} \tag{22}$$

Konačno pišemo metriku:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{C}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{23}$$

Schwarzschildovo rješenje je asimptotski ravno: kako $r \to \infty$ metrika se približava sferno-simetričnoj metrici Minkowskog. To omogućuje interpretaciju Schwarzschildovog rješenja kao vanjsko gravitacijsko polje izoliranog tijela. U režimu slabog polja ($r \to \infty$) ponašanje testnog tijela u skladu je s ponašanjem u Newtonovom polju mase $M = -C/2$ te to interpretiramo kao ukupnu masu Schwarzschildovog prostorvremena.
Metriku dalje pišemo kao:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{24}$$

Tenzor energije i impulsa koji opisuje idealni fluid:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \tag{25}$$

gdje je $u^\mu = -\sqrt{f(r)}(dt)^\mu$ 4-brzina fluida.
Razmatramo izotropni slučaj ($P_r = P_\theta = P$) u kojem tlak iščezava na rubu tijela.
Rješavamo Einsteinovu jednadžbu. Prvo nam je potreban Riccijev skalar.

$$R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \tag{26}$$

$$R = -\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)} + \frac{1}{2}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} - \frac{2}{r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{2}{r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \tag{27}$$

Tenzor $T_{\mu\nu}$ možemo zapisati:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r)\cdot\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r)\cdot P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cdot P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\cdot P \end{pmatrix} \tag{28}$$

Rješavamo jednadžbu za neovisne komponente.

$$8\pi T_{\mu\mu} = R_{\mu\mu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\mu} \tag{29}$$

Za T_{tt}:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \tag{30}$$

T_{rr}:

$$8\pi P = \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)f(r)} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \tag{31}$$

$T_{\theta\theta}$:

$$8\pi P = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} \tag{32}$$

Jednadžba t komponente ovisi samo o $h(r)$ te možemo dalje raspisati:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right)\right) \tag{33}$$

iz čega možemo odrediti $h(r)$ kao generalizaciju vakuumskog Schwarzschildovog rješenja u obliku:

$$h(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \tag{34}$$

gdje je:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + a \text{ gdje je } a = \text{konst.} \tag{35}$$

Glatkoća metrike zahtijeva $h(r) \to 1$ kako $r \to 0$, stoga postavljamo $a = 0$ da bismo izbjegli singularitet u $r = 0$.
Nužan uvjet statičnosti: $h(r) \geq 0$, tj. $2m(r) \leq r$. Unutarnje rješenje spajamo s vanjskim Schwarzschildovim na način:

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr \tag{36}$$

$f(r)$ pišemo kao funkciju parametra $\phi(r)$:

$$f = e^{2\phi} \text{ iz čega slijedi } f'(r) = 2f\frac{d\phi}{dr} \tag{37}$$

pa r komponentu Einsteinove jednadžbe pišemo:

$$8\pi P = \frac{2}{rh(r)}\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \tag{38}$$

Nalazimo i $\phi'(r)$ koristeći ranije dobiven izraz za $h(r)$:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi r^3 P + m(r)}{r\left(r - 2m(r)\right)} \tag{39}$$

Za daljnju analizu treba nam i $f''(r)$:

$$f''(r) = 4f\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + 2f\frac{d^2\phi}{dr^2} \tag{40}$$

i $\phi''(r)$:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{12\pi r^2 P + 4\pi r^2\frac{dP}{dr} + \frac{dm(r)}{dr}}{r\left(r - m(r)\right)} - \frac{\left(4\pi r^3 + m(r)\right)\left(2r - r\frac{dm(r)}{dr} - m(r)\right)}{r^2\left(r - m(r)\right)^2} \tag{41}$$

Sad $f''(r)$ pišemo:

$$f''(r) = \frac{2f}{r^2\left(r-2m(r)\right)^2}\Bigg\{2\left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2 + r\left(r-2m(r)\right)\left(12\pi r^2 P + 4\pi r^2\frac{dP}{dr} + \frac{dm(r)}{dr}\right) - \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(2r - r\frac{dm(r)}{dr} - m(r)\right)\Bigg\} \tag{42}$$

te uz

$$\frac{dh}{dr} = 2\cdot\frac{rm'(r) - m(r)}{\left(r-2m(r)\right)^2} \tag{43}$$

pišemo θ komponentu Einsteinove jednadžbe gdje umjesto $m'(r)$ pišemo $4\pi\rho r^2$:

$$8\pi P = \frac{1}{r^3}\frac{1}{r-2m(r)}\Big\{2\left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2 + r\left(r-2m(r)\right)\left(12\pi r^2 P + 4\pi r^3\frac{dP}{dr} + 4\pi r^2\rho\right) - \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(2r - 2m(r) - 8\pi r^3\rho\right) - \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(4\pi r^3\rho - m(r)\right) - \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2\Big\} + \frac{1}{r^3}\left(4\pi r^3 P - 4\pi r^3\rho + m(r)\right) \tag{44}$$

Daljnjim pojednostavljenjima izraza i množenjem s $r^3(r-2m(r))$ dobivamo:

$$
\begin{gathered}
8\pi r^3\left(r-2m(r)\right)P=\left(4\pi r^3P+m(r)\right)\cdot 4\pi r^3\left(P+\rho\right)-2\cdot\left(4\pi r^3P+m(r)\right)\left(r-2m(r)\right) \\
+4\pi r^4\left(r-2m(r)\right)\frac{dP}{dr}+4\pi r^3\left(r-2m(r)\right)\left(3P+\rho\right)+4\pi r^3\left(r-2m(r)\right)\left(P-\rho\right)+2m(r)\left(r-2m(r)\right)
\end{gathered}
\tag{45}
$$

Izoliranjem $P'(r)$ i skraćivanjem odgovarajućih komponenti dobivamo:

$$
\begin{aligned}
4\pi r^4\left(r-2m(r)\right)\frac{dP}{dr}&=-4\pi r^3\left(P+\rho\right)\left(4\pi r^3P+m(r)\right) \\
\frac{dP}{dr}&=-\frac{P+\rho}{r}\frac{4\pi r^3P+m(r)}{r-2m(r)}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

gdje je krajnji izraz Tolman-Oppenheimer-Volkoff hidrostatska jednadžba.
Za statičnu i sferno-simetričnu zvijezdu:

$$
ds^2=-e^{2\phi}dt^2+\frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right)
\tag{47}
$$

nužan i dovoljan uvjet stabilnosti je zadovoljena TOV jednadžba.

Razmatramo konfiguraciju konstantne gustoće ρ_0 nestlačivog fluida.

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \tag{48}$$

Za takvu raspodjelu gustoće masu određujemo:

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\rho_0 r^3 & (r \leq R) \\ M & (r > R) \end{cases} \tag{49}$$

U limesima $P \ll \rho$ i $m(r) \ll r$, jednadžba se reducira na Newtonovu jednadžbu hidrostatičke ravnoteže:

$$\frac{dP}{dr} \approx -\frac{\rho m(r)}{r^2} \tag{50}$$

koja integracijom daje:

$$P(r) = \frac{2\pi}{3}\rho_0^2 \left(R^2 - r^2\right) \tag{51}$$

gdje imamo na umu iščezavanje tlaka na površini zvijezde $P(R) = 0$. Središnji tlak je onda:

$$P_c = \frac{2\pi}{3}\rho_0^2 R^2 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \rho_0^{\frac{4}{3}} M^{\frac{2}{3}} \tag{52}$$

Integriramo TOV jednadžbu:

$$\begin{gathered}\frac{dP}{dr} = -\frac{P+\rho_0}{r}\frac{4\pi r^3 P + \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0}{r - \frac{8\pi}{3}r^3\rho_0} \\ \frac{dP}{P^2 + \frac{4}{3}\rho_0 P + \frac{1}{3}\rho_0^2} = -\frac{4\pi r^2 dr}{r - \frac{8\pi}{3}r^3\rho_0} \Big/ \int_r^R \\ -\frac{3}{2\rho_0}\ln\left(\frac{\rho_0 + 3P(r)}{\rho_0 + P(r)}\right) = -4\pi\frac{3}{16\pi\rho_0}\ln\left(\frac{3 - 8\pi r^2\rho_0}{3 - 8\pi R^2\rho_0}\right) \\ \frac{\rho_0 + 3P(r)}{\rho_0 + P(r)} = \frac{\left(3 - 8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(3 - 8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}}\end{gathered} \tag{53}$$

Sređivanjem izraza nalazimo jednadžbu stanja:

$$P(r) = \rho_0\frac{\left(3 - 8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3 - 8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}}{3\left(3 - 8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3 - 8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{54}$$

Koristeći:

$$3 - 8\pi R^2\rho_0 = 3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)$$
$$3 - 8\pi r^2\rho_0 = 3\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right) \tag{55}$$

središnji tlak možemo pisati:

$$P_c = \rho_0 \frac{1 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \tag{56}$$

koji se u limesu $R \gg M$ reducira na Newtonovu vrijednost.
Središnji tlak postaje beskonačan za:

$$3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ kad je } R = \frac{9}{4}M \tag{57}$$

Korištene pretpostavke su $\rho(r) = \rho_0 =$konst., $\rho_0 > 0$ te za tlak $P(r) \geq 0$ i $P'(r) < 0$.

Buchdahlova granica

Buchdahlova granica:

$$\frac{2M}{R} \leq \frac{8}{9} \tag{58}$$

Ako je gustoća nenegativna i monotono padajuća:

$$\rho(r) \geq 0$$
$$\rho'(r) \leq 0$$

za statične sferno-simetrične zvijezde radijusa R u općoj relativnosti najveća moguća masa dana je najvećom mogućom vrijednosti mase za homogenu zvijezdu $M_{max} = 4R/9$.

Buchdahlova granica

Zvijezde radijusa R

Postojanje gornje granice dolazi već iz uvjeta statičnosti $h(r) \geq 0$, što daje:

$$\frac{1}{1 - \frac{2M}{R}} \geq 0 \implies \frac{2M}{R} \leq 1 \tag{59}$$

Ovaj uvjet može se izoštriti koristeći uvjet $f(r) \geq 0$ koji kaže da je Killingovo vektorsko polje ξ^μ svugdje vremenskog tipa. Uzimamo pretpostavke na gustoću $\rho(r) \geq 0$ i $\rho'(r) \leq 0$ bez pretpostavki na tlak i promatramo Einsteinove jednadžbe.

$$G_{rr} - G_{\theta\theta} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) - \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} - \frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} = 0 \tag{60}$$

Ubacujemo $h(r)$ i preoblikujemo:

$$\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2}\left\{\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} \cdot \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{f'(r)}{f(r)}\right)\right\} = -\frac{1}{r^3}\left(r\frac{dm(r)}{dr} - 3m(r)\right) \tag{61}$$

Buchdahlova granica

Zvijezde radijusa R

S lijeve strane izlučujemo $(f(r)h(r))^{-1/2}$, i sve dijelimo s $-r$:

$$-\frac{1}{2r^2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{1}{\sqrt{f(r)h(r)}}\left\{\frac{f''(r)\sqrt{f(r)h(r)}}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}\frac{f(r)h'(r)+h(r)f'(r)}{\sqrt{f(r)h(r)}}\right\} = \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \quad (62)$$

Prepoznajemo derivacije $\sqrt{f(r)h(r)}$ po r pa $f'(r)/\sqrt{f(r)h(r)}$ po r:

$$-\frac{1}{2r^2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{1}{\sqrt{f(r)h(r)}}\frac{d}{dr}\left(\frac{f'(r)}{\sqrt{f(r)h(r)}}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \quad (63)$$

Množimo s $\sqrt{f(r)h(r)}$ pa prepoznajemo derivaciju $f'(r)/\left(r\sqrt{f(r)h(r)}\right)$ po r:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{f'(r)}{2r\sqrt{f(r)h(r)}}\right) = \sqrt{f(r)h(r)}\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \quad (64)$$

i konačno:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d}{dr}\sqrt{f(r)}\right) = \sqrt{f(r)h(r)}\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \quad (65)$$

Buchdahlova granica

Zvijezde radijusa R

Budući da se gustoća smanjuje s radijusom $\rho'(r) \leq 0$, prosječna gustoća koja je proporcionalna s $m(r)/r^3$, također monotono pada s r. Iz toga se piše:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) &\leq 0 \\ \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d\sqrt{f(r)}}{dr}\right) &\leq 0 \end{aligned} \tag{66}$$

Integracijom prema unutra od R do r dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}(r) &\geq \frac{1}{R\sqrt{h(R)}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}(R) \\ = \frac{1}{R}\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2M}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{R}}} &= \frac{M}{R^3} \end{aligned} \tag{67}$$

Integracijom od R do 0 dobivamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{f(R)} - \sqrt{f(0)} &\geq \frac{M}{R^3}\int_0^R r\sqrt{h(r)}dr \\ \sqrt{f(0)} &\leq \sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \frac{M}{R^3}\int_0^R \sqrt{\frac{r}{r-2m(r)}}rdr \end{aligned} \tag{68}$$

Buchdahlova granica

Zvijezde radijusa R

Koristili smo $f(R) = 1 - \frac{2M}{R}$ i eksplicitni oblik za $h(r)$. Iz uvjeta $\rho'(r) \leq 0$ uočavamo da $m(r)$ ne smije biti manje nego što bi bilo u slučaju homogene gustoće zvijezde $\rho'(r) = 0$.

$$m(r) \geq \frac{Mr^3}{R^3} \tag{69}$$

te će izraz za $\sqrt{f(0)}$ biti najmanji kad vrijedi jednakost.

$$\begin{aligned}\sqrt{f(0)} &\leq \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{M}{R^3}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}} r dr \\ \sqrt{f(0)} &\leq \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{70}$$

Nužan uvjet statičnosti $\sqrt{f}(0) \geq 0$ daje:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{2M}{R} \leq \frac{8}{9} &\implies M \leq \frac{4R}{9}\end{aligned} \tag{71}$$

što je traženi rezultat. U ovom slučaju nije bilo nikakvih pretpostavki na tlak P, koji nije ni ušao u izvod.

Zaključak

Ispitali smo omjer mase i radijusa $2M/R$ fizikalno mogućeg statičnog sferno-simetričnog objekta obične gravitirajuće materije u općoj relativnosti. Pokazali smo da teorija uvijek daje gornju granicu omjera koji strogo leži ispod vrijednosti koju poprima kad se stvara horizont.
Buchdahlov teorem koristan je u promatranju alternativa crnim rupama. Da bi se konstruirala dobra alternativa, potrebna je ekstremna kompaktnost objekta i kršenje Buchdahlove nejednakosti, što znači da bi jedna od pretpostavki teorema bila netočna. Korištene pretpostavke su:

- Opća relativnost je točna teorija gravitacije
- Rješenje je sferno simetrično
- Materija je opisana idealnim fluidom
- Fluid je ili izotropan ili blago anizotropan, u smislu da je tangencijalni tlak manji od radijalnog $P_r \geq P_\theta$
- Radijalni tlak i gustoća su pozitivni, $P_r \geq 0$, $\rho \geq 0$
- gustoća energije se smanjuje prema van $\rho'(r) \leq 0$

Zaključak

Proširenje teorije

Glavne osnove proširenja teorije su proširenje definicije vrste tvari – udaljavanje od idealnog fluida, i poopćavanje na sustave niže simetrije. Najčešće se promatra anizotropni slučaj i rotacije.
Dodatno, osim na globalnu kompaktnost $2M/R$, ograničenja se mogu postaviti na:

- unutarnju kompaktnost $\frac{2m(r)}{r}$
- lokalno mjerenu akceleraciju zbog gravitacije
- komponente metrike prostorvremena
- razne linearne kombinacije tlaka i gustoće

LITERATURA I

Andersson, L. (42008). *Report on GRG18, Session A3, Mathematical studies of field equations*. Tech. rep. odjeljak 1.

Bondi, H. (1964). "Massive Spheres in General Relativity". In: *Proc. R. Soc. Lond.* A282, pp. 303–317.

Buchdahl, H. A. (1959). "General relativistic fluid spheres". In: *Phys. Rev.* 116, pp. 1027–1034.

Cardoso, V. and P. Pani (2019). *Testing the nature of dark compact objects: a status report*. Tech. rep. 3.1, 3.3, 3.4. Centra, University of Lisabon, CERN, University of Rome.

Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry*. Addison Wesley.

Guven, J. and N. O Murchadha (1999). "Bounds on $2M/R$ for Static Spherical Objects". In: *Phys. Rev. D* 60, p. 084020.

Heinzle, J. Mark (2007). *Bounds on 2m/r for static perfect fluids*. DOI: `10.48550/ARXIV.0708.3352`. URL: `https://arxiv.org/abs/0708.3352`.

Martin, Damien and Matt Visser (July 2003). "Bounds on the interior geometry and pressure profile of static fluid spheres". In: *Classical and Quantum Gravity* 20.16, pp. 3699–3716. DOI: `10.1088/0264-9381/20/16/311`.

Sharma, R. et al. (2021). "Anisotropic generalization of Buchdahl bound for specific stellar models". In: *Eur. Phys. J. C* 81, p. 527.

Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press.