Kvantna kompletnost i prostornovremenski singulariteti

Jan Dragašević

Mentor: izv.prof.dr.sc. Ivica Smolić

Sadržaj

Uvod

Opća teorija relativnosti

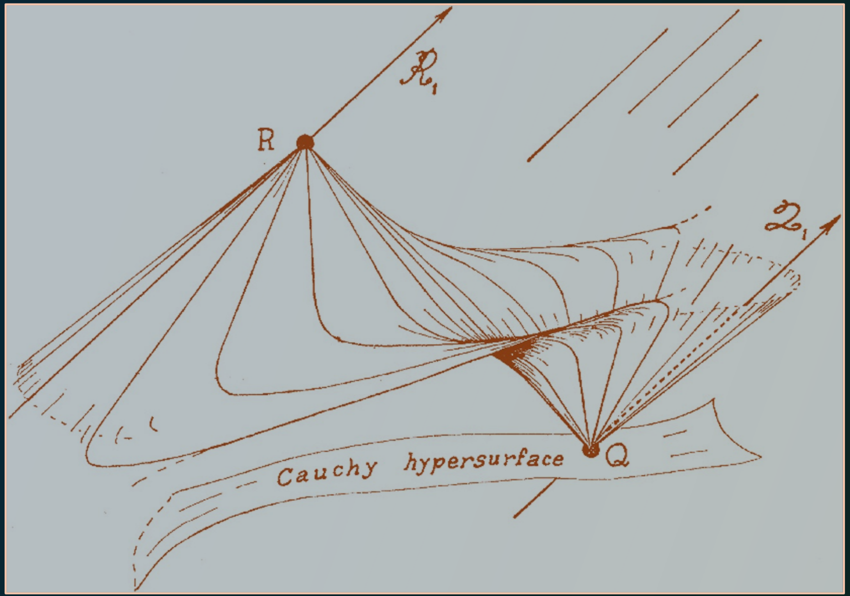
- Međudjelovanje oblika PV i materije
- Potrebni dodatni fizikalni uvjeti
- Crne rupe $\longrightarrow$ Singulariteti

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}$$

Singulariteti

- Nepotpunost geodezika – Penroseov teorem
- Lom determinističke prirode teorije

- CILJ: Uvjeti klasične i kvantne singularnosti PV



R. M. Wald, Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times, Journal of Mathematical Physics 21, 2802 (1980)

Kvantna kompletnost

- Klasične čestice ne postoje
- Korištenje kvantnih proba

PV je kvantno kompletno ako je evolucija testnog valnog paketa jedinstveno određena početnim stanjem paketa, mnogostrukosti i metrikom.

Klasični i kvantni singulariteti

G. F. R. Ellis and B. G. Schmidt, Singular space-times, General Relativity and Gravitation 8, 915 (1977).

Klasična singularnost

- PV (M, g) je po definiciji glatko
- Singularne točke se izrezuju kako bi ostatak teorije bio prihvatljiv i koristan
- Izrezivanje ostavi granicu ∂M u obliku rupe

Penroseov teorem

Ako povezano, globalno hiperbolično prostorvrijeme (M, g) sadrži nekompaktnu Cauchyjevu hiperplohu Σ i zatvorenu, buduće zarobljenu plohu; te ako je za u_μ svjetlosnog tipa zadovoljen energijski uvjet $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$ tada postoje buduće-nepotpuni svjetlosni geodezici pa je prostorvijeme singularno.

G. F. R. Ellis and B. G. Schmidt, Singular space-times, General Relativity and Gravitation 8, 915 (1977)

Klasična singularnost

- Divergencije invarijanti
- Kvaziregularni, neskalarnih i skalarnih zakrivljenosti

- Uzročno-posljedični odnos s geodezijskom nepotpunosti nije posve jasan

Kvantna singularnost

Statično prostorvrijeme je kvantno-mehanički *singularno* ako prostorni dio relevantnog valnog operatora nije esencijalno hermitski nad kompaktnim nosačem, u prostoru kvadratno integrabilnih funkcija na prostornoj hiperplohi, $\mathcal{L}^2(\Sigma)$.

Matematički alati

- Statično prostorvrijeme s vremenolikim Killingovim poljem ξ^μ
- Relativistička skalarna čestica ⟶ Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = VD^i(VD_i\,\psi) - V^2m^2\,\psi \;\coloneqq -A\psi$$

- $V^2 = -\xi^\mu\xi_\mu$

Matematički alati

- A je definiran na kompaktnom nosaču na Σ i tada je realan, pozitivan, simetričan i hermitska proširenja uvijek postoje

- Ako postoji jedinstveno proširenje tada je A esencijalno hermitski

Horowitz i Marlof uvjet

- Proučavamo rješenja: $A\psi \pm i\psi = 0$

- Potrebno pokazati da postoji jedno rješenje koje nije kvadratno integrabilno u blizini singulariteta

- Postoji i Weylov uvjet

Primjer metode

G. T. Horowitz and D. Marolf, Quantum probes of spacetime singularities, Phys. Rev. D 52, 5670 (1995).

Vodikov atom

- Metrika: $ds^2 = dr^2 + R^2(r)d\Omega^2$
- Hamiltonijan proporcionalan Laplacijanu

- Domena Laplacijana – glatke funkcije svugdje osim u ishodištu gdje pretpostavljamo singularitet

Vodikov atom

I. Promatramo rješenja: $D^2\psi \pm i\psi = 0$

II. Separacija varijabli: $\psi = f(r)Y(\theta,\phi)$

III. Radijalna jednadžba: $f'' + \frac{2R'}{R}f' - \frac{c}{R^2}f \pm if = 0$

G. T. Horowitz and D. Marolf, Quantum probes of spacetime singularities, Phys. Rev. D 52, 5670 (1995).

Vodikov atom

IV. Pretpostavimo: $c = 0, \qquad R = r^p$

V. Dobivamo: $f = r^\alpha, \qquad \alpha = 0{,}1 - 2p$

VI. Uvjet neintegrabilnosti: $p \geq \frac{3}{2}$

G. T. Horowitz and D. Marolf, Quantum probes of spacetime singularities, Phys. Rev. D 52, 5670 (1995).

Vodikov atom

Geometrijski analogon vodikovog atoma je kvantno singularan za $p < \frac{3}{2}$, a klasično singularan uvijek osim za $p = 1$.

Nabijena dilatonska crna rupa

- Metrika: $ds^2 = -V^2(r)dt^2 + V^{-2}(r)dr^2 + R^2(r)d\Omega^2$

I. Promatramo rješenja: $A\psi \pm i\psi = 0$

II. Separacija varijabli: $\psi = f(r)Y(\theta,\phi)$

III. Radijalna jednadžba: $f'' + \frac{(V^2R^2)'}{V^2R^2}f' - \frac{c}{V^2R^2}f - \frac{m^2}{V^2}f \pm \frac{if}{V^4} = 0$

Nabijena dilatonska crna rupa

Operator će biti esencijalno hermitski ako jedno od dva rješenja jednadžbe (za svaki predznak imaginarnog člana) nije kvadratno integrabilno s obzirom na mjeru R^2V^{-2} u $r = 0$.

Nabijena dilatonska crna rupa

IV. Pretpostavimo:

$$m = 0$$

$$V^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-a^2}{1+a^2}}$$

$$R^2 = r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2a^2}{1+a^2}}$$

V. Singularitet u $r = r_-$

Nabijena dilatonska crna rupa

VI. Ekstremalni limes: $r_+ = r_-$

VII. Definiramo: $\rho = r - r_+$

VIII. Dobivamo: $f = \rho^{\alpha}, \quad \alpha \leq -1$

IX. Promatramo: $\alpha = -1$

G. T. Horowitz and D. Marolf, Quantum probes of spacetime singularities, Phys. Rev. D 52, 5670 (1995).

Nabijena dilatonska crna rupa

IX. Norma rješenja: $\langle f | f \rangle = \int d\rho \, \rho^{\frac{-4}{1+a^2}}$

X. Nije $\mathcal{L}^2$ za $a^2 \leq 3$

Nesingularno ponašanje kvantnih proba za $a^2 \leq 3$.

Zaključak

- Proučavali singularna prostorvemena

- Klasično – Penroseov teorem
- Kvantno – uvjet Horowitza i Marlofa

- Primjer – uvjetna kompletnost

Tablica istraženih singulariteta

Metrika ds^2 ili imenovana PV	Dodatne informacije	Klasični singularitet	Kvantni singularitet prisutan? (proba)
$e^{2t}(-dt^2 + dr^2 + G^2(r)d\Omega^2)$	$G^2(r) = \frac{1}{4}[1 + p - (1-p)e^{-2r}](e^{2r} - 1)$	$r = 0$, $0 < p < 1$, vremenolik, skalarni	$V(x) = (l^2 + l + 1)/px$, $\xi = 1/2$; $V(x) = (-1 + 2\xi)/4x^2$, inače; Za $\xi < 2$ (skalar)
$(-t + b)^{1/2}[-(1 - 2/r)^{\alpha}dt^2 + (1 - 2/r)^{-\alpha}dr^2 + r^2(1 - 2/r)^{2(1-\alpha)d\Omega^2}]$	$\alpha = \pm\sqrt{3}/2$	$r = 2$, vremenolik, skalarni; $t = 0$, prosotrnolik, skalarni	$V(x) = \xi/2(1 \pm \sqrt{3}/2)/x^2(1 \mp \sqrt{3}/2)$; Za $\xi \leq (2 + \sqrt{3})/(1 - \sqrt{3}/2)$ (skalar)
$\lvert t/t_0\rvert^{4(h-2)}[-(1 - w/r)^{\alpha}dt^2 + (1 - w/r)^{-\alpha}dr^2 + r^2(1 - 2w/r)^{1-\alpha}d\Omega^2]$	$0 < \alpha \leq 3/4$, $\alpha \neq 1/2$, $0 < h \leq 6$, $h \neq 2$, $\alpha = (h + 1/2)^{1/2}$	$r = 2w$, $w \neq 0$, lokalno gol, vremenolik, skalarni	$V(x)$ dana s (31) iz [10], Za $\xi < 2(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ (skalar)
Globalni monopol	N/A	vremenolik	Da (masivni skalar)
Levi-Civita	σ, C	$r = 0$, vremenolik	Da (bezmaseni skalar)
$-dt^2/\cos\alpha + R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2\alpha d\Omega^2$	(2+1)-dimenzionalno; $R = \sqrt{3\pi\rho_0/8}$	2-sfera, vremenolik, gol, skalarni	Da (masivni skalar)
Generalizirano Raychaudhuri	dislokacije i disklinacije	skalarni	Da (masivni skalar)

Hvala na pažnji

Literatura

- G. T. Horowitz and D. Marolf, Quantum probes of spacetime singularities, Phys. Rev. D 52, 5670 (1995).
- D. A. Konkowski and T. M. Helliwell, Quantum healing of spacetime singularities: A review, Modern Physics Letters A 33, 1830002 (2018).
- R. Richtmyer, Principles of Advanced Mathematical Physics, Theoretical and Mathematical Physics (Springer Berlin Heidelberg, 2012).
- G. F. R. Ellis and B. G. Schmidt, Singular space-times, General Relativity and Gravitation 8, 915 (1977).
- R. M. Wald, General Relativity (The University od Chicago Press, 1984).
- J. M. M. Senovilla and D. Garfinkle, The 1965 Penrose singularity theorem, Classical and Quantum Gravity 32, 124008 (2015).
- …

Akcija dilatonske crne rupe

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(R - 2(\nabla\phi)^2 - \ e^{-2a\phi}F^2\right)$$

Weylov kriterij granične točke i graničnog kola

Neka je $V(x)$ kontinuirana realna funkcija definirana na intervalu $(0, \infty)$. Tada je $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ esencijalno hermitski na kompaktnom nosaču akko je $V(x)$ u graničnoj točki i u 0 i u beskonačnosti.