Bornovo pravilo u poopćenim kvantnim mjerenjima

Bornovo pravilo

- Osnovna veza između teorije i eksperimenta
- Ako imamo bazu Hilbertovih stanja {|r⟩} te početno stanje $|\psi\rangle = \sum_r c_r |r\rangle$

$$p_r = |\langle r|\psi\rangle|^2$$

Kvantni opis mjerenja

- Rezultate iščitavamo preko mjernog uređaja
- Različiti rezultati odgovaraju različitim stanjima uređaja – *stanja kazaljke* $\{|A_i\rangle\}$
- Mjerenje opservable $R = \sum_r r|r\rangle\langle r|$
- Hamiltonijan interakcije mjernog uređaja I mjernog sistema H_{int}
- Evolucija ukupnog sistema: $\mathcal{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{int}}$

- Početno stanje sitema $|r\rangle$

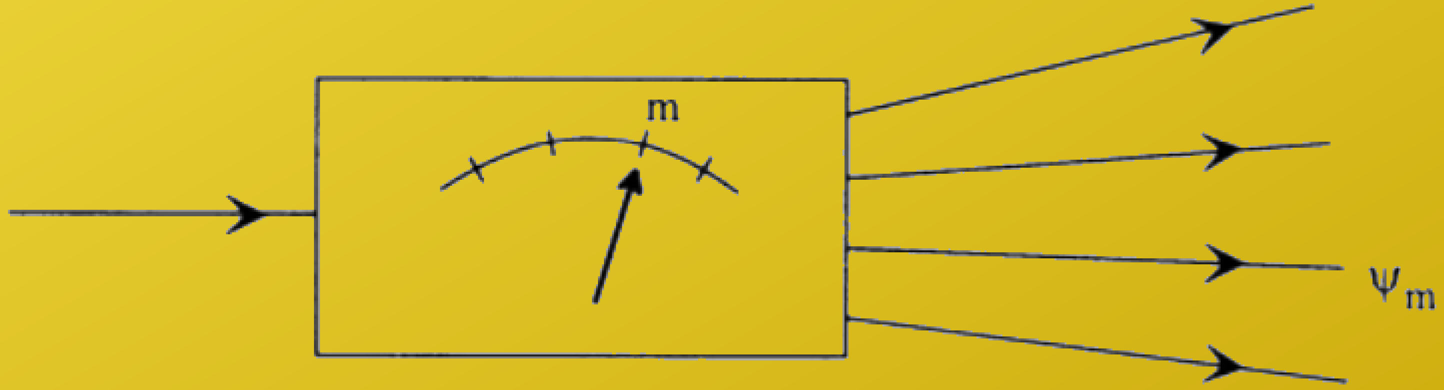
$$\mathcal{U}|r\rangle \otimes |A_0\rangle = |r\rangle \otimes |A_r\rangle$$

- Početno stanje sistema $|\psi\rangle$

$$U|\psi\rangle \otimes |A_0\rangle = \sum_r c_r |r\rangle \otimes |A_r\rangle$$

Malo općenitije:

$$\mathcal{U}|\Psi\rangle \otimes |A_0\rangle = \sum_m c_m |\psi_m\rangle \otimes |A_m\rangle$$



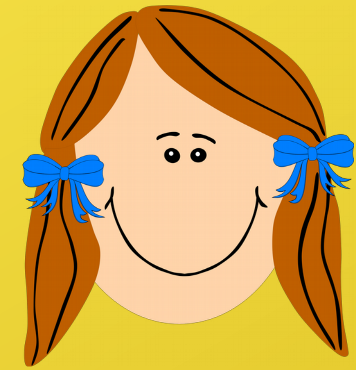
Što mjerimo?

- Informacije o mikrosvijetu dobivamo posredno – preko makroskopskog mjernog uređaja
- Direktno opažljive stvari ili pojave – *pereceptible*
- Različite perceptible se svode na razlike u makroskopskom položaju

POVM formalizam

- eng. Positive Operator Valued Measures
- Poopćenje uobičajenog formalizma
- Standardna opservabla: $\mathcal{O} = \sum_k \lambda_k P_k$
- Bornovo pravilo: $p_k = \langle \psi | P_k | \psi \rangle$
- Poopćenje: $p_k = \langle \psi | E_k | \psi \rangle$

Primjer POVM formalizma



Alice

$$|\psi_1\rangle \quad \text{ili} \quad |\psi_2\rangle$$

Bob

$$|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = |\rightarrow\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/2$$

- Bob može uzeti projektore

$$P_1 = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \quad \mathrm{i} \quad P_2 = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

- Bob je tada siguran samo za $|\psi_2\rangle$

- Bob može uzmeti POVM skup

$$E_1 = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

$$E_2 = \frac{1}{2}|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$$

$$E_3 = I - E_1 - E_2$$

Po čemu su ti operatori posebni?

$$\langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$$

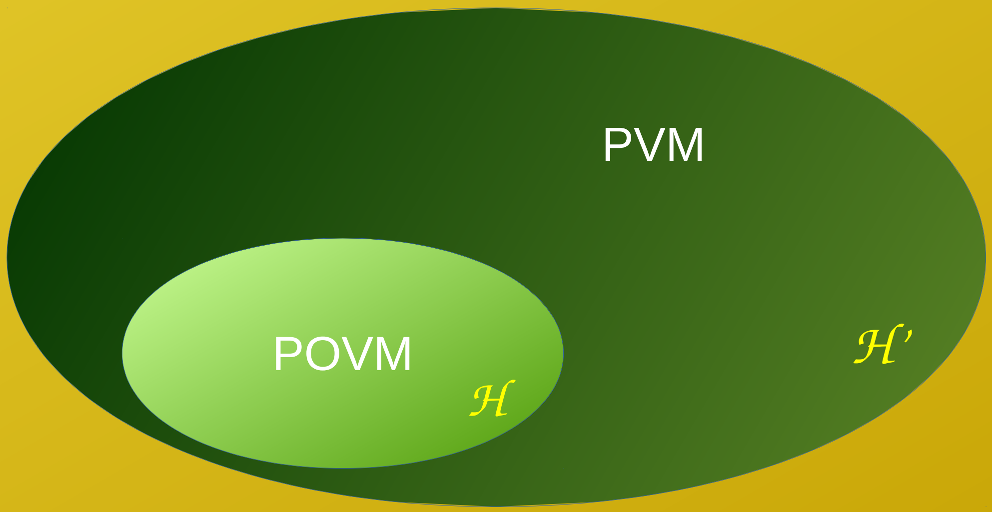
$$\langle\psi_2|E_2|\psi_2\rangle = 0$$

- Bob može sa sigurnošću potvrditi oba stanja!

Naimarkov teorem

Neka je $\mathcal{E}_m$ POVM na prostoru $\mathcal{H}$. Tada postoji Hilbertov prostor $\mathcal{H}'$, PVM $\mathcal{M}_m'$ na prostoru $\mathcal{H}'$ te ortogonalni operator projekcije P takav da P$\mathcal{H}'$=$\mathcal{H}$, za kojeg vrijedi

$$\mathcal{E}_m = P \mathcal{M}_m' P$$



Izvod

- Tražimo vjerojatnosti perceptibla
- Mjerimo neku dinamičku opservablu $R|r\rangle = r|r\rangle$
- Ukupno početno stanje: $|r\rangle \otimes |A_0\rangle$
- Evolucija:

$$U|r\rangle|A_0\rangle = \sum_{r'} a_{r'}|r'\rangle \sum_m b_m|A_{r,m}\rangle \equiv |\alpha_r\rangle$$

  - tj. općenitije

$$U|\psi\rangle|A_0\rangle = \sum_r c_r|\alpha_r\rangle$$

U izraze valja ubaciti i okolinu

$$U|\psi\rangle|A_0\rangle|O_0\rangle = \sum_r c_r|\alpha_r\rangle|O_r\rangle = |\Psi_f\rangle$$

te dodatno srediti izraz

$$|\Psi_f\rangle = \sum_{r,m} c_r b_m |A_{r,m}\rangle|S_r\rangle$$

gdje je uvedena pokrata

$$|S_r\rangle \equiv |O_r\rangle \sum_{r'} a_{r'}|r'\rangle$$

U multikoordinatnoj reprezentaciji imamo

$$\Psi_f(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{r.m} b_m c_r A_{r,m}(\vec{x}) S_r(\vec{y})$$

Ovdje $\vec{x}$ predstavlja položaje čestica koje sačinjavaju mjerni uređaj, tj. $\vec{x} \equiv (\vec{x}_n, ..., \vec{x}_n)$. Isto tako $\vec{y}$ predstavlja položaje svih ostalih čestica.

Postulirajmo Bornovo pravilo u bazi položaja

$$\rho(\vec{x},\vec{y}) = |\Psi(\vec{x},\vec{y})|^2$$

Također nametnimo zahtjev

$$A_{r_1,m}(\vec{x})A_{r_2,m}(\vec{x}) \simeq 0 \quad \mathrm{za} \quad r_1 \neq r_2$$

Imamo dva osnovna slučaja

1) $$A_{r,m_\alpha}(\vec{x})A_{r,m_\beta}(\vec{x}) \not\approx 0$$

2) $$A_{r,m_\alpha}(\vec{x})A_{r,m_\beta}(\vec{x}) \simeq 0$$

1. slučaj

- $A_{r,m_\alpha}(\vec{x}) \quad \mathrm{i} \quad A_{r,m_\beta}(\vec{x})$ nisu makroskopski različiti
- Sve funkcije s istim r-om predstavljaju jedan eksperimentalni rezultat
- Zanima nas gustoća vjerojatnosti mjernog uređaja

$$\rho^{uredaj}(\vec{x}) = \int d\vec{y}\rho(\vec{x},\vec{y})$$

$$\rho^{uredaj}(\vec{x}) = \sum_{r,m,k,l} c_r c_k^* b_m b_l^* A_{r,m} A_{k,l}^* \int d\vec{y} S_r S_k^*$$

$$= \sum_r |c_r|^2 \sum_{m,l} b_m b_l^* A_{r,m} A_{r,l}^*$$

Zanima nas vjerojatnost dobivanja rezultata r

$$\mathrm{p}_r^{uredaj} = \int_{\sigma_r} d\vec{x}\rho^{uredaj}(\vec{x})$$

$$\simeq |c_r|^2 \sum_{m,l} b_m b_l^* \int_{\sigma_r} d\vec{x} A_{r,m} A_{r,l}^*$$

$$p_r \simeq |c_r|^2 \sum_m |b_m|^2 = |c_r|^2$$

2. slučaj

- $A_{r,m_\alpha}(\vec{x}) \quad \mathrm{i} \quad A_{r,m_\beta}(\vec{x})$ su makroskopski različiti
- Za svaki r imamo više različitih rezultata
- Ukupno imamo n_r x n_m rezultata
- Uvodimo novi indeks (n,m)≡l

$$\Psi(\vec{x},\vec{y}) = \sum_l \tilde{c}_l A_l(\vec{x}) S_l(\vec{y})$$

$$\sum_l |\tilde{c}_l|^2 = 1$$

- Ova mjerenja mogu biti opisana POVM elementima na prostoru objekta
- Naimarkov teorem – tražimo PVM: relevantni projektori na većem prostoru su $|A_l\rangle\langle A_l| \otimes 1$
- Opservabla mjernog uređaja $L^{uredaj} = \sum_l l|A_l\rangle\langle A_l|$
- Ponovimo postupak kao kod slučaja 1

$$p_l^{uredaj} = \int_{\sigma_l} d\vec{x}\rho^{uredaj}(\vec{x}) \simeq |\tilde{c}_l|^2$$

Bohmova mehanika

- Teorija koja zadovoljava $\rho(\vec{x},\vec{y},t) = |\Psi(\vec{x},\vec{y},t)|^2$ ima ista predviđanja
- Izgradnja Bohmove mehanike:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

$$\psi = Re^{iS/\hbar}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\vec{\nabla}^2 R}{R} + V = 0$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2 \vec{\nabla} S}{m}\right) = 0$$

- Prva jednadžba ima formu Hamilton-Jacobijeve jednadžbe
- Kvantni potencijal:

$$Q(\vec{q}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\vec{\nabla}^2 R}{R}$$

- Iz Hamilton-Jacobijeve jednadžbe slijedi Newtonov aksiom

$$m\frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = -\vec{\nabla}(V(\vec{q}) + Q(\vec{q},t))$$

- Gustoća struje: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)$

$$\vec{j} = R^2\frac{\vec{\nabla}S}{m} = R^2\vec{v}$$

- Vrijedi:

$$R^2(\vec{q},t) = |\Psi(\vec{q},t)|^2$$

Hvala na pozornosti