Usporedba Dirac-von Neumannove i C*-algebarske aksiomatizacije kvantne mehanike

Matija Livaić
Mentori: doc. dr. sc. Ilja Gogić, PMF-MO; doc. dr. sc. Ivica Smolić, PMF-FO

PMF-Fizički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

Sadržaj

Uvod

Motivacija

- Pokušati razjasniti neke veze između klasične i kvantne mehanike.
- Želimo ponuditi alternativne aksiome kvantne mehanike koji će biti bliže povezani s klasičnom mehanikom.
- Bavimo se **opservablama** i **stanjima**.

Plan rada

- Izlažemo samo esencijalne definicije vezane uz Hilbertove prostore i poznate Dirac-von Neumannove aksiome o opservablama i stanjima.
- Pokazujemo da klasične opservable imaju strukturu C^*-algebre a stanja čine stanja na toj algebri.
- Nudimo alternativne aksiome kvantne mehanike.
- Reproduciramo DvN aksiome iz novih aksioma.

”As our knowledge becomes wider, we must always be prepared, therefore, to expect alterations in the points of view best suited for the ordering of our experience. In this connection we must remember, above all, that, as a matter of course, all new experience makes its appearance within the frame of our customary points of view and perception. (...) We learn that these forms of perceptions are *idealizations*, the suitability of which for reducing our ordinary sense of impressions to order depends upon the practically infinite velocity of light and upon the smallness of the quantum of action. In appraising this situation, however, we must not forget that, in spite of their limitation, however, we can by no means dispense with those forms of perception which colour our whole language and in terms of which all experience must ultimately be expressed.”

Niels Bohr: Atomic Theory and the Description of Nature, *Cambridge at the University Press, 1961.*

Hilbertovi prostori i kvantna mehanika

Hilbertov prostor

Definicija *Par* $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$ *vektorskog prostora i norme zovemo normiranim prostorom. Za normiran prostor* $\mathcal{X}$ *kažemo da je* ***Banachov*** *prostor ako je potpun s obzirom na metriku induciranu normom. Za unitaran prostor* $\mathcal{H}$ *kažemo da je* ***Hilbertov*** *ako je s obzirom na normu induciranu skalarnim produktom* $\mathcal{H}$ *potpun metrički prostor.*

Ograničeni operatori

Definicija *Za linearan operator* $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *kažemo da je* ***ograničen*** *ako postoji* $M > 0$ *takav da je* $||Tx|| \leq M||x||$, *za sve* $x \in \mathcal{H}$. *U tom slučaju definiramo* ***operatorsku normu*** $||T|| = \sup\{||Tx|| \mid ||x|| \leq 1\}$.

Primjer

Može se pokazati da je $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, prostor svih ograničenih linearnih operatora $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ Banachov prostor u operatorskoj normi.

Dirac-von Neumannovi aksiomi

1. Svakom kvantnom sistemu pridružen je separabilan kompleksan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.
2. Opservable su hermitski operatori na $\mathcal{H}$.
3. Stanja kvantnog sistema kojem je pridružen $\mathcal{H}$ su pozitivni operatori traga 1 na $\mathcal{H}$.

C^*-algebre i klasična mehanika

Fazni prostor

Neka je X **fazni prostor**, prostor stanja klasičnog sistema. Zahtijevamo da X bude Hausdorffov i kompaktan. **Opservable** su neprekidne realne funkcije na X.

*-algebra

Definicija *Neka je $\mathcal{A}$ algebra nad poljem $\mathbb{C}$.* ***Involucija*** $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *je operacija takva da za sve $a, b \in \mathcal{A}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi:*

- $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$
- $(ab)^* = b^* a^*$
- $(a^*)^* = a.$

Algebra s involucijom zove se ****-algebra****.*

Banachova algebra

Definicija *Neka je $\mathcal{A}$ algebra koja je i Banachov prostor. Ako je $||ab|| \leq ||a|| \, ||b||$, za sve $a, b \in \mathcal{A}$, kažemo da je $\mathcal{A}$* **Banachova algebra***.*

Definicija *Ako je $\mathcal{A}$ Banachova *-algebra takva da je $||a^*a|| = ||a||^2$ za sve $a \in \mathcal{A}$, kažemo da je $\mathcal{A}$ C^*-algebra.*

Struktura klasičnih opservabli

Teorem *Neka je X kompaktan prostor. Tada je prostor svih kompleksnih neprekidnih funckija $C(X)$ s normom danom s $||f|| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ za sve $f \in C(X)$ Banachov prostor.*

Ako je involucija na $C(X)$ kompleksno konjugiranje po točkama, tada je $C(X)$ separabilna, abelova, unitalna C^*-algebra.

Stanje C^*-algebre

Definicija *Neka je $\mathcal{A}$ unitalna C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}$. Skup svih invertibilnih elemenata u $\mathcal{A}$ označavamo s $\mathcal{A}^\times$.* ***Spektar*** *elementa a definiramo kao skup $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda \notin \mathcal{A}^\times\}$. Za element $a \in \mathcal{A}$ kažemo da je* ***pozitivan*** *ako je hermitski i $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$. Tada pišemo $a \geq 0$ i skup svih pozitivnih elemenata označavamo s $\mathcal{A}_+$. Linearan funkcional $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ je pozitivan ako je $f(a) \geq 0$, za svaki $a \in \mathcal{A}_+$.* ***Stanje*** *na $\mathcal{A}$ je pozitivan linearan funckional norme 1.*

Klasično stanje je stanje na $C(X)$

Stanje $P \in X$ na prirodan način možemo smatrati linearnim funkcionalom na $C(X)$ s formulom $P(f) = f(P)$. Takva identifikacija čini elemente $P \in X$ *stanjima na C^*-algebri $C(X)$*.

C^*-algebre i kvantna mehanika

Aksiomi

1. Opservable kvantnog sistema čine hermitski elementi separabilne, unitalne C^*-algebre $\mathcal{A}$.
2. Stanja kvantnog sistema su stanja na $\mathcal{A}$.

Još jedna definicija

Definicija *Kažemo da je homomorfizam *-algebri* $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ***-homomorfizam** *ako je* $\pi(a^*) = \pi(a)^*$*, za svaki* $a \in \mathcal{A}$*.* ***-izomorfizam** *je bijektivni *-homomorfizam.* **Izometrija** *između dva metrička prostora* X *i* Y *je funkcija* $f : X \longrightarrow Y$ *takva da je* $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$*, za sve* $x, y \in X$*.*

Gelfand-Naimarkov teorem

Teorem *Neka je $\mathcal{A}$ separabilna unitalna C^*-algebra. Tada postoji separabilan Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ takav da*

- *Postoji izometrični *-izomorfizam $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$,*
- *ψ je stanje u $\mathcal{A}$ akko postoji pozitivan $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ traga 1 takav da je $\psi(a) = \mathrm{Tr}\,(\Psi\pi(a))$.*

Zaključni komentari

Hvala na pažnji!