Termodinamika crnih rupa u prisutstvu kozmološke konstante

Smarrova formula i prvi zakon u statičnom Anti-de Sitter prostorvremenu

Vanessa Brzić

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet

Sadržaj

Uvod

Zakoni mehanike crnih rupa $\leftrightarrow$ zakoni termodinamike:

0. *Površinska gravitacija κ konstantna je na horizontu događaja stacionarne crne rupe.*

$$T = \frac{\hbar}{2\pi}\kappa \tag{1}$$

1. *Za crnu rupu mase M*

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A \tag{2}$$

$(\kappa \to T)$, $(A \to S)$, $(M \to E_{int})$.

Ukoliko crna rupa rotira angularnim momentom J ili ima naboj Q, pojavljuju se dodatni članovi

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi \delta Q \tag{3}$$

2. *Površina horizonta događaja A crne rupe nikada se ne smanjuje.:*

$$\delta A \geqslant 0 \tag{4}$$

3. *Površinsku gravitaciju* κ *nije moguće reducirati na nulu u konačnom broju koraka.*

U prisutstvu kozmološke konstante dobit ćemo $V\delta p$ član koji rezultira korespodenciji $M \to H$ gdje je $H = E + PV$ entalpija.

Kozmološka konstanta

Tenzor energije-impulsa vakuuma

Rješenje za nestatičan svemir

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{5}$$

Kozmološku konstantu možemo shvatiti kao veličinu proporcionalnu energiji vakuuma koja doprinosi zakrivljenosti svemira

$$G_{ab} = 8\pi \left[T_{ab} + T_{ab}^{(\mathrm{VAC})} \right] \tag{6}$$

Tenzor energije-impulsa asociran s kozmološkom konstantom

$$T_{ab}^{(\mathrm{VAC})} \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{ab} \tag{7}$$

Gustoća energije koju Λ pridaje vakuumu:

$$\epsilon^{(\mathrm{VAC})} = T_{00}^{(\mathrm{VAC})} = +\frac{\Lambda}{8\pi} \tag{8}$$

Promotrimo li kozmološku jednadžbu fluida:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \tag{9}$$

s obzirom da je Λ= konst. slijedi da je jednadžba stanja:

$$P = -\epsilon = -\frac{\Lambda}{8\pi} \tag{10}$$

Teorija polja

- energija vakuuma zapravo bi trebala biti energija osnovnog stanja svih polja (energija kvantnih fluktuacija)

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{11}$$

- slobodno kvantno polje ima beskonačno takvih doprinosa
- doprinose odrežemo na nekoj energiji, rezultat daje

$$\Lambda \sim \frac{1}{(L_P)^2} \sim 10^{70} m^{-2} \tag{12}$$

Kozmološka mjerenja

- mala neiščezavajuća pozitivna vrijednost

$$\Lambda \sim 10^{-52} m^{-2} \tag{13}$$

što daje $\sim$ 120 redova veličine drukčiji rezultat

De Sitter i Anti de Sitter prostorvijeme

Maksimalno simetrični prostori

Prostori s maksimalnim brojem Killingovih vektora zovu se *maksimalno simetrični prostori* : Minkowski, de Sitter i Anti-de Sitter prostor

Kozmološko načelo svemir je, na dovoljno velikoj skali, homogen i izotropan $\rightarrow$ svemir je $R \times \Sigma$ mnogostrukost (Σ maksimalno simetričan prostor)

Riccijev tenzor poprima oblik:

$$R_{ab} = \frac{2\Lambda}{D-2} g_{ab} \tag{14}$$

de Sitter i Anti-de Sitter prostor su vakuumska rješenja jednadžbe s neiščezavajućom kozmološkom konstantom:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \tag{15}$$

de Sitter

Maksimalno simetričan prostor s konstantnom pozitivnom zakrivljenosti ($\Lambda > 0$)

Konstruirati smještanjem 4D hiperboloida u 5D Minkowski prostor, metrika na hiperboloidu:

$$ds^2 = -\mathrm{d}t^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) \left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{16}$$

Topologija de Sitter prostora je $\mathbf{R} \times S^3$

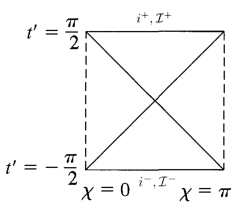

Figure 1: Konformalni dijagram de Sitter prostora[5]

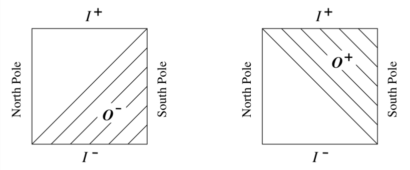

Figure 2: Klasični promatrač na južnom polu nikada neće moći opaziti događaje izvan O^- područja, niti će moći slati signal izvan O^+ područja. $O^\pm$ predstavlja kauzalnu budućnost/prošlost promatrača na južnom polu. [24]

Maksimalno simetričan prostor s konstantnom negativnom zakrivljenosti ($\Lambda < 0$)
Smještanje hiperboloida u $5D$ ravan prostor, dobivamo metriku na hiperboloidu:

$$ds^2 = \alpha^2 \left(-\cosh^2(\rho)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega_2^2 \right)$$

- ove koordinate imaju svojstvo da je t' periodičan s periodom 2π što bi nam dalo zatvorene krivulje vremenskog tipa $\rightarrow$ artefakt odabira koordinata

Za definiciju AdS prostora uzimamo pokrivač naše mnogostrukosti gdje t' ima raspon $[-\infty, \infty]$
Topologija R^4 prostora - odgovara polovici Einsteinovog statičnog svemira

Anti-de Sitter

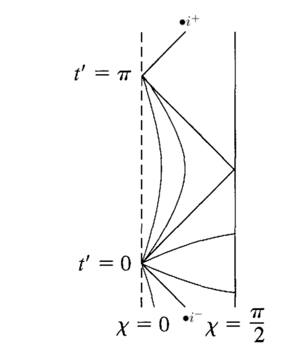

Figure 3: Presjek t'=konst. prostornog tipa topološki predstavlja 3D hemisferu tj. R^3 prostor. Točke u unutrašnjosti predstavljaju 2D sfere, osim točaka na isprekidanoj liniji koje predstavljaju točke u prostornom ishodištu. Na $\chi = \frac{\pi}{2}$ imamo hiperplohu vremenskog tipa koja predstavlja beskonačnost. [5]

Masa i angularni moment

Na razini Hamiltonove gustoće $\mathcal{H} = \pi\delta_t\psi - \mathcal{L}$ izgubili smo Lorentzovu invarijantost!

- razmatramo folijaciju prostorvremena
- uvodimo *vremensku funkciju* $t^\alpha = Nn^\alpha + N^a e^\alpha_a$
- $\partial_t\psi \to \mathfrak{L}_t\psi$ Liejeva derivacija duž toka vremenske funkcije

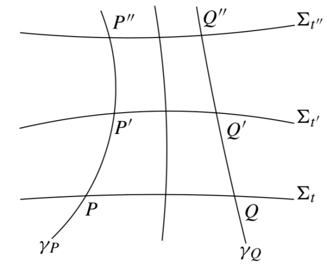

Figure 4: Folijacija prostorvremena nepresjecajućim hiperplohama prostornog tipa. Kongruencija propagira koordinate [1]

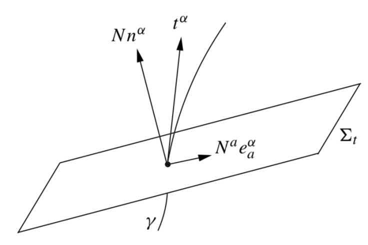

Figure 5: Dekompozicija tangente na kongruenciju t^α u terminima *lapse* N i *shift* N^a funkcija [1]

Hamiltonijan $\mathcal{H} = NH + N^a H_a$ o izboru folijacije!
Odaberemo li tok takav da asimptotski odgovara

- *generatorima vremenskih translacija* $\rightarrow$ hamiltonijan nam daje pojam mase
- *generatorima rotacija* $\rightarrow$ pojam angularnog momenta

Komarove relacije ($\Lambda = 0$)

Masa i angularni moment ukupnog stacionarnog i aksijalno simetričnog prostorvremena dani su Komarovim relacijama:

$$M = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \to \infty} \oint_{S_t} \nabla^\alpha \xi^\beta_{(t)} \mathrm{d}S_{\alpha\beta} \tag{17}$$

i

$$J = \frac{1}{16\pi} \lim_{S_t \to \infty} \oint_{S_t} \nabla^\alpha \xi^\beta_{(\phi)} \mathrm{d}S_{\alpha\beta} \tag{18}$$

gdje su $\xi_{(t)}$ i $\xi_{(\phi)}$ Killingovi vektori

Kompaktni zapis:

$$\frac{D-2}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}S_{ab} \left(\nabla^a \xi^b \right) = 0 \tag{19}$$

- površina $\partial\Sigma$ je dvokomponentna i sastoji se od integrala po horizontu I_h i integrala po površini u beskonačnosti I_∞
- Komarovu relaciju skraćeno pišemo kao $I_h - I_\infty = 0$

Smarrova formula

Smarrova formula

Za stacionarnu crnu rupu u ravnom prostoru:

$$I_\infty = (D-3)M - (D-2)\Omega_H J \tag{20}$$

$$I_h = (D-2)\frac{\kappa A}{8\pi G} \tag{21}$$

uvrstimo li u $I_h - I_\infty = 0$ dobivamo tzv. Smarrovu relaciju:

$$(D-3)M = (D-2)\Omega_H J + (D-2)\frac{\kappa A}{8\pi G} \tag{22}$$

Smarrova formula:

- analogna Gibbs–Duhem relaciji

Razmatrat ćemo kako kozmološka konstanta utječe na fazni prostor termodinamike crnih rupa za vakuumsko $\Lambda < 0$ rješenje (AdS prostor).

Modifikacija Komarove jednadžbe:

$$\frac{D-2}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}S_{ab}\left(\nabla^a \xi^b + \frac{2}{D-2}\Lambda\omega^{ab}\right) = 0 \tag{23}$$

Geometrijske konstrukcije sada uključuje veličinu ω^{ab} koja predstavlja Killingov potencijal:

$$\xi_b = \nabla^a \omega_{ab} \tag{24}$$

gdje ξ^b je Killingov vektor. Killingov potencijal nije jedinstven (definiran do na član iščezavajuće divergencije)

$$\omega'_{ab} = \omega_{ab} + \lambda_{ab} \tag{25}$$

ukoliko $\nabla_a \lambda^{ab} = 0$.

Napomena

- dodavanje člana Killingovom potencijalu promijenit će se vrijednosti na komponentni Σ oko horizonta i komponenti u beskonačnosti za doprinos istog iznosa ali suprotnog predznaka $\rightarrow$ integrali I_h i I_∞ su povezani
- integrali I_h i I_∞ su divergentni ali točno na takav način da je njihova razlika konačna

Metrika rješenja za Schwardschild crnu rupu (statično rješenje) u AdS prostorvremenu:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2_{D-2} \\ f(r) &= 1 - \frac{\tilde{M}}{r^{D-3}} - \tilde{\Lambda} r^2 \end{aligned} \tag{26}$$

gdje smo uveli pokrate

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \frac{16\pi G M}{(D-2)} V_{D-2} \\ \tilde{\Lambda} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} \end{aligned} \tag{27}$$

Neiščezavajuće komponente tenzora $\nabla^a \xi^b$ su:

$$\nabla^r \xi^t = -\nabla^t \xi^r = \frac{(D-3)\tilde{M}}{2r^{D-2}} - \tilde{\Lambda} r \tag{28}$$

- za uočiti: divergentni doprinos!

Killingov potencijal:

$$\omega^{rt} = -\omega^{tr} = \frac{r}{(D-1)} + \alpha r_h \left(\frac{r_h}{r}\right)^{D-2} \tag{29}$$

α je bezdimenzionalna konstanta definira jedno-parametarsku familiju Killingovih potencijala

- za uočiti: sloboda definiranja Killingovog potencijala daje nam drugi divergentni doprinos integralu u beskonačnosti!

Integral u beskonačnosti daje:

$$I_\infty = -(D-3)M - \frac{2\Lambda V_{D-2}}{8\pi G}\alpha \tag{30}$$

- divergencije su se pokratile

Integral po horizontu:

$$I_h = -(D-2)\frac{\kappa A}{8\pi G} - \frac{2\Lambda V_{D-2}}{8\pi G}\left(\frac{r_h^{D-1}}{(D-1)} + \alpha\right) \tag{31}$$

Iskoristimo li Komarovu formulu $I_\infty - I_h = 0$ dobivamo Smarrovu formulu:

$$(D-3)M = (D-2)\frac{\kappa}{8\pi G}A - 2\frac{\Theta}{8\pi G}\Lambda \tag{32}$$

gdje

$$\Theta = -\frac{V_{D-2}r_h^{D-1}}{(D-1)} \tag{33}$$

Statično AdS prostorvrijeme asimptotski odgovara SAdS prostorvremenu → isti rezultat za integral u beskonačnosti
Integral po horizontu:

$$I_h = -(D-2)\frac{\kappa A}{8\pi G} + \int_{\partial\Sigma_h} \mathrm{d}S_{ab}\omega^{ab} \tag{34}$$

Iskoristimo li Komarovu formulu $I_\infty - I_h = 0$, ponovno dobivamo Smarrovu formulu.
Sada je Θ dan s:

$$\Theta = -\left[\int_{\partial\Sigma_\infty} \mathrm{d}S_{ab}\left(\omega^{ab} - \omega^{ab}_{\mathrm{AdS}}\right) - \int_{\partial\Sigma_h} \mathrm{d}S_{ab}\omega^{ab}\right] \tag{35}$$

U ovom izrazu možemo prepoznati volumen prostorvremena i volumen crne rupe, slijedi:

$$\Theta = -(V_{\mathrm{AdS}} - V_{BH}) \tag{36}$$

Prvi zakon termodinamike

Perturbacija hamiltonijana

Hamiltonijan je dan s $\mathcal{H} = NH + N^a H_a$ gdje

$$\begin{aligned} H &\equiv -2G_{ab}n^a n^b = -R^{(d-1)} + \frac{1}{|h|}\left(\frac{\pi^2}{d-2} - \pi^{ab}\pi_{ab}\right) \\ H_b &\equiv -2G_{ac}n^a h^c_b = -2D_a\left(|h|^{-\frac{1}{2}}\pi^{ab}\right) \end{aligned} \tag{37}$$

Uvrstimo li relaciju za tenzor energije-impulsa vakuuma dobivamo:

$$H = -2\Lambda, \quad H_b = 0 \tag{38}$$

Uvodimo perturbaciju 3D prostorne metrike, momenta i kozmološke konstante:

$$\begin{aligned} h_{ab} &= h^{(0)}_{ab} + h_{ab} \\ \pi^{ab} &= \pi^{ab}_{(0)} + p^{ab} \\ \Lambda &= \Lambda_{(0)} + \delta\Lambda \end{aligned} \tag{39}$$

Dobivamo operator derivacije na hiperplohi Σ oblika:

$$\begin{aligned} D_a B^a &\equiv N\delta H + N^a \delta H_a = -2N\delta\Lambda \\ D_a\left(B^a - 2\delta\Lambda\omega^{ab} n_b\right) &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

gdje smo iskoristili $N = -n_a\xi^a = -D_c\left(n_a\omega^{ca}\right)$.
Gaussov zakon:

$$\int_V \nabla_\alpha A^\alpha \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = \oint_{\partial V} A^\alpha \mathrm{d}\Sigma_\alpha \tag{41}$$

Slijedi:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}a_c\left(B^c - 2\omega^{cd} n_d \delta\Lambda\right) = 0 \tag{42}$$

Integraciju radimo po dvokomponentnoj plohi:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\hat{V}_{\text{out}}} \mathrm{d}\mathcal{S} r_c \left(B^c - 2\delta\Lambda\omega^{cb}_{\mathrm{AdS}} n_b \right) \\ = &\int_{\partial\hat{V}_{\text{out}}} \mathrm{d}\mathcal{S} r_c \left(2\delta\Lambda \left(\omega^{cb} - \omega^{cb}_{\mathrm{AdS}} \right) n_b \right) \\ &+ \int_{\partial\hat{V}_{\mathrm{in}}} \mathrm{d}\mathcal{S} r_c \left(B^c - 2\delta\Lambda\omega^{cb} n_b \right) \end{aligned} \tag{43}$$

pri čemu smo dodali ω^{cb}_{AdS} Killingov potencijal AdS prostorvremena kako bi pokratili divergentni doprinos u ω^{cb} članu.

Plohu u beskonačnosti možemo povezati s ukupnom masom M
Iz Komarovih relacija dobivamo:

$$16\pi\delta M = -\int_{\infty} \mathrm{d}\mathcal{S} r_c \left(B^c \left[\partial_t\right] - 2\delta\Lambda\omega^{cb}_{\mathrm{AdS}} n_b \right) \tag{44}$$

s obzirom na Killingovo polje generatora vremenskih translacija $\xi^a_{(t)} = (\partial_t)^a$
Generatori horizonta događaja dani su Killingovim vektorom:

$$\xi^a = (\partial_t + \Omega_H \partial_\varphi)^a \tag{45}$$

a površinska gravitacija je dana s:

$$\kappa = \sqrt{-\frac{1}{2}\nabla^a\xi^b\nabla_a\xi_b}\bigg|_{r=r_+} \tag{46}$$

S obzirom na ovo Killingovo polje:

$$2\kappa\delta A = -\int_H \mathrm{d}\mathcal{S} r_c B^c \left[\partial_t + \Omega\partial_\varphi\right] \tag{47}$$

gdje je A površina horizonta
Iz prethodnih relacija dobivamo:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \frac{\Theta}{8\pi G}\delta\Lambda \tag{48}$$

gdje je

$$\Theta = -(V_{\mathrm{AdS}} - V_{BH}) \tag{49}$$

Zaključak

U statičkom AdS prostorvremenu theta je u jednostavnoj korespodenciji s geometrijskim volumenom:

$$\Theta = V_{BH} - V_{\mathrm{AdS}} \equiv -V \tag{50}$$

- V je volumen izdvojen horizontom crne rupe
- ukoliko bismo uključili i rotaciju u razmatranje to nebi bilo tako!
- općenito termodinamički volumen $\neq$ geometrijski volumen

Općenito:

$$V \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,Q,J} \tag{51}$$

U razmatranju stacionarnih crnih rupa s neiščezavajućim angularnim momentom:

$$16\pi\delta J = \int_{\infty} \mathrm{d}\mathcal{S} r_c B^c \left[\partial_\varphi\right] \tag{52}$$

za generator rotacije $\xi^a_{(\phi)} = (\partial_\varphi)^a$
U krajnjem rezultatu dalo još $\Omega\delta J$ doprinos:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega\delta J + \frac{\Theta}{8\pi G}\delta\Lambda \tag{53}$$

Kozmološka konstanta $\leftrightarrow$ idealni fluid tlaka $P = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$

- $\Lambda < 0$ inducira pozitivan tlak u prostorvremenu

Zaključak: $\Theta\delta\Lambda \to V\delta p \implies M \to H$ gdje je $H = E + PV$ entalpija.

U $\Lambda > 0$ slučaju komplicira zbog prisutstva kozmološkog horizonta!

- svaki promatrač nužno će se nalaziti između dva horizonta, onog crne rupe te kozmološkog
- kozmološki horizont također ima pripadnu površinsku gravitaciju tj. temperaturu $\rightarrow$ nemamo ravnotežno stanje
- asimptotski se približavamo kozmološkom horizontu pa će Killingovo polje asimptotski biti polje generatora horizonta, tj. asimptotski svjetlosnog tipa $\rightarrow$ problem prilikom definiranja mase i angularnog momenta

Kompliciranija analiza pokazuje da u ovom radu izvedena Smarrova relacija i prvi zakon termodinamike i dalje vrijede.

Pitanja?

References I

- Eric Poisson, A Relativist's toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics
- Ivica Smolić, Diferencijalna geometrija u fizici
- Matthias Blau, Lecture Notes on General Relativity
- Robert M. Wald, General Relativity
- Sean Carroll, Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity
- Kastor D, Ray S and Traschen J 2009 Enthalpy and the mechanics of AdS black holes Class. Quantum Grav. 26 195011
- David Kubiznak, Robert B. Mann, Mae Teo, Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda, arXiv:1608.06147 [hep-th]

- Jennie Traschen, Constraints on stress-energy perturbations in general relativity, https://doi.org/10.1103/PhysRevD.31.283
- Robert M. Wald, The Thermodynamics of Black Holes, arXiv:gr-qc/9912119
- S. Carlip, Black Hole Thermodynamics, arXiv:1410.1486 [gr-qc]
- Edmund Bertschinger, Symmetry Transformations, the Einstein-Hilbert Action, and Gauge Invariance, Massachusetts Institute of Technology Department of Physics
- Francis Tong, A Hamiltonian Formulation of General Relativity
- Geoffrey Compére, An introduction to the mechanics of black holes, Lecture notes prepared for the Second Modave Summer School in Mathematical Physics

- Bazanski S L and Zyla P 1990 A Gauss type law for gravity with a cosmological constant Gen. Rel. Grav. 22 379
- Kastor D 2008 Komar integrals in higher (and lower) derivative gravity Class. Quantum Grav. 25 175007 (arXiv:0804.1832 [hep-th])
- Lawson, H. Blaine. Foliations. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), no. 3, 369–418. https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183535509
- Daniel Sudarsky and Robert M. Wald, Extrema of mass, stationarity, and staticity, and solutions to the Einstein-Yang-Mills equations, Phys. Rev. D 46, 1453 – Published 15 August 1992
- Jacob D. Bekenstein, Black Holes and Entropy, Phys. Rev. D 7, 2333 – Published 15 April 1973

References IV

- Hawking, S.W. Black holes in general relativity. Commun.Math. Phys. 25, 152–166 (1972)
- Bardeen J M, Carter B and Hawking S W 1973 The four laws of black hole mechanics Commun. Math. Phys. 31 161–70
- S.W. Hawking, Particle creation by black holes, Comm. Math. Phys. 43 (1975) 199
- Einstein, Albert, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitaetstheorie, 1917
- Charles W Misner, Kip S Thorne,John Archibald Wheeler - Gravitation, San Francisco, W.H. Freeman (1973)
- Marcus Spradlin, Andrew Strominger and Anastasia Volovich, Les Houches Lectures on de Sitter Space

- M. Cvetič, G. W. Gibbons, D. Kubizňák, and C. N. Pope, Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume, Phys. Rev. D 84, 024037 – Published 20 July 2011
- Brian P. Dolan, David Kastor, David Kubizňák, Robert B. Mann and Jennie Traschen, Thermodynamic volumes and isoperimetric inequalities for de Sitter black holes, Phys. Rev. D 87, 104017 – Published 15 May 2013
- Adler, Ronald J.; Casey, Brendan; Jacob, Ovid C. (1995), "Vacuum catastrophe: An elementary exposition of the cosmological constant problem". American Journal of Physics. 63 (7): 620–626.
- Lovelock, D. (1971). "The Einstein Tensor and Its Generalizations". Journal of Mathematical Physics. 12 (3): 498–501