§ 5. Redovi

Digresija. U ovoj lekciji će nam trebati nekoliko rezultata koje nismo radili u kontekstu limesa. Njih navodimo bez dokaza te ih kao takve smijemo dalje koristiti:

- logaritam je subpolinomijalan, to jest, za bilo koji $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0.$$

- polinom je subeksponencijalan, to jest, za bilo koje $a > 1$ i $k > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

- „ocjena za faktorijel":

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e},$$

  gdje je e Eulerov broj.

- definicija broja e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

U ovoj lekciji ćemo se baviti redovima. Red je matematička formalizacija koncepta beskonačne sume. Iako se na prvu može činiti da je riječ o „matematičkoj fikciji", redovi igraju važnu ulogu u matematici.

Definicija 5.1

Red je uređeni par $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ gdje je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$, a $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, odnosno za svaki n vrijedi $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Za red koristimo oznaku $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ako niz parcijalnih suma ima limes S, kažemo da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i pišemo $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. U suprotnom kažemo da red divergira.

Napomena.

- Definicija na trenutak izgleda zastrašujuće. Ono kako je treba čitati je da je red zapravo suma beskonačno mnogo pribrojnika. Zbroj konačno mnogo pribrojnika je dobro definiran, no zbroj beskonačno mnogo pribrojnika je a priori nejasan. Ipak, koristeći alate naučene u prošlom semestru, tu beskonačnu sumu možemo izreći kao limes parcijalnih suma, kada $n \to \infty$.

- Budući da se definicija reda naslanja na definiciju limesa, opet imamo slične mogućnosti što se događa kada kažemo da red divergira: to može značiti da divergira u $+\infty$ ili $-\infty$ ili ”obično”.

- Dobro definirati što je red (umjesto izreći da je to beskonačna suma nekih realnih brojeva) nije samo zadovoljenje klasične matematičke forme u kojoj matematičari imaju potrebu sve definirati, nego i zato što bi to moglo dovesti i do nekih pogrešaka. Naime, netko bi mogao očekivati da je beskonačno sumiranje (kao i konačno) komutativno, što nije istina. Naime, postoji vrlo zanimljiv kontraprimjer: elemente reda $a_n = (-1)^n/n$ možemo permutirati tako da suma reda bude proizvoljna vrijednost iz $\mathbb{R}$, ili da divergira u $+\infty$, ili da divergira u $-\infty$.

Primjer 5.1. Promotrimo neke redove kojima bismo mogli izračunati sumu:

- Red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$
Ovo je trik koji je dobro zapamtiti za inače, iako nam više neće biti potreban na ovom kolegiju. Taj trik pojavljuje se u nekim zadatcima za one koji žele znati više u višim razredima osnovne ili nižim razredima srednje škole (naravno, u kontekstu konačne sume).

  Ideja je primijetiti da se svaki pribrojnik može rastaviti kao razlika dva razlomka (što je zapravo rastav na parcijalne razlomke):
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
Zato je k-ta parcijalna suma
$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2\cdot(2+1)} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$
Drugi način dobivanja formule za s_k je matematičkom indukcijom. Vrijedi
$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$
zbog čega pišemo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$
Gore navedeni trik zove se **teleskopiranje**.

- Red
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}.$$
Ili pogađanjem formule i dokazivanjem matematičkom indukcijom, ili korištenjem formule
$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$
(uz $x = 1$, $y = 2^{-1}$) može se dokazati da je k-ta parcijalna suma jednaka $\dfrac{1-2^{-(k+1)}}{1-2^{-1}}$, pa kada $k \to \infty$ dobijemo da red konvergira i da je suma jednaka $S = 2$.

  No, to nam je bilo i nekako intuitivno i ranije: kada dodajemo 1, pa $1/2$, pa $1/4$, i tako dalje, uvijek dodajući još pola od onoga što nam nedostaje da dođemo do 2, približavamo se proizvoljno blizu broju 2. Sada imamo i neki alat kako to možemo precizno izreći i dokazati.

  Općenito, za red oblika $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ govorimo o **geometrijskom redu**. Za $|q| < 1$ konvergira i iznosi $\dfrac{1}{1-q}$ (provjerite sami kao što smo to napravili za $q = 2^{-1}$), dok za $|q| \geq 1$ red divergira.

- Red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$
Ovaj red se razlikuje od gornjih. Kao prvo, teži je za argumentirati, a kao drugo, odluka o konvergenciji je drugačija. On naime divergira. Kako za fiksni $k \in \mathbb{N}$ i za sve $2^k \leq n < 2^{k+1}$ vrijedi da je $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2^{k+1}}$, proizvoljna parcijalna suma
$$\begin{aligned} s_{2^k} &= (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$
može se ocijeniti odozdo tako da se zaključi da je svaka odgovarajuća zagrada barem $1/2$, pri čemu je prva zagrada veća od $1/2$. Tada je $s_{2^k} > (k+1)/2$. Kako kada $n \to \infty$ suma s_n u sebi "sadrži" sumu oblika s_{2^k} za sve veći k, tako vidimo da je suma odozdo ograničena s nečime što teži u beskonačno, pa mora i suma sama tamo težiti.

- Red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
Ovaj red se po članovima doima još jednostavniji nego onaj iz prvog primjera. Nemamo neku ideju kako bi trebala izgledati formula za parcijalne sume. Ispast će da je za ovaj red potrebno poprilično netrivijalno matematičko predznanje kojim bismo našli sumu reda. Ona iznosi $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Zadnji primjer pokazuje da koliko god jednostavno članovi reda izgledali, da suma reda može biti jako čudnog iznosa. Iako je funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$ jako jednostavna i za nju vrijede sva svojstva koja bismo mogli zahtijevati od neke funkcije, točna vrijednost reda je komplicirana za dobiti. To je jedan od ključnih razloga zbog kojih se u ovoj lekciji i na predmetu nećemo fokusirati na sume redova, nego samo na odluku o konvergenciji redova.

Napomena. Opišimo neku intuiciju i najavimo metode dokazivanja konvergencije redova.

- Prvih nekoliko članova ne igra ulogu za konvergenciju, ali igra ulogu za rezultat sume. Primjerice, ako imate red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ takav da je $a_n = 1000$ za prvih 100 članova, a nakon toga je $a_n = 2^{-n}$, taj red i dalje konvergira. Koliko god prvih nekoliko članova bilo veliko, dokle god ih je konačno, ne utječu na konvergenciju reda. Konkretno u ovom primjeru, njih 100 zajedno će činiti sumu 100000 (što je velik, ali konačan broj), a za ostale članove znamo kako sumirati. Vidimo da je suma drugačija nego kada bi svi članovi a_n bili jednaki 2^{-n}, ali red i dalje konvergira.

  Iako smo rekli da nas zanima samo odluka o konvergenciji reda, budući da znamo računati sumu geometrijskog reda, budite oprezni s kojim članom kreće suma. Recimo, redovi
  $$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots, \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$$
  se razlikuju u prvom članu. Oba reda su geometrijska i konvergiraju. Suma prvog reda iznosi $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$, no suma drugog reda je manja za 1, upravo za prvi član po kojem se razlikuje od prve sume.

- Ako konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$. Također, ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju, onda i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergira. Za zadnju tvrdnju obrat **ne** vrijedi, npr. za $a_n = 1$ i $b_n = -1$ je $a_n + b_n = 0$. Redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiraju jer im parcijalne sume divergiraju u $+\infty$, odnosno $-\infty$.
- Intuitivne ideje završavamo s jednom koja se da i precizirati kao teorem koji ćemo koristiti. Da bi parcijalne sume konvergirale u neki (”konačan”) broj, koraci a_n za koje se te parcijalne sume mijenjaju moraju biti sve manji i manji, a onda u nekom trenutku težiti u nulu.

Teorem 5.2: Nužan uvjet konvergencije

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada $a_n \to 0$.

Ovaj kriterij češće ćemo čitati kada na njega primijenimo obrat po kontrapoziciji:

$$\text{Ako } a_n \not\to 0, \text{ tada red } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergira.}$$

Dakle, provjerimo što se događa s općim članom a_n i konvergira li u nulu. Ako ne konvergira u nulu, tada možemo reći da red s kojim smo krenuli divergira, te smo time gotovi sa zadatkom. Ako se pak dogodi da $a_n \to 0$, ne možemo reći niti da red konvergira niti da divergira. Primjerice, pogledajte redove $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Oba zadovoljavaju da opći član a_n teži u nulu, no jedan od njih konvergira, a drugi ne.

§ 5.1. Usporedni kriterij

Gore smo naveli prvi kriterij koji ćemo koristiti za određivanje konvergira li red. On je dosta slab, iako lagan za provjeriti. Sljedeći kriterij je s druge strane poprilično jak, ali ga treba znati koristiti. Intuitivno, radi se o sljedećem: promotrimo dva reda iz primjera s početka, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Za drugi smo relativno lagano odredili da konvergira, dok za prvi, osim zbog toga što vam je rečeno da je tako, ne znamo zapravo konvergira li (odnosno bolje rečeno, ne znamo zašto konvergira). S druge strane, ta dva reda su dosta slična: sumiramo članove koji o n ovise kao recipročna vrijednost kvadratne funkcije. Dapače, n-ti član drugog reda nalazi se po veličini točno između n-tog i $(n+1)$-tog člana prvog reda. Intuitivno, ti redovi su podjednako "jaki", i trebali bismo nekom usporedbom moći argumentirati da imaju jednaku odluku o konvergenciji.

Teorem 5.3: Usporedni kriterij

Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s **nenegativnim** članovima. Neka postoji $\lim_n \frac{a_n}{b_n}$ i neka je jednak q.

- Ako je $q \in \langle 0, +\infty \rangle$, tada oba reda konvergiraju ili oba divergiraju.
- Ako je $q = 0$, tada ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako je $q = +\infty$*, tada ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, onda i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

**Znamo da realan broj q ne može poprimiti vrijednost ∞, ali također znamo kako čitamo ovu tvrdnju.*

Radi potpunosti ove skripte, pišemo i alternativnu verziju usporednog kriterija. Obje verzije su skoro ekvivalentne i koju od njih koristite samo ovisi o vašem "stilu" rješavanja zadataka.

Teorem 5.4: Usporedni kriterij, alternativna verzija

Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s **nenegativnim** članovima, i neka je $a_n \leq b_n$.
Ako konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tada konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
S druge strane, ako divergira $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tada i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Napomena.

- Kao što smo već najavili, ovaj je kriterij relativno jak i s njime ćemo moći mnogo toga dokazati i često ga koristiti.
- Druga verzija teorema možda je za trenutak intuitivnija: red s članovima manjim od konvergentnog reda ne može divergirati, niti red s članovima većim od divergentnog reda može konvergirati. Ipak, predlažemo da češće koristimo prvu verziju kriterija jer se ne moramo mučiti sa zadovoljenjem nejednakosti za sve prirodne n.

- Ovaj kriterij, kao što je motivirano prije njihovih iskaza, zamišljeno je da se koristi tako da se za red za koji želimo odrediti konvergira li ili ne, uzme neki njemu sličan red za koji znamo konvergira li i primijenimo kriterij. Ako smo dobro odabrali, ovaj kriterij će nam reći da imaju jednaku odluku o konvergenciji.

- U prvoj verziji teorema, intuicija je sljedeća: ako je $q \in \langle 0, +\infty \rangle$ onda su a_n i b_n otprilike jednaki do na faktor q (tj. kao da vrijedi $a_n \approx qb_n$; barem za velike n, a znamo da ponašanje za male n nije bitno u odluci konvergencije reda). Ako je $q = 0$ onda je a_n puno manji od b_n i obratno ako je $q = +\infty$ onda je b_n puno manji od a_n.

Primjer 5.2. Provjerimo konvergiraju li redovi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Prvi red s članovima $a_n = \frac{1}{n^2}$ uspoređujemo s redom s članovima $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Oba reda imaju u nazivniku polinom drugog stupnja po n. Zato računamo:

$$q = \lim_n \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_n \frac{1 + 1/n}{1} = 1.$$

Kako je $q = 1 \in \langle 0, \infty \rangle$, tada po usporednom kriteriju imamo da oba reda ili konvergiraju ili divergiraju. Kako znamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Slično, za red s članovima $c_n = \frac{1}{n^3}$ uspoređujemo s redom s članovima a_n, za koji smo sada vidjeli da konvergira. Dobivamo da je limes

$$q = \lim_n \frac{c_n}{a_n} = 0,$$

pa stoga možemo zaključiti da kako red s članovima iz nazivnika ovog limesa konvergira, tada i red s članovima c_n (iz brojnika) također konvergira.

Napomena. Općenito, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{divergira}, & \text{ako } \alpha \leq 1 \\ \text{konvergira}, & \text{ako } \alpha > 1 \end{cases}$$

Uočimo, koristeći usporedni kriterij i već dokazano, bez problema dobijemo tvrdnju za $\alpha \leq 1$ i $\alpha \geq 2$. Najkraći dokaz za $\alpha \in \langle 1, 2 \rangle$ je koristeći integralni kriterij (kojeg ćemo samo spomenuti). Iako nismo u potpunosti dokazali tvrdnju, koristimo je kao poznatu.

Primjer 5.3. Odredite konvergiraju li sljedeći redovi:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + n}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1000}{\sqrt{n^2(n^9 + \frac{1}{n^{2021}}) + 1}}$

U prvom primjeru imamo opći član koji je racionalna funkcija. Jedini kriterij (pored nužnog) koji znamo je usporedni kriterij, pa njega koristimo. Cilj je usporediti s pravim redom kojem znamo odluku. To radimo tako da uzimamo omjer općeg člana iz ovog primjera i nekog reda (vjerojatno s općim članom oblika $1/n^\alpha$, za neki α, jer je to klasa redova za koju znamo odluku). Pitanje je koji ćemo α uzeti. Recimo da smo odredili koji je to α. Usporedni kriterij (osim ako je drugačije navedeno, koristimo prvu verziju) tada bi se primijenio tako da tražimo limes omjera

$$\frac{n^2}{n^4+n} : \frac{1}{n^\alpha}.$$

Najsretniji smo kada je taj limes q neki broj iz $\langle 0, +\infty\rangle$. Znamo da je to kada je $\alpha = 2$, pa tako opravdavamo svoj izbor.
Dakle, za red iz zadatka s općim članom $a_n = \frac{n^2}{n^4+n}$, uzimamo red za usporedbu s općim članom $b_n = \frac{1}{n^2}$. Primjenom usporednog kriterija na ta dva reda, imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = 1 \in \langle 0, +\infty\rangle$$

odakle zaključujemo da oba reda konvergiraju ili oba reda divergiraju. Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, isto zadovoljava i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Za vaše rješavanje zadataka na kolokviju općenito ne morate argumentirati zašto ste uzeli neki red za usporedbu, bitno je samo da „radi” i odraditi argumentaciju (reći koji se kriterij koristi i izračunati q). Također, primijetite da smo mogli zapravo uzeti bilo koji α iz intervala $\langle 1, 2]$, no izbor $\alpha = 2$ je najlogičniji.
Nastavimo s primjerima dalje. Drugi je ružniji, no način rješavanja je isti. Opet ga želimo usporediti s nekim redom s članom oblika $1/n^\alpha$. Za to je zapravo bitno jedino vidjeti koji su „najjači” članovi (članovi koji se pojavljuju s najvišom potencijom) u brojniku i nazivniku. U brojniku je to jasno n^3, dok je u nazivniku to $\sqrt{n^2 \cdot n^9} = n^{11/2}$. Ne dajte se smesti, član $\frac{1}{n^{2021}}$ je jako slab i on konvergira u nulu, on ne povećava nazivnik. Dakle, cijeli opći član kada $n \to \infty$ ponaša se slično kao da je opći član $\frac{n^3}{n^{11/2}} = \frac{1}{n^{2.5}}$. Zato biramo $\alpha = 2.5$, odnosno uz red s općim članom $a_n = \dfrac{n^3+1000}{\sqrt{n^2(n^9+\frac{1}{n^{2021}})}+1}$ biramo red s općim članom $b_n = \frac{1}{n^{2.5}}$. Slično kao gore (provjerite sami) usporedni kriterij daje $q = 1$, pa oba reda konvergiraju ili divergiraju. Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, isto zadovoljava i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Ovo je bio dosta ružan primjer, ali njemu je sadržano sve što trebate znati za inače za redove kojima opći član sadrži racionalnu funkciju i eventualno neke korijene: nađite „najjači” član u brojniku i nazivniku, oduzmite njihove eksponente kako biste dobili red s kojim ćete u konačnici napraviti usporedbu.
Nastavljamo s primjerima dalje. Sad ćemo uključiti i logaritme koji, kao što ćemo vidjeti, ponekad nam mogu pomoći, a ponekad odmoći.

Primjer 5.4. Odredite konvergiraju li sljedeći redovi:

- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 \ln n}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

Promotrimo prvi primjer. Za trenutak ignorirajmo da postoji logaritam u općem članu i pokušajmo riješiti zadatak kako bismo inače. Da se umjesto logaritma ne nalazi ništa, rekli bismo da taj red konvergira. U ovom primjeru zato je prvi logični korak usporediti s redom s članovima $b_n = \frac{1}{n^3}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3 \ln n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Sad treba biti oprezan, budući da nismo dobili $q \in \langle 0, +\infty \rangle$. No, zaista se nalazimo u drugoj točki prve verzije usporednog kriterija: $q = 0$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, pa konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pokušajmo isto i na drugom redu iz primjera. Ponovno bismo usporedili s istim redom s članovima $b_n = \frac{1}{n^3}$. Tada dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\ln n)^2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} (\ln n)^2 \to +\infty.$$

Sada se nalazimo u problemu, jer ovaj slučaj nije pokriven usporednim kriterijem ($q = +\infty$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira). No, nije situacija toliko izgubljena. Ako slutimo da će red konvergirati, ne moramo uspoređivati originalni red samo s redom s članovima $\frac{1}{n^3}$, ostaje nam još mnogo eksponenata α u nazivniku (konkretno, svi $\alpha > 1$). Ponovno krenimo s nekim općenitim α, i uzmimo red s članovima $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Tada dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\ln n)^2}{n^3}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3-\alpha}}.$$

Ako je $\alpha > 3$, dobit ćemo da omjer još brže ide u $+\infty$, ali ako je $\alpha < 3$, tada ćemo dobiti omjer logaritma i (pozitivne) potencije. Na početku lekcije smo rekli da logaritam raste sporije od svakog polinoma, preciznije, za bilo koji $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0.$$

To znači da u našem zadatku za α u članovima b_n možemo uzeti bilo koji $1 < \alpha < 3$ pa recimo uzmemo $\alpha = 2$. Prema usporednom kriteriju, u gornjem računu q poprima vrijednost 0, pa kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Primjer 5.5. Odredite konvergira li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + n}.$$

Ponovno kao ranije, prvo pogledajmo što bismo radili da nema najkompliciranijeg člana (ili barem člana s kojim znamo najmanje raditi). Kada bi umjesto reda s članovima $a_n = \dfrac{|\cos n|}{n^2 + n}$ imali red s članovima $b_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$, to bi bio lak zadatak, usporedili bismo ga s redom s članovima $c_n = \dfrac{1}{n^2}$, (provjerite da je $q = 1 \in \langle 0, +\infty \rangle$), pa bismo zaključili da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

Vratimo se sada na red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Iako postoje još neke metode rješavanja zadataka s trigonometrijskim članovima, na vježbama ćemo imati samo jednu: ocjena sinusa i kosinusa s 1. Kako je $|\cos n| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tako vrijedi

$$a_n = \frac{|\cos n|}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+n} = b_n$$

Sada primjenjujemo drugu verziju usporednog kriterija: kako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira (što smo saznali nakon usporedbe s $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$), konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Napomena.

- U gornjem zadatku, barem u ovakvom načinu rješavanja, morali smo u drugom koraku primijeniti drugu verziju usporednog kriterija. Kada bismo na iste redove s članovima a_n i b_n primijenili prvu verziju usporednog kriterija, dobili bismo da limes omjera a_n/b_n ne postoji (jer $|\cos n|$ ne konvergira kad $n \to \infty$), i ne bismo mogli ništa zaključiti. Zato smo uveli i međukorak s redom b_n kako bi nam ta usporedba bila što bezbolnija. Može se riješiti i direktno uspoređujući članove a_n i c_n, ali ovako je jednostavnije. Također, moguće je i riješiti ovaj zadatak koristeći red s članovima oblika $1/n^{\alpha}$, gdje je $\alpha \in \langle 1, 2\rangle$, pa se ne mora primijenjivati druga nego prva verzija usporednog kriterija. Tada se q nađe preko teorema o sendviču. U suštini je sve slično, no smatramo da je ovo najjednostavniji način za rješavanje ovakvog tipa zadatka.

- Kao što ste mogli primijetiti, postoje redovi kojima prvi član kreće s $n = 0$ i oni kojima prvi član kreće s $n = 1$. Postojat će i oni koji će kretati s $n = 2$, i među njima ne postoji nikakva razlika u kontekstu odluke o konvergenciji i primjene kriterija konvergencije. Također, dosta često nam se u primjerima događalo da redovi konvergiraju, ali naravno, slične metode rade i za dokaze da redovi divergiraju.

---

§ 5.2. Drugi kriteriji

Svi primjeri do sada uključivali su polinomne, logaritamske, iracionalne i trigonometrijske izraze u n. Kada se pojavljaju eksponencijalni izrazi u n ili faktorijeli, moguće je i dalje koristiti usporedne kriterije, ali račun postaje ružniji. Za takve primjere postoje primjereniji kriteriji, koje je i lakše primijeniti nego usporedni kriterij.

Teorem 5.5: D'Alembertov kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s **pozitivnim** članovima takav da postoji $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i jednak je q.

- Ako je $q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako je $q > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- Ako je $q = 1$, nemamo odluku (ne znamo konvergira li ili divergira).

Teorem 5.6: Cauchyjev kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s **pozitivnim** članovima takav da postoji $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ i jednak je q.

- Ako je $q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako je $q > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- Ako je $q = 1$, nemamo odluku (ne znamo konvergira li ili divergira).

Napomena.

- Retci u kriterijima koji se odnose na $q = 1$ i kažu "nemamo odluku" slični su kao i u ostalim kriterijima. Ako za neki red dobijete $q = 1$, jedino što možete zaključiti je da ste primijenili kriterij kojim ne možete ništa dokazati i da trebate naći neki drugi način kako riješiti zadatak. Primjer takvih redova su s članovima $1/n$ i $1/n^2$ (provjerite sami – znamo da jedan od njih konvergira, a drugi divergira, no ova dva kriterija nam to ne kažu). Dapače, za sve redove s članovima $1/n^{\alpha}$, gdje je $\alpha > 0$, ova dva kriterija dat će nam $q = 1$, odnosno da nemamo odluku.
- U suštini ovi kriteriji su ekvivalentni kao da dani red uspoređujete s nekim geometrijskim redom (s bazom q), samo izvedeno elegantnije. Kako geometrijski red konvergira mnogo brže od bilo kojeg reda s članovima $1/n^{\alpha}$ (ili divergira, ovisno o vrijednosti baze i α), ovo su dosta slabi kriteriji. Konkretno, kada biste primijenili Cauchyjev i D'Alembertov kriterij na sve primjere do sada, dobili biste $q = 1$, dakle da nemamo odluku. Jedina prednost ovih kriterija je da su jednostavniji za korištenje (nije nam potrebna intuicija s kojim redom ćemo usporediti dani red). Zato ih koristimo gotovo isključivo kada vidimo elemente s eksponencijalnim funkcijama i faktorijelima u članovima reda.
- Cauchyjev kriterij je jači od D'Alembertovog. Preciznije: svaki red koji se može riješiti D'Alembertovim kriterijem može se riješiti i Cauchyjevim kriterijem, dok obrat ne vrijedi. Srećom, takav primjer je dosta umjetno konstruiran, tako da se praktički ne morate time zamarati. Na gotovo svim primjerima koji će se nama pojavljivati ako ćete moći riješiti jednim kriterijem, moći ćete i drugim. Koji ćete kriterij koristiti od ta dva, to je vaša odluka i ovisi o vašem stilu. U pravilu, čini se da je Cauchyjev kriterij bolji kada se pojavljaju eksponencijalne funkcije, a D'Alembertov kada se pojavljuju faktorijeli.

Primjer 5.6. Odredite konvergiraju li sljedeći redovi

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n}$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{n^2}}$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$,

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

Kao što smo u jednom od gornjih primjera izrekli da je "polinom jači od svakog logaritma" (u kontekstu da jedna od tih funkcija puno brže teži u $+\infty$ od druge), tako se može dokazati da je "polinom slabiji od svake eksponencijalne". Zato će činjenica da se u redu u prvom primjeru pojavljuje eksponencijalna funkcija biti ključna i njeno prisustvo je "važnije" od prisustva polinoma – drugim riječima, zato ćemo moći iskoristiti Cauchyjev ili D'Alembertov kriterij.
Iako kada sami rješavate zadatke možete iskoristiti bilo koji od tih kriterija, samo radi primjera, pokazujemo korištenje oba. Za D'Alembertov kriterij, računamo:

$$q = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^{10}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{3^n}} = \lim_n \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} = \frac{1}{3}$$

(u zagradi izraz očito teži u 1, činjenica da to dižemo na potenciju neovisnu o n to ne mijenja). Kako je $q < 1$, red konvergira. Za Cauchyjev kriterij:

$$q = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{3^n}} = \lim_n \frac{1}{3}(\sqrt[n]{n})^{10} = \frac{1}{3},$$

zato što $\sqrt[n]{n} \to 1$ kada $n \to +\infty$. U oba slučaja (ponavljam, vama je dovoljno izabrati jedan) red konvergira.
Za drugi primjer, ponovno je slična situacija, ponovno pokazujemo oba kriterija. D'Alembertov:

$$q = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^5}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{n^5}{e^{n^2}}} = \lim_n \frac{1}{e^{2n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = 0$$

(druga zagrada opet teži k jedan, dok prvi faktor ide u nulu). Kako je $q < 1$, red konvergira. Za Cauchyjev kriterij:

$$q = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^5}{e^{n^2}}} = \lim_n \frac{1}{e^n}(\sqrt[n]{n})^5 = 0$$

(opet produkt izraza koji teži k nuli i koji teži k jedan). I prema ovom kriteriju, red konvergira.
Za treći primjer, iskoristit ćemo dva tablična limesa:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Kao i sve tablične limese, možete ih koristiti kao apsolutnu istinu. Koristeći prvi, primjena Cauchyjevog kriterija je trivijalna: $q = 1/e < 1$, pa red konvergira. Koristeći D'Alembertov kriterij:

$$q = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)}$$
$$= \lim_n (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \lim_n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1}.$$

Opet red konvergira.
Za četvrti primjer najprirodniji je Cauchyjev kriterij:

$$q = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Kako je $q < 1$, red konvergira. Zadnji primjer rješavamo D'Alembertovim kriterijem:

$$q = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim_n \frac{5}{n+1} = 0.$$

Kako je $q < 1$, red konvergira.

§ 5.3. Redovi s općenitim članovima

Do sada smo radili samo s redovima s pozitivnim članovima. Što ako ima negativnih članova?

- Ako su svi članovi negativni, jednostavno rješenje je da pogledamo red pomnožen s -1. Ako je samo konačno pozitivnih/negativnih članova, možemo zanemariti prvih konačno mnogo članova jer oni ne utječu na odluku o konvergenciji reda.
- Ako je nešto kompliciranije, imamo točno jedan od tri načina. Da budemo precizniji, ima više metoda kako općenito riješiti takve zadatke, ali na primjerima koji će se pojavljivati u našim zadatcima, ta tri načina bit će dovoljna:
  - Nužan uvjet konvergencije.
  - Leibnizov kriterij.
  - Apsolutna konvergencija.

Teorem 5.7: Leibnizov kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red takav da:

- a_n alterniraju po predznaku,
- vrijedi $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, za sve n,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Definicija 5.8: Apsolutna konvergencija reda

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da **konvergira apsolutno** ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Uočimo, ako su svi članovi reda istog predznaka, nismo definirali ništa novo. U drugom slučaju, vrijedi samo jedna implikacija.

Teorem 5.9

Ako red konvergira apsolutno, tada konvergira i obično.

Konkretnije, postoje redovi koji konvergiraju „obično”, no ne i apsolutno. Jedan takav je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Napomena. Gore navedenu uputu najbolje je u praksi provoditi u tom redoslijedu, jer je u tom redoslijedu najjednostavnije i provesti te korake. Počet ćemo s nužnim uvjetom konvergencije, jedinim kriterijem do sada koji se može primijeniti i za redove s negativnim članovima. Provjerit ćemo konvergira li niz članova u nulu. Ako ne, znamo da red divergira i gotovi smo. Ako konvergiraju u nulu, nastavljamo provjere dalje. Tu provjeru najčešće možemo raditi i napamet, jer najčešće nužni uvjet konvergencije nam ne donosi odluku.
Nakon toga krećemo na Leibnizov kriterij. On se primjenjuje na redovima posebnog oblika, naime, predznaci moraju alternirati. Dakle, prvi, treći, peti član, ... u redu je negativan, dok su drugi, četvrti, šesti, ... pozitivni, ili obratno. Takve redove lako je uočiti (najčešće ćete vidjeti faktor $(-1)^n$, eventualno se može pojaviti i nešto poput $\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$, $\cos(\pi n)$ ili slično), i

stoga je lako pokušati primijeniti Leibnizov kriterij. Za njega nakon uočavanja alternirajućih predznaka morate provjeriti još dvije stvari. Zadnji uvjet $\lim_n a_n = 0$ isti je kao kod nužnog uvjeta konvergencije (zato je korisno da ste prije ovog koraka provjerili taj kriterij). Preostalo je još dokazati da niz članova bez predznaka $|a_n|$ pada. To je najteži dio provjere tog kriterija.
Ako ni Leibnizov kriterij ne donosi odluku (najčešće jer red nije alternirajući po predznaku, nego su predznaci "nasumičnije razbacani" po članovima reda, ili jer niz nije padajući), jedino što nam je preostalo je primijeniti svojstvo apsolutne konvergencije. Ona nam sugerira sljedeće: pokušajmo dokazati da red u kojem smo uzeli apsolutnu vrijednost svakog člana konvergira (nekom od prije spomenutih metoda: usporedni kriterij, Cauchyjev kriterij ili D'Alembertov kriterij). Ako uspijemo, iskoristimo ovaj teorem: budući da takav red konvergira, konvergira i originalni (onaj u kojem postoje i pozitivni i negativni članovi).
U primjerima koji slijede pokazat ćemo kako primijeniti Leibnizov kriterij i apsolutnu konvergenciju, budući da se obje tehnike često pojavljuju u redovima s članovima koji mijenjaju predznak.

Primjer 5.7. Odredite konvergiraju li redovi

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{\ln n}$;
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$;
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Prije primjene Leibnizovog kriterija uvijek možete pokušati primijeniti i nužan uvjet konvergencije (zapravo, to možete uvijek napraviti). U sva četiri reda nizovi članova konvergiraju k nuli. U prva tri reda vidimo da su članovi nizovi s alternirajućim predznacima: članovi su umnošci pozitivnih brojeva s $(-1)^n$. Kako smo na prste (na kolokviju ne samo na prste) provjerili da je $\lim_n a_n = 0$, da bismo iskoristili Leibnizov kriterij, preostalo je provjeriti da su nizovi apsolutnih vrijednosti članova padajući.
Dakle, u prvom primjeru vrijedi $|a_n| = \frac{1}{n}$. Ovaj niz očito je padajući. To možemo provjeriti na dva načina. Prvo, možemo usporediti dva uzastopna člana:

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\le |a_n| \\ \iff \frac{1}{n+1} &\le \frac{1}{n} \\ \iff n &\le n+1. \end{aligned}$$

Kako su sve nejednakosti ekvivalentne, i kako vrijedi zadnja, vrijedi i prva, dakle, niz jest padajući.
Drugi način provjere je koristeći alate prvog dijela semestra. Uvedimo funkciju $f(x) = 1/x$. Tada su članovi $|a_n|$ upravo vrijednosti $f(1), f(2), \ldots$. Vrijedi: ako je funkcija f padajuća, tada je i niz $(|a_n|)_{n\ge1}$ padajući (budite oprezni, obrat ne mora vrijediti). Lako je provjeriti da je $f(x) = 1/x$ zaista padajuća funkcija pa je i niz padajući. Kako god napravili provjeru, svi uvjeti Leibnizovog kriterija su zadovoljeni, dakle, red konvergira.
Pogledajmo i drugi primjer. Ponovno treba provjeriti samo pada li niz $(|a_n|)_{n\ge2}$, a tu provjeru možemo napraviti isto kao i prije jer je funkcija $x \mapsto 1/\ln x$ padajuća za $x > 1$. Napomenimo

da su zapravo ovi primjeri jednostavni, i da zapravo nije potrebno toliko detaljno argumentirati da je niz padajući.
U trećem primjeru je

$$|a_n| = \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Ovaj niz teži u nulu. Da bismo vidjeli da pada, usporedimo dva uzastopna člana:

$$\frac{n+2}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Budući da su nazivnici pozitivni, ova nejednakost ekvivalentna je s

$$(n+2)(n^2+1) \leq (n+1)((n+1)^2+1),$$

a nakon sređivanja dobivamo $0 \leq n^2 + 3n$, što vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato su zadovoljeni uvjeti Leibnizovog kriterija, pa red konvergira.
Četvrti primjer nije alternirajući red u smislu Leibnizovog kriterija, ali možemo promatrati apsolutnu konvergenciju:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Kako red na desnoj strani konvergira, po usporednom kriteriju konvergira red apsolutnih vrijednosti. Zato početni red konvergira apsolutno, pa onda i obično.

Zadatak 5.8. Odredite konvergira li red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2 - 10\ln n + 20}$.

Rješenje 5.8. Nužan uvjet konvergencije je zadovoljen jer

$$\frac{(-1)^n}{(\ln n)^2 - 10\ln n + 20} \to 0.$$

Nazivnik može promijeniti predznak samo konačno mnogo puta: njegove nultočke u varijabli $\ln n$ su $5 - \sqrt{5}$ i $5 + \sqrt{5}$. Zato je dovoljno promatrati rep reda za $n > e^{5+\sqrt{5}}$, gdje je nazivnik pozitivan.
Na tom repu red je alternirajući, a apsolutne vrijednosti članova su

$$b_n = \frac{1}{(\ln n)^2 - 10\ln n + 20}.$$

Vrijedi $b_n \to 0$. Još treba vidjeti da je niz (b_n) padajući za dovoljno velike n. Ako je $n > e^{5+\sqrt{5}}$, tada je $\ln n > 5$, pa za svaki $m > n$ vrijedi

$$\ln m - 5 > \ln n - 5 > 0.$$

Zato je

$$(\ln m - 5)^2 > (\ln n - 5)^2,$$

a onda i

$$(\ln m)^2 - 10\ln m + 20 > (\ln n)^2 - 10\ln n + 20.$$

Dakle, nazivnik raste, pa niz recipročnih vrijednosti (b_n) pada. Po Leibnizovom kriteriju taj rep reda konvergira, a dodavanje konačno mnogo početnih članova ne utječe na konvergenciju. Dakle, zadani red konvergira.

$\square$

Zadatak 5.9. Odredite konvergira li red $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. Konvergira li apsolutno?

Rješenje 5.9. Neka je $b_n = \frac{\ln n}{n}$. Vrijedi $b_n \to 0$. Provjerimo još da je niz (b_n) padajući barem od nekog mjesta. Za $n \geq 3$ imamo

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln n}{n}$$

ako i samo ako

$$n\ln(n+1) \leq (n+1)\ln n,$$

što je ekvivalentno s

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n.$$

Zadnja nejednakost vrijedi za $n \geq 3$ jer je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 3 \leq n$. Zato su uvjeti Leibnizovog kriterija zadovoljeni od nekog mjesta, pa zadani red konvergira.
Ne konvergira apsolutno. Za $n \geq 3$ vrijedi $\ln n \geq 1$, pa je

$$\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Budući da harmonijski red divergira, po usporednom kriteriju divergira i red apsolutnih vrijednosti. Dakle, zadani red konvergira obično, ali ne apsolutno. □

Zadatak 5.10. Odredite konvergira li red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+2^n}{n^6+3^n}.$$

Rješenje 5.10. Članovi reda su pozitivni. Ideja je odvojeno ocijeniti polinomni i eksponencijalni dio brojnika. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n^6+3^n \geq n^6 \qquad \text{i} \qquad n^6+3^n \geq 3^n.$$

Zato je

$$\frac{n^4+2^n}{n^6+3^n} = \frac{n^4}{n^6+3^n} + \frac{2^n}{n^6+3^n} \leq \frac{n^4}{n^6} + \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira, a red $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ je geometrijski s kvocijentom manjim od 1, pa i on konvergira. Zato konvergira i njihov zbroj. Po usporednom kriteriju konvergira i zadani red. □

§ 5.4. Integralni kriterij - NIJE DIO GRADIVA

Preostao nam je još jedan kriterij, koji je zapravo dosta moćan.

Teorem 5.10: Integralni kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima. Neka je $f : [a, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ **pozitivna, neprekidna i padajuća funkcija**, za neki $a \geq 0$, takva da vrijedi $a_n = f(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako nepravi integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergira.

Napomena. Na prvu zvuči dosta apstraktno, ali način razmišljanja je ovakav: u gotovo svakom zadatku jasno je kako članovi reda ovise o varijabli n (uzmimo za primjer $\frac{\sqrt[n]{n^5+1}}{e^n \ln n}$). Funkciju f iz gornjeg iskaza teorema zadajemo tako da ovisnost po n mijenjamo s ovisnosti po x: $f(x) = \frac{\sqrt[x]{x^5+1}}{e^x \ln x}$. Za takvu funkciju f moramo provjeriti dane uvjete.
Snaga kriterija se očituje i u tome što njime možemo dokazati i da red konvergira (ako integral konvergira) i da red divergira (ako integral divergira).
Jedna stvar oko koje treba biti oprezan: kada integral konvergira dobivena vrijednost nema veze sa sumom konvergentnog reda. Ovaj kriterij samo govori o odluci za konvergenciju, ne i vrijednosti tog reda.

Primjer 5.11. U ovisnosti o parametru $\alpha > 0$, odredite konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

To su redovi za koje smo na početku najavili da ćemo koristiti kao poznato konvergiraju li ili ne. Sada možemo i sami provjeriti te tvrdnje iz uvoda. Uvodimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Ona je očito neprekidna za $x > 0$, te je i pozitivna i padajuća. Treba provjeriti njezin nepravi integral. Prije toga, treba uzeti i neku vrijednost za $a \geq 0$. Praktički je nebitno koju ćemo vrijednost uzeti, recimo uzmimo $a = 1$.
Odluka o konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ovisi o konvergenciji integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$. Pa, izračunajmo taj integral. Znamo da imamo neko posebno ponašanje kada je $\alpha = 1$, pa ćemo to promotriti kasnije. Dakle, za sve $\alpha \neq 1$ imamo

$$\int_1^B \frac{1}{x^\alpha} dx = \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \Big|_{x=1}^{x=B} = \frac{1}{(1-\alpha)B^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Sada treba pustiti $B \to \infty$. Kada je $\alpha > 1$, $B^{\alpha-1} \to +\infty$, a kada je $\alpha < 1$, $B^{\alpha-1} \to 0$. Zato je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^B \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1. \end{cases}$$

Preostalo je provjeriti slučaj $\alpha = 1$:

$$\int_1^B \frac{1}{x} dx = (\ln x) \Big|_{x=1}^{x=B} = \ln B.$$

Kada $B \to +\infty$, $\ln B \to +\infty$, pa u tom slučaju integral divergira.
Integralni kriterij kaže da u slučajevima kada integral konvergira/divergira, da u istim slučajevima i red konvergira/divergira, a to se poklapa s onime što smo najavili na početku predavanja.

Zadatak 5.12. U ovisnosti o parametru $\varepsilon \geq 0$, odredite konvergira li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$.

Zadatak 5.13. U ovisnosti o parametru $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$, odredite konvergira li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\varepsilon}}$.

§ 5.5. Logaritamsko/polinomijalni redovi

Vratimo se opet na zadatke koje smo rješavali usporednim kriterijem. Jedan od najkompliciranijih koji nam se može pojaviti je oblika

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\ln n)^{\beta}$$

(zapravo, može biti i kompliciranije u kontekstu da polinomi mogu imati i niže članove, mogu se pojavljivati i neki korijeni, ali znamo da ćemo ga moći barem u prvom koraku usporediti s redom oblika kao gore). Prokomentirajmo kako bismo ih riješili.

- Ako je $\beta = 0$, red sadrži samo potencije, i to znamo, te dapače, možemo koristiti kao poznato: red konvergira ako i samo ako je $\alpha > 1$.
- Promotrimo slučaj kada je $\beta < 0$ i $\alpha > 1$. Red je oblika

  $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{-\beta}}$$

  ($-\beta$ je pozitivan, pa smo ga spustili u nazivnik). Kada logaritma ne bi bilo, red bi konvergirao. Članovi reda koji promatramo su još manji, dakle konvergirat će "još jače". To ćemo opravdati usporedbom s redom s članovima $\frac{1}{n^{\alpha}}$.
- Slična situacija je u slučaju kada je $\beta > 0$ i $\alpha \leq 1$. Kada u redu

  $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\ln n)^{\beta}$$

  ne bi bilo logaritma, red bi divergirao, a ovako ima još veće članove. Usporedni kriterij s redom s članovima $\frac{1}{n^{\alpha}}$ će nam dati dokaz te slutnje.
- Prva kompliciranija situacija je u slučaju kada je $\beta > 0$ i $\alpha > 1$. Red

  $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\ln n)^{\beta}$$

  bez logaritama konvergira, no logaritam povećava njegove članove. Vidjeli smo već ranije da zadatak ne možemo riješiti usporedbom s $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, ali možemo s redom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha'}}$, gdje je α' bilo koji realan broj veći od jedan (kako bi taj novi red konvergirao), ali manji od α (kako bi q u usporednom kriteriju bio jednak nuli). Kako je $\alpha > 1$, uvijek postoji takav α'. Pokušajte sami riješiti zadatak $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{4n+3}} (\ln 2n)^{7}$.

- Slično se događa u slučaju kada je $\beta < 0$ i $\alpha < 1$. Čini nam se da red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}}$$

divergira, ali ne možemo ga usporediti s redom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Umjesto α opet mora doći α' koji je ponovno između α i 1 (da bi red s α' divergirao, te da bi q u usporednom kriteriju bio jednak $+\infty$). Kako je $\alpha < 1$, postoji neki α' koji se može između ugurati. Pogledajte zadatak $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+3}}(\ln(n+2))^{-3}$.

- Preostali slučaj je sličan prošlom: $\beta < 0$ i $\alpha = 1$, no on je najkompliciraniji. Sada ne možemo izmisliti α' između α i 1, jer α jest jednako 1. No, ti su slučajevi riješeni integralnim kriterijem u Zadatcima 5.12 i 5.13.

Konačno, zaključujemo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\ln n)^{\beta} \begin{cases} \text{divergira,} & \text{ako } \alpha < 1 \text{ ili } \alpha = 1, \beta \geq -1 \\ \text{konvergira,} & \text{ako } \alpha > 1 \text{ ili } \alpha = 1, \beta < -1 \end{cases}$$

Ovo ne možete koristiti na kolokviju, nego dokazati kao što je objašnjeno u napomeni.

	$\beta < 0$	$\beta = 0$	$\beta > 0$
$\alpha < 1$	za α' t.d. $\alpha < \alpha' < 1$ usporedba s $1/n^{\alpha'}$ *divergira*	*divergira*	usporedba s $1/n^{\alpha}$ *divergira*
$\alpha = 1$	integralni test *konvergira ako i samo ako* $\beta < -1$	*divergira*	usporedba s $1/n^{\alpha}$ *divergira*
$\alpha > 1$	usporedba s $1/n^{\alpha}$ *konvergira*	*konvergira*	za α' t.d. $\alpha > \alpha' > 1$ usporedba s $1/n^{\alpha'}$ *konvergira*

Tablica 1: Shematski prikaz metoda za redove oblika $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\ln n)^{\beta}$.