Matematika 1 za kemičare

rješenja pismenog ispita, 9. srpnja 2025.

Marin Varivoda & Franka Miriam Brückler

1. (5+5+5) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}.$$

   (a) Odredite prirodnu domenu od f.

   (b) Izračunajte $\lim_{x\to 1} f(x)$.

   (c) Odredite (ako postoje) sve horizontalne i vertikalne asimptote funkcije f.

Rješenje.

   (a) Zbog logaritma, mora vrijediti $x > 0$. Zbog nazivnika, mora vrijediti $(x-1)^2 \neq 0$, tj. $x \neq 1$. Stoga je prirodna domena $\boxed{\mathcal{D}_f = (0,1) \cup (1,\infty)}$.

   (b) Kada $x \to 1$, i brojnik i nazivnik teže prema 0. Stoga koristimo L'Hôpitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} \overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{2x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

   (c) **Vertikalne asimptote:** Jedini kandidati za vertikalne asimptote su na rubovima domene, $x = 0$ i $x = 1$. U (b) dijelu smo pokazali da je $\lim_{x\to 1} f(x) = -1/2$, pa $x = 1$ nije vertikalna asimptota. Ispitajmo limes u $x = 0$ s desne strane:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} = \frac{-\infty - 0 + 1}{(-1)^2} = \frac{-\infty}{1} = -\infty.$$

   Dakle, pravac $\boxed{x = 0}$ je vertikalna asimptota.

   Horizontalne asimptote: Ispitujemo ponašanje funkcije kada $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} \overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \frac{0-1}{\infty} = 0.$$

   Budući da je limes konačan, funkcija ima desnu horizontalnu asimptotu. To je pravac $\boxed{y = 0}$. Lijevu horizontalnu asimptotu nema jer domena ne ide u $-\infty$.

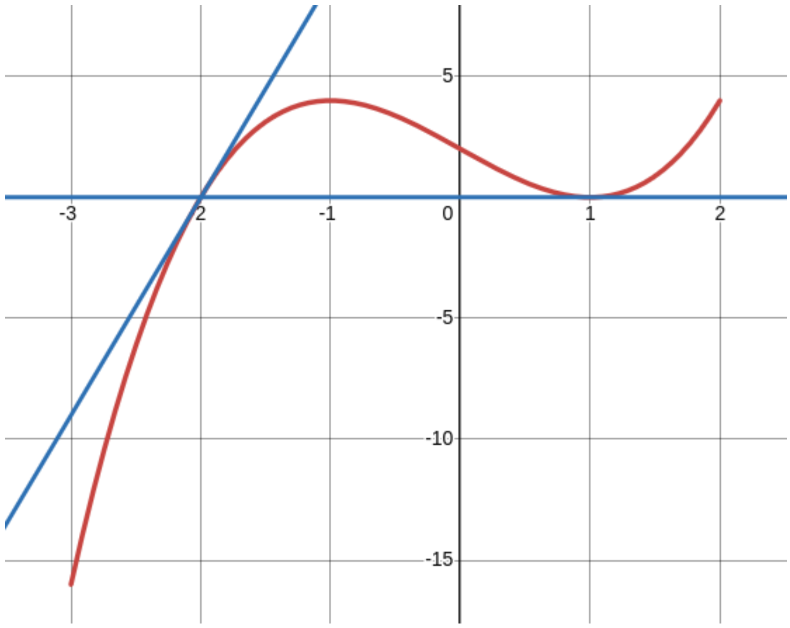
2. (5+5+5) Zadana je funkcija $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 - 3x + 2.$$

   (a) Odredite jednadžbe tangenata na graf funkcije f povučenih u točkama u kojima graf funkcije f siječe x-os.

   (b) Odredite intervale rasta i pada funkcije f.

   (c) Odredite sve lokalne maksimume i lokalne minimume funkcije f.



Slika 1: Graf funkcije $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Tangente iz (a) su plave.

Rješenje.

(a) Nađimo točke u kojima graf siječe x-os, to su rješenja jednadžbe $f(x) = 0$:

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \implies (x-1)^2(x+2) = 0 \implies \boxed{x \in \{1, -2\}}.$$

Koeficijent smjera tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ jednak je $f'(x_0)$, pa je jednadžba tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Za $x_0 = -2$ dobijemo $\boxed{y = 9x + 18}$, a za $x_0 = 1$ dobijemo $\boxed{y = 0}$.

(b) Intervale rasta i pada određujemo pomoću predznaka prve derivacije. Stacionarne točke dobivamo rješavanjem $f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0 \implies 3(x^2 - 1) = 0 \implies x = 1$ i $x = -1$. Te točke dijele domenu $[-3, 2]$ na intervale $[-3, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, 2]$.

- Na $[-3, -1)$ je $f'(x) > 0$, pa funkcija raste.
- Na $(-1, 1)$ je $f'(x) < 0$, pa funkcija pada.
- Na $(1, 2]$ je $f'(x) > 0$, pa funkcija raste.

Funkcija raste na $\boxed{[-3, -1) \cup (1, 2]}$, a pada na $\boxed{(-1, 1)}$.

(c) Prema testu prve derivacije, lokalni ekstremi se nalaze u stacionarnim točkama.

- U $x = -1$, derivacija mijenja predznak iz $+$ u $-$, pa se tu nalazi lokalni maksimum. Njegova vrijednost je $f(-1) = 4$.
- U $x = 1$, derivacija mijenja predznak iz $-$ u $+$, pa se tu nalazi lokalni minimum. Njegova vrijednost je $f(1) = 0$.
- *Funkcija je monotona oko rubova domene, pa imamo i lokalni minimum u $x = -3$, te lokalni maksimum u $x = 2$. Vrijednosti su im $f(-3) = -16$ i $f(2) = 4$.

*Studenti koji nisu naveli rubove domene nisu kažnjeni oduzimanjem bodova. Objašnjenje zašto je potrebna i provjera rubova je dano u sljedećoj napomeni.

Napomena. Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na nekom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da ima *lokalni minimum* u točki $x_0 \in \Omega$ ako postoji okolina U od x_0 takva da $y \in U \implies f(x_0) \leq f(y)$. Ekvivalentna formulacija je da f ima lokalni minimum u x_0 ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da za $y \in \Omega$ i $|y - x_0| < \varepsilon$ vrijedi $f(x_0) \leq f(y)$. Analogno definiramo i pojam *lokalnog maksimuma*. Kažemo da je $x_0 \in \Omega$ *lokalni ekstrem* od f ako je lokalni minimum ili lokalni maksimum.

Test prve derivacije tvrdi da ako je $f : I \to \mathbb{R}$ definirana i derivabilna na **otvorenom** intervalu I (npr. $I = (-5, 14), (-\infty, 2), \mathbb{R}$ su sve otvoreni intervali, dok $I = [4, 7), [-1, 1]$ nisu), onda za sve lokalne ekstreme $x_0 \in I$ vrijedi $f'(x_0) = 0$.

Napomenimo još da $f'(x_0) = 0$, ne znači nužno da je x_0 lokalni ekstrem, ali ako x_0 je lokalni ekstrem, onda sigurno vrijedi $f'(x_0) = 0$. To najbolje ilustrira primjer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$. Provjerimo da je u tom primjeru $f'(0) = 0$ iako $x = 0$ nije lokalni ekstrem.

Sada se vratimo na zadatak, možemo naći lokalne ekstreme na **otvorenom** intervalu $I = (-3, 2)$ koristeći test derivacije. Uistinu $f'(x) = 3x^2 - 3x = 0$ daje da su potencijalni lokalni ekstremi od f na $(-3, 2)$ u točkama $x = -1$ i $x = 1$. Dodatno provjerimo da su te stacionarne točke zapravo lokalni maksimum i lokalni minimum redom. Da bi bili potpuno precizni, moramo još provjeriti što je sa točkama $x = -3$ i $x = 2$. U nekoj okolini od $x = -3$ (npr. $[-3, -2.5]$, to je skup svih y za koje je $y \in \Omega := [-3, 2]$ i $|y - (-3)| < \varepsilon$ gdje smo izabrali $\varepsilon := 0.5$) je funkcija strogo rastuća pa je $x = -3$ lokalni minimum. Slično na okolini od $x = 2$ (npr. $(1.5, 2]$) je funkcija strogo padajuća pa je $x = 4$ lokalni maksimum.

Koji su globalni ekstremi od f? Ako sad usporedimo $f(-3) = -16$ i $f(2) = 4$ s ostalim pronađenim lokalnim ekstremima (u $x = -1$ i $x = 1$), vidimo da su to zapravo i globalni ekstremi funkcije. Tj. na $[-3, 2]$ maksimalna vrijednost od f je 4, a minimalna -15.

Dakle moramo biti svjesni da **funkcija može poprimati ekstremne vrijednosti i na rubu domene**.

3. (10+10) Izračunajte integrale:

   (a) $\displaystyle\int e^x \cos(2x)\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

Rješenje.

(a) Koristimo parcijalnu integraciju dva puta. Neka je $I = \int e^x \cos(2x)\, dx$.

$$\begin{aligned}
I = \int e^x \cos(2x)\, dx &= \begin{vmatrix} u = \cos(2x) & dv = e^x\, dx \\ du = -2\sin(2x)\, dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x)\, dx \\
&= e^x \cos(2x) + 2 \left(\begin{vmatrix} u = \sin(2x) & dv = e^x\, dx \\ du = 2\cos(2x)\, dx & v = e^x \end{vmatrix} \right) \\
&= e^x \cos(2x) + 2 \left(e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x)\, dx \right) \\
I &= e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 4I
\end{aligned}$$

Sada riješimo jednadžbu po I:

$$5I = e^x(\cos(2x) + 2\sin(2x)) \implies I = \boxed{\frac{e^x}{5}(\cos(2x) + 2\sin(2x)) + C}.$$

(b) Riječ je o nepravom integralu. Koristimo supstituciju $u = \ln x$.

$$\begin{aligned}
\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx &= \lim_{A\to\infty} \int_e^A \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx \\
&= \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}\, dx \\ x = e \implies u = \ln e = 1 & \\ x = A \implies u = \ln A & \end{vmatrix} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{\ln A} \frac{1}{u^2}\, du \\
&= \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{\ln A} = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln A} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) \\
&= 0 + 1 = \boxed{1}
\end{aligned}$$

jer $\ln A \to \infty$ kada $A \to \infty$, pa $\frac{1}{\ln A} \to 0$.

4. (20) Zadani su pravci p, q i r,

$$\begin{aligned}
p \ldots \frac{x-1}{2} &= \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}, \\
q \ldots \frac{x-1}{\lambda} &= \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}, \\
r \ldots \frac{x}{1} &= \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z-2\lambda}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Za koju vrijednost parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ sva tri pravca leže u istoj ravnini?

Rješenje. Da bi tri pravca ležala u istoj ravnini π, **nužan uvjet** je da njihovi vektori smjera budu ortognalni na normalu te ravnine (ako p, q, r leže na istoj ravnini onda njihovi vektori smjera moraju biti ortogonalni na njenu normalu, ali obratno ako su p, q, r ortogonalni na normalu neke ravnine, ne mora značiti da leže u njoj). Iz $\vec{s}_p, \vec{s}_q \perp \vec{n}_\pi$, slijedi da možemo izabrati normalu kao $\vec{n}_\pi := \vec{s}_p \times \vec{s}_q$. Tada $\vec{s}_r \perp \vec{n}_\pi \implies \vec{n}_\pi \cdot \vec{s}_r = 0 \implies (\vec{s}_p \times \vec{s}_q) \cdot \vec{s}_r = 0$. Mogli bi prvo izračunati $\vec{s}_p \times \vec{s}_q$, pa onda skalarni produkt toga sa $\vec{s}_r$, ali isti račun možemo brže provesti ako uočimo da se zapravo radi o mješovitom produktu, pa ga možemo izračunati kao determinantu $\det(\vec{s}_p, \vec{s}_q, \vec{s}_r) = (\vec{s}_p \times \vec{s}_q) \cdot \vec{s}_r$.

Mješoviti produkt je:

$$(\vec{s}_p \times \vec{s}_q) \cdot \vec{s}_r = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2(1 \cdot \lambda - 1 \cdot \lambda) - 1(\lambda \cdot \lambda - 1 \cdot 1) + 0 = -(\lambda^2 - 1).$$

Iz uvjeta $(\vec{s}_p \times \vec{s}_q) \cdot \vec{s}_r$ slijedi $-(\lambda^2 - 1) = 0$, odnosno $\lambda^2 = 1$. Kandidati za rješenje su $\lambda = 1$ i $\lambda = -1$. Ovaj uvjet je **nužan, ali ne i dovoljan**, stoga moramo provjeriti oba slučaja.

Slučaj 1: $\lambda = 1$ Vektori smjera su $\vec{s}_p = (2, 1, 0)$, $\vec{s}_q = (1, 1, 1)$, $\vec{s}_r = (1, 1, 1)$. Vektor normale $\vec{n}$ je okomit na sve njih, pa ga možemo izračunati kao $\vec{n} = \vec{s}_p \times \vec{s}_q$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Odaberimo po jednu točku sa svakog pravca: $T_p(1, 2, 3)$, $T_q(1, 1, 1)$ i $T_r(0, 1, 2)$. Provjerimo uvjet:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot T_p &= (1, -2, 1) \cdot (1, 2, 3) = 1 - 4 + 3 = 0 \\ \vec{n} \cdot T_q &= (1, -2, 1) \cdot (1, 1, 1) = 1 - 2 + 1 = 0 \\ \vec{n} \cdot T_r &= (1, -2, 1) \cdot (0, 1, 2) = 0 - 2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Budući da je $\vec{n} \cdot T_p = \vec{n} \cdot T_q = \vec{n} \cdot T_r = 0$, sve tri točke leže na istoj ravnini $x - 2y + z = 0$. Kako su i vektori smjera pravaca paralelni s tom ravninom, sva tri pravca leže u njoj. Dakle, $\lambda = 1$ jest rješenje.

Slučaj 2: $\lambda = -1$ Vektori smjera su $\vec{s}_p = (2, 1, 0)$, $\vec{s}_q = (-1, 1, 1)$, $\vec{s}_r = (1, -1, -1)$. Vektor normale je $\vec{n} = \vec{s}_p \times \vec{s}_q$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 3).$$

Odaberimo točke: $T_p(1, 2, 3)$, $T_q(1, 1, 1)$ i za $\lambda = -1$ točka na pravcu r je $T_r(0, 1, -2)$. Provjerimo:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot T_p &= (1, -2, 3) \cdot (1, 2, 3) = 1 - 4 + 9 = 6 \\ \vec{n} \cdot T_q &= (1, -2, 3) \cdot (1, 1, 1) = 1 - 2 + 3 = 2 \\ \vec{n} \cdot T_r &= (1, -2, 3) \cdot (0, 1, -2) = 0 - 2 - 6 = -8 \end{aligned}$$

Vrijednosti nisu jednake, što znači da pravci leže u tri različite, paralelne ravnine ($x - 2y + 3z = 6$, $x - 2y + 3z = 2$ i $x - 2y + 3z = -8$), a ne u jednoj zajedničkoj. Dakle, $\lambda = -1$ nije rješenje.

Jedina vrijednost parametra za koju sva tri pravca leže u istoj ravnini je $\boxed{\lambda = 1}$.