Matematika 1 za kemičare

pismeni ispit (22. travnja 2026.)

riješen 1. i 5. zadatak

1. Alkuin iz Yorka (ca. 735.–19. 5. 804.) bio je prijatelj i savjetnik franačkog kralja Karla Velikog. Među ostalim bio je zaslužan za prvu srednjevjekovnu reformu školstva s kojom se srednjevekovna zapadna Europa počinje „izvlačiti" iz intelektualnog propadanja uslijed uvjeta nakon pada Zapadnog Rimskog Carstva. Njemu se pripisuje i autorstvo najstarije zbirke zabavnih matematičkih zadataka na latinskom jeziku, *Propositiones ad acuendos iuvenes*, koja sadrži ukupno 53 zadatka. Riješite sljedeća tri zadatka iz *Propositiones ad acuendos iuvenes*:

(a) (12) **Zadatak o orijentalnom trgovcu**. Jedan trgovac ja na putu na Orijekn kupio 100 odabranih životinja za 100 libri. Svaku devu platio je pet linri, svakog magarca po jednu libru, a za 20 ovci platio je jednu libru. Koliko deva, magaraca i ovaca je kupio taj trgovac?

(b) (4) **Zadatak sa svinjama**. Jedan čovjek posjeduje 300 svinja. Naredio je da se sve one zakolju u tri dana, ali tako da nikoji dan ne bude ubijen paran broj svinja. Zatim je tražio da se jednako postupi s još 30 svinja. Koji neparni brojevi svinja od 300 odnosno od 30 su ubijene na svaki od ta tri dana?

(c) (4) **Zadatak o čovjeku koji susreće učenike**. Jedan čovjek sreo je neke učenike i upitao ih: „Koliko vas ima u vašoj školi¿'. Jedan od učenika mu je odgovorio: „Ne želim vam direktno odgovoriti, ali reći ću Vam kako možete odrediti taj broj. Udvostručite broj učenika, zatim taj broj utrostručite, te na kraju podijelite broj na četiri dijela. Ako pribrojite mene jednoj od četvrtina, bit će nas 100." Koliko je učenika u toj školi?

Rješenje.

(a) Neka su x, y i z traženi brojevi deva, magaraca i ovaca. Ukupno ih je kupljeno 100, dakle je

$$x + y + z = 100.$$

Nadalje, za 100 libara je kupljeno x deva po 5 libara, y magaraca po 1 libar i z ovaca po $\frac{1}{20}$ libara, dakle je

$$5x + y + \frac{1}{20}z = 100.$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge, ostaje

$$4x = \frac{19}{20}z,$$

dakle je $x = \frac{19}{80}z$ te stoga $y = 100 - x - z = 100 - \frac{99}{80}z$. Pritom, x, y i z moraju biti prirodni brojevi, dakle je z sigurno višekratnik od 80 i $100 > \frac{99}{80}z$, tj. $z < \frac{8000}{99} = 80{,}\dot{8}\dot{0}$. Dakle, $z = 80$ pa je $x = 19$ i $y = 1$: Trgovac je kupio 19 deva, 1 magarca i 80 ovaca.

(b) Zadatak ni za 300 ni za 30 svinja nema rješenja jer zbroj tri neparna broja ne može biti paran broj. Alkuin je uz to naveo i prijedlog da se ovaj zadatak zada neposlušnim učenicima ☺

(c) Ako je x traženi broj učenika, upute koje je učenik dao svode se na

$$100 = 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 2x,$$

dakle u školi je $x = 66$ učenika.

5. Mladi i nadobudni kristalograf Vladek razmatra monoklinske kristalne strukture, koja se najprikladnije opisuju koordinatama s obzirom na direktnu bazu s parametrima a, b, c, $\alpha = \gamma = 90°$, $\beta \neq 90°$. Vladek je odlučio u potpunosti izbjegavati izračune u recipročnom prostoru te je:

(a) (7) u tu svrhu prvo izračunao koordinate svih triju vektora $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$ i $\vec{c}^*$ recipročne baze s obzirom na direktnu bazu.

(b) (8) Zatim je izračunao V i, ne koristeći činjenicu da je $V^* = \frac{1}{V}$, V^*.

(c) (5) Uz to, izračunao je i kutove $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{a}^*)$, $\psi = \angle(\vec{b}, \vec{b}^*)$ i $\omega = \angle(\vec{c}, \vec{c}^*)$.

Kako bi Vladek mogao provjeriti točnost svojih računa, izračunajte i Vi sve što i on, pritom koristeći ista ograničenja koja je koristio on (računi se ne smiju provoditi u s koordinatama u recipročnom prostoru i ne smijete koristiti međusobnu recipročnost V i V^*).
Rješenje.

(a) Uočimo prvo da je zbog $\alpha = \gamma = 90°$ vektor $\vec{b}$ okomit na $\vec{a}$ i $\vec{c}$ pa je $\vec{b}* = \frac{1}{V}\,\vec{c} \times \vec{a}$ istog smjera kao $\vec{b}$. Stoga je $\boxed{\vec{b}^* = [0, y', 0] = y'\,\vec{b}}$. Pomnožimo li tu jednakost skalarno s $\vec{b}$ dobijemo $\boxed{y' = \frac{1}{b^2}}$.

Nadalje, budući da po definiciji i $\vec{a}^*$ i $\vec{c}^*$ moraju biti okomiti na $\vec{b}$, znači da će zbog $\alpha = \gamma = 90°$ oni ležati u ravnini s $\vec{a}$ i $\vec{c}$ pa im je oboma druga koordinata u direktnoj bazi 0. Ako $\boxed{\vec{a}^* = [x, 0, z] = x\,\vec{a} + z\,\vec{c}}$ pomnožimo skalarno redom s $\vec{a}$ i $\vec{c}$ dobivamo (uzevši u obzir da je $\alpha = \gamma = 90°$ pa je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$)

$$1 = x\,a^2 + z\,a\,c\,\cos\beta, \quad 0 = x\,a\,c\,\cos\beta + z\,c^2,$$

odnosno $z = -x\,\frac{a}{c}\cos\beta$ pa je $1 = x\,a^2 - x\,a^2\cos^2\beta = x\,a^2\,\sin^2\beta$, tj. $\boxed{x = \frac{1}{a^2\sin^2\beta}}$ i $\boxed{z = -\frac{\cos\beta}{a\,c\sin^2\beta}}$. Analogno, $\boxed{\vec{c}^* = [x'', 0, z''] = x''\,\vec{a} + z''\,\vec{c}}$ pomnožimo skalarno redom s $\vec{a}$ i $\vec{c}$ dobivamo

$$0 = x''\,a^2 + z''\,a\,c\,\cos\beta, \quad 1 = x''\,a\,c\,\cos\beta + z''\,c^2,$$

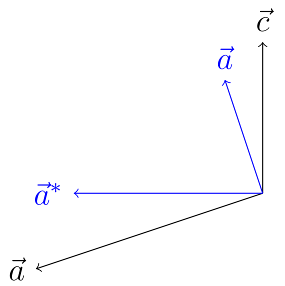
odnosno $x'' = -z''\,\frac{c}{a}\cos\beta$ pa je $1 = z''\,c^2\,\sin^2\beta$, tj. $\boxed{x'' = -\frac{\cos\beta}{a\,c\,\sin^2\beta}}$ i $\boxed{z'' = \frac{1}{c^2\sin^2\beta}}$.

(b) Jedinična ćelija je uspravna prizma s visinom b i bazom koja je paralelogram površine $a\,c\,\sin\beta$, dakle je $\boxed{V = a\,b\,c\,\sin\beta}$. U recipročnom prostoru je, zbog već navedenih razloga, $\alpha* = \gamma^* = 90°$, tj. jedinična ćelija uspravna prizma s visinom b^* i osnovicom koja je paralelogram površine $a^*\,c*\,\sin\beta^*$. Prema (a) dijelu zadatka je $b^* = |y'\,\vec{b}| = \frac{1}{b^2}\cdot b = \frac{1}{b}$. Nadalje, također koristeći (a) dio zadatka imamo:

$$a^* = |x\,\vec{a} + z\,\vec{c}| = \sqrt{x^2\,a^2 + 2xzac\cos\beta + z^2c^2} = \ldots = \frac{1}{a\,\sin\beta},$$

$$c^* = |x''\,\vec{a} + z''\,\vec{c}| = \sqrt{x''^2\,a^2 + 2x''z''ac\cos\beta + z''^2c^2} = \ldots = \frac{1}{c\sin\beta}.$$

Iako se i β^* može izračunati analogno koristeći skalarni produkt i koordinate određene u (a) dijelu zadatka, rezultat $\beta^* = 180° - \beta$ je puno lakše dobiti razmatranjem skice položaja uključenih vektora koji se svi nalaze u ravnini okomitoj na $\vec{b}$:



Sve skupa slijedi da je $V^* = a^*b^*c^*\sin\beta^*$, tj. $\boxed{V^* = \frac{1}{a\,b\,c\,\sin\beta}}$.

(c) Očito je, zbog $y' > 0$ i $\vec{b}* = y'\,\vec{b}$, kut $\boxed{\psi = 0}$. Po definiciji skalarnog produkta je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}^*}{a\,a^*} = \frac{1}{a\,a^*} = \frac{1}{a\,\frac{1}{a\sin\beta}} = \sin\beta,$$

$$\cos\omega = \frac{\vec{c}\cdot\vec{c}^*}{c\,c^*} = \frac{1}{c\,c\sin\beta} = \sin\beta,$$

dakle je $\boxed{\varphi = \omega = \arccos\sin\beta = 90° - \beta}$ (pri čemu se to moglo zaključiti i iz gornje slike).