

Vjekoslav Kovač (PMF–MO), *Alice i Bob se igraju konvergencije i pomažu Paulu*

23. 5. 2024. (četvrtak) u 12:15 u predavaonici 109 na PMF–MO

SAŽETAK. Pokazat ćemo da skup točaka

$$\left( \sum_{n \in A} \frac{1}{n}, \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1}, \sum_{n \in A} \frac{1}{n+2} \right),$$

dobiven tako da  $A$  prolazi podskupovima od  $\mathbb{N}$ , sadrži neprazni otvoreni skup. Time ćemo pozitivno odgovoriti na pitanje Erdősa i Strausa, postavljeno u knjizi Erdősa i Grahama iz 1980. godine te kao Problem #268 na web stranici *Erdos problems*:

<https://www.erdosproblems.com/268>

Dokaz ćemo svesti na slikovitu igru za dva igrača, pri čemu *Alice* pokušava podesiti da suma jedan-po-jedan odabranih članova reda asimptotike npr.  $n^{-2}$  konvergira prema zadanom broju  $x$ , dok joj *Bob* naizmjenice nastoji pokvariti limes perturbirajući članove za  $O(n^{-4})$ . Uz jednostavnu, ali ne i pohlepnu, strategiju *Alice* pobjeđuje za sve vrijednosti  $x$  iz pogodno odabranog intervala ili više-dimenzionalnog kvadra. Tijekom redukcije ćemo pak koristiti smiješne aritmetičke identitete poput:

$$\begin{aligned} \frac{1}{45^2} + \frac{1}{72^2} + \frac{1}{144^2} + \frac{1}{160^2} + \frac{1}{432^2} + \frac{1}{480^2} &= \frac{1}{48^2} + \frac{1}{60^2} + \frac{1}{120^2} + \frac{1}{720^2} + \frac{1}{1440^2} + \frac{1}{4320^2}, \\ \frac{1}{45^3} + \frac{1}{72^3} + \frac{1}{144^3} + \frac{1}{160^3} + \frac{1}{432^3} + \frac{1}{480^3} &= \frac{1}{48^3} + \frac{1}{60^3} + \frac{1}{120^3} + \frac{1}{720^3} + \frac{1}{1440^3} + \frac{1}{4320^3}. \end{aligned}$$

Predavanje će biti prikladno i studentima, jer će zahtijevati samo predznanje predmeta prve godine preddiplomskog studija.