ENTROPIJA CRNE RUPE I NOETHERIN NABOJ LORENTZ-DIFEOMORFIZMA

Lovro Basioli

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

Sažetak

Pokazati ćemo da je u formalizmu ortonormirane baze prvog ili drugog reda entropija crne rupe Noetherin naboj za kombinaciju difeomorfizama i lokalne Lorentzove simetrije s Lievom derivacijom baze. Noetherin naboj samo za difeomorfizam nije upotrebljiv jer regularna baza nemože biti invarijantna uz tok Killingovog polja na bifurkacijskoj površini. Koristiti ćemo ovaj formalizam na Lagranžijane polinomne u "wedge" produktima polja baze forme 1 i kurvature forme 2, uključujući opću relativnost, Lovelock gravitaciju i topološke članove u 4 dimenzije. Ovo je pisano kao seminarska obaveza u nastavi i inspirirano je člankom [1].

Sadržaj

1 Uvod

Entropija crnih rupa se može identificirati u prvom zakonu mehanike crnih rupa u bilo kojoj teoriji gravitacije s invarijatnosti na difeomorfizam. Ta identifikacija dolazi iz hamiltonijana H_ξ koji generira evoluciju s obzirom na tok Killingovog vektora ξ [2]. Varijacija δH_ξ je jednaka varijaciji rubnih uvjeta te iščezava jer ξ generira simetriju dinamičkih polja. Kad rubovi leže na bifurkacijskoj površini horizonta i u prostornoj beskonačnosti, implicirana relacija među varijacijama rubnih članova je prvi zakon. Iz njega se može izvesti Waldova formula za entropiju crne rupe. Ova metoda se uglavnom koristi u kontekstu gdje je geometrija prostor-vremena karakterizirana isključivo metrikom, no u nekim postavkama nužno je koristiti formalizam s geometrijom determiniranom ortonormiranom bazom (u daljnjem tekstu "Formalizam" (s velikim "F"!)) prvog ili drugog reda. Aplikacija Waldove metode u ovim postavkama povlači iščezavanje Noetherinog naboja na bifurkacijskoj površini gdje ξ iščezava jer sadrži ξ bez derivacija. Stoga ispada da iščezava i entropija crne rupe.

Problem je u uvjetu da ortonormirana baza ima iščezavajuću Lievu derivaciju s obzirom na ξ. Ovaj se uvjet ne može zadovoljiti na bifurkacijskoj površini i implicira da derivacija baze divergira na bifurkacijskoj površini tako da konekcija spina iščezava. Noetherin naboj diffeomorfizma uključuje kontrakciju iščezavajućeg Killingovog vektora sa divergirajućom konekcijom spina. Prvo ćemo pokazati kako se može izračunati konačna entropija uzimajući limes pri bifurkacijskoj površini.

Dalje, u drugom pristupu, modificiramo izvod tako da se singularno ponašanje uopće ne pojavljuje. U Formalizmu teorija je simetrična pod difeomorfizmom i lokalnim Lorentzovim transformacijama. Pokazati ćemo kako se entropija crne rupe može izvesti kao Noetherin naboj za određenu kombinaciju simetrija. Baza može biti invarijantna pod kombiniranom simetrijom pridruženoj s ξ, bez da ima singularnu derivaciju na horizontu, tako da dobivanje entropije ne zahtjeva limes. Varijacija koja odgovara ovoj simetriji je definirana Lorentz-Lievom derivacijom koja je kovarijantna pod lokalnim Lorentzovim transformacijama polja baze. Definirana je dodavajući običnoj Lievoj derivaciji vezujući član kojeg čine polje baze i njene parcijalne derivacije. Osim što omogućava nesingularne invarijantne baze na bifurkacijskoj površini, ova ideja kombinirane simetrije na Lorentz-difeomorfizam bi trebala dopustiti simetriji da bude implementirana na neparalelizibilnim manifoldima, gdje ne postoji globalna baza. Općenitije, za teorije koje sadrže polja nabijena pod baždarnom grupom G, formalizam Noetherinog naboja za simetriju pod kombiniranim difeomorfizmomima i lokalno baždarnim transformacijama su formulirane pomoću polja koja egzistiraju na glavnom G-paketu nad prostor-vremenom.

2 Entropija crne rupe kao Noetherin naboj difeomorfizma

U ovom odlomku ćemo prikazati Waldov izvod [2] koji ustanovljuje da je entropija crne rupe Noetherin naboj diffeomorfizma za Killingovo polje koje generira horizont, određen na bifurkacijskoj površini. To će postaviti stvari za upotrebu u Formalizmu i naš modificirani izvod koristeći Noetherin naboj Lorentz-difeomorfizma. Waldov izvod je primjenjiv na bilo koju teoriju invarijantnu na difeomorfizam definiranu pomoću Lagranžijana L sa n dimenzija prostor-vremena. Ako označimo sva dinamička polja sa ϕ, varijacija δL se može zapisati:

$$\delta L = E\delta\phi + \mathrm{d}\theta(\phi, \delta\phi). \tag{1}$$

Veličina E definira jednadžbu polja, $E = 0$. θ forma $(n-1)$ je konstruirana lokalno iz dinamičkih polja i njihove prve varijacije, a zove se simplektički potencijal. Antisimetrična varijacija polja θ definira simlektičku struju forma $(n-1)$:

$$\Omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \delta_1\theta(\phi, \delta_2\phi) - \delta_2\theta(\phi, \delta_1\phi). \tag{2}$$

Integrirana po površini rubnih uvjeta Ω definira simplektičku formu faznog prostora rješenja.

Varijacija uzročena difeomorfizmom generiranim vektorskim poljem ξ:

$$\delta_\xi\phi = \mathcal{L}_\xi\phi \tag{3}$$

Invarijantnost teorije na difeomorfizam znači da je lagranžijan konstruiran samo iz dinamičkih polja. U ovom slučaju, varijacija $\delta_\xi L$ prouzročena varijacijom polja $\delta_\xi\phi$ je jednaka Lievoj derivaciji lagranžijana

$$\delta_\xi L = \mathcal{L}_\xi L = \mathrm{d}\, i_\xi L. \tag{4}$$

Pošto je ovo totalna derivacija vektorska polja nad prostor-vremenom generiraju simetrije dinamike. Svakom ξ je pridružen froma $(n-1)$ koja se zove Noetherina struja, definirana kao

$$j_\xi = \theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - i_\xi L, \tag{5}$$

čija je derivacija: [2],[3],[4]

$$\mathrm{d}j_\xi = -E\mathcal{L}_\xi\phi. \tag{6}$$

Za sva vetorska polja ξ, struja j_ξ je stoga zatvorena na ljusci tj. $E = 0$. Ovo povlači [4] da, na ljusci

$$j_\xi = dQ_\xi \tag{7}$$

gdje je Q_ξ neka forma $(n-2)$ koja je konstruirana lokalno iz polja i njihovih derivacija. Integral Q_ξ po zatvorenoj $(n-2)$ površini S zove se Noetherin naboj površine S s obzirom na ξ.

U formalizmu kojeg koristi Wald, prostor riješenja jednadžbi polja je fazni prostor teorije, a na ljusci varijacija $\delta_\xi\phi$ je fazni prostor vektora toka koji odgovara 1-parametarskoj familiji difeomorfizama generiranih od ξ. Hamiltonijan H_ξ koji ovo generira je povezan sa simplektičkom formom preko Hamiltonovih jednadžbi, gdje je Σ Cauchyeva površina, a na ljusci je varijacija rubni uvjet:

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \tag{8}$$

$$= \int_\Sigma \delta\theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \mathcal{L}_\xi\theta(\phi, \delta\phi) \tag{9}$$

$$= \int_\Sigma \delta j_\xi + \delta(i_\xi L) - i_\xi \mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\, i_\xi\theta \tag{10}$$

$$= \oint_{\partial\Sigma} \delta Q_\xi - i_\xi\theta. \tag{11}$$

U drugom redu smo iskoristili (2), u trećem (5), a u četvrtom (7) i (1). Ako ξ generira simetriju polja u rješenju ϕ, onda $\mathcal{L}_\xi\phi = 0$, pa je $\delta H_\xi = 0$ pa (11) povlači identitet koji se odnosi na varijaciju površinskog člana od tog rješenja, $\oint_{\partial\Sigma} \delta Q_\xi - i_\xi\theta = 0$.

Razmatramo stacionarnu, aksisimetričnu crnu rupu sa Killingovim vektorom ξ koji generira Killingov horizont sa konačnom i konstantnom površinskom gravitacijom κ, a isčezava na bifurkacijskoj površini $\mathcal{B}$. Ako odaberemo hiperpovršinu Σ tako da su joj jedini rubovi u prostornoj beskonačnosti i na $\mathcal{B}$, onda varijacijski identitet uzima oblik

$$\oint_{\mathcal{B}} \delta Q_\xi = \oint_\infty \delta Q_\xi - i_\xi\theta, \tag{12}$$

gdje su orjentacije obiju površina inducirane vektorom okrenutim prema beskonačnosti. Može se pokazati da je desna strana jednadžbe jednaka $\delta\mathcal{E} - \Omega_H\delta\mathcal{J}$ gdje su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{J}$ asimptotski definirane ukupna energija i kutna količina gibanja, a Ω_H je kutna brzina horizonta. Da odredimo lijevu stranu primjetimo da, pošto je ξ Killingov vektor, njene derivacije više od prve mogu se zapisati pomoću ξ i njene prve derivacije te Riemannovog tenzora i njegovih derivacija. Stoga Q_ξ ovisi o ξ samo algebarski preko ξ i $\nabla\xi$. Na $\mathcal{B}$ vektor ξ isčezava te

$$\nabla_\mu\xi^\nu = \partial_\mu\xi^\nu = \kappa n_\mu^{\ \nu} \tag{13}$$

gdje je $n_{\mu\nu}$ binormalan $\mathcal{B}$ (tj. forma 2, normalizirana na -2), čiju orjentaciju determinira derivacija Killingovog vektora u (13). Stoga je sva ξ ovisnost od Q za pozadinsko rješenje sadržana u specifikaciji bifurkacijske površine i konstantne površinske gravitacije κ. Nadalje, zamjena $\nabla_\mu\xi^\nu \to \kappa n_\mu^{\ \nu}$ može se napraviti prije varijacije: veličina $a^\mu b_\nu \delta n_\mu^{\ \nu}$ isčezava osim ako je a^μ okomit, a b^ν tangencionalan na $\mathcal{B}$, no nema normal-tangencionalnih komponenti u pozadinskom tenzoru jer nebi bile invarijantne pod Killingovim tokom od ξ na $\mathcal{B}$ (koji djeluje kao potisak okomit na $\mathcal{B}$). Identitet (12) stoga dobiva oblik takozvanog prvog zakona termodinamike crnih rupa

$$T_H\delta S = \delta\mathcal{E} - \Omega_H\delta\mathcal{J} \tag{14}$$

Gdje je $T_H = \hbar\kappa/2\pi$ Hawkingova temperatura, a

$$S = \frac{2\pi}{\hbar}\oint_{\mathcal{B}} \widehat{Q}_\xi, \tag{15}$$

gdje je $\widehat{Q}_\xi$ (i za pozadinu i za varirano rješenje) dobiven od Q_ξ zamjenom $\nabla_\mu\xi_\nu \to n_{\mu\nu}$. Entropija crne rupe S je stoga proporcionalna horizonstkom Noetherinom naboju koji odgovara difeomorfizmu koji generira horizont. [5]

Da entropija nebi bila nula, čini se da Q_ξ mora ovisiti o $\nabla\xi$, pa j_ξ i stoga $\theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)$ mora ovisiti o $\nabla\nabla\xi$. Pošto Lieva derivacija tensorskog polja ovisi o $\nabla\xi$, ovo zahtjeva da $\theta(\phi, \delta\phi)$ ovisi barem o jednoj derivaciji od $\delta\phi$, pa i to da L uključuje barem druge derivacije. Pošto Formalizam prvog reda uključuje samo jednu derivaciju, taj bi formalizam izveo grešku; da entropija isčezava. Desna strana prvog zakona (14) je neovisna o formalizmu. Sad ćemo izračunati horizonstki Noetherin naboj za opću relativnost koristeći Formalizam, pronaći grešku u gornjem zaključivanju te pokazati kako izbjeći problem.

3 Difeomorfizam Noetherinog naboja za opću relativnost sa ortonormiranom bazom

U Formalizmu prvog reda, lagranžijan za opću relativnost u n dimenzija je napisan pomoću polja baze forme 1 e^a, koji je $SO(n-1,1)$ vektor te $SO(n-1,1)$ konekcije forme 1 $\omega^a{}_b$. To su nezavisne dinamičke varijable teorije. Metrika prostor-vremena je dana sa $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} e^a_\mu e^b_\nu$, gdje je η_{ab} metrika Minkovskog, a kurvatura forma 2 je definirana pomoću $R^a{}_b = \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$.

Lagranžijan za opću relativnost u n-dimenzija je funkcija baze i konekcije spina preko kurvature forme 2,

$$L(e,\omega) = \epsilon_{a\ldots bcd} e^a \wedge \ldots \wedge e^b \wedge R^{cd}. \tag{16}$$

Ovo je invarijantno na baždarenje i općenito kovarijantno. Varijacija je dana sa

$$\delta L = \delta e^a \wedge \frac{\partial L}{\partial e^a} + D\delta\omega^{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}} \tag{17}$$

$$= \delta e^a \wedge \frac{\partial L}{\partial e^a} + \delta\omega^{ab} \wedge D\frac{\partial L}{\partial R^{ab}} + \mathrm{d}\left(\delta\omega^{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}}\right). \tag{18}$$

gdje je D Lorentz kovarijantna vanjska derivacija[6] i koristili smo identitet $\delta R^{ab} = D\delta\omega^{ab}$. Jednadžbe kretanja su:

$$\epsilon_{abc..df} e^c \wedge \ldots \wedge e^d \wedge De^f = 0 \tag{19}$$

$$\epsilon_{ab\ldots cde} e^b \wedge \ldots \wedge e^c \wedge R^{de} = 0 \tag{20}$$

Ako je e^a nedegeneriran, onda jednadžba (19) implicira uvjet bez torzije $\mathrm{D}e^a = 0$, što može biti riješeno za $\omega = \omega^e$. Kad se ovo iskoristi u jednadžbi (20), to postaje ekvivalentno isčezavanju Riccijevog tenzora od $g_{\mu\nu}$, pa se dobije Einsteinova jednadžba u vakumu. Ako stavimo $\omega = \omega^e$ u lagranžijan na početku, imamo Formalizam drugog reda i (19) zasigurno vrijedi, kao identitet. Noetherina struja difeomorfizma uključuje Lievu derivaciju konekcije, $\mathcal{L}_\xi\omega$ koja je dana sa

$$\mathcal{L}_\xi\omega = i_\xi \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(i_\xi\omega) = i_\xi R + D(i_\xi\omega). \tag{21}$$

Ovdje tretiramo komponente konekcije kao kolekciju forme 1 i isto ćemo raditi sa komponentama baze. Ako relevantan manifold ne može biti pokriven samo jednim poljem baze, tj. nije paralelizabilan, ova strategija nebi bila moguća jer kod promjene lokalnog Lorentzovog baždarenja Lieva derivacija se nebi dobro transformirala. U tom slučaju, bila bi potrebna Lorentz-Lieva derivacija.

Iz (18) možemo isčitati simplektički potencijal definiran u (1),

$$\theta = \delta\omega^{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}}. \tag{22}$$

Koristeći (21), Noetherina struja difeomorfizma može biti zapisana kao

$$j_\xi = \mathrm{d}\left(i_\xi\omega^{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}}\right) - (i_\xi\omega^{ab}) \wedge D\frac{\partial L}{\partial R^{ab}} + (i_\xi R^{ab}) \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}} - i_\xi L. \tag{23}$$

Drugi član u Noetherinoj struji (23) isčezava radi ω jednadžbe gibanja. Nadalje, lagranžijan (16) ima lijepo svojstvo

$$i_\xi L = (i_\xi e^a) \wedge \frac{\partial L}{\partial e^a} + (i_\xi R^{ab}) \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}}. \tag{24}$$

iz čega slijedi da treći i četvrti član zajedno u (23) isčezavaju po e jednadžbi gibanja. Stoga možemo jednostavno isčitati Noetherin naboj forme $(n-2)$,

$$Q_\xi = i_\xi\omega^{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}}. \tag{25}$$

Primjetimo da je ovo linearno u ξ, bez derivacije ξ. Ako je ξ Killingov vektor koji generira horizont, Q_ξ isčezava kad ga evaluiramo na bifurkacijskoj površini $\mathcal{B}$ Killingovog horizonta. To bi impliciralo da entropija (15) isčezava, no tu očito nešto ne valja.

Problem nastaje jer smo pretpostavili da dinamička polja imaju isčezavajuću Lievu derivaciju s obzirom na ξ. Radi ovoga, konekcija ω^e divergira pri $\mathcal{B}$. Objasniti ćemo, iz geometrijskog gledišta, zašto divergira, ali prvo ćemo pokazati da $i_\xi\omega^e$ ima konačan limes u $\mathcal{B}$ te to iskoristiti da nađemo entropiju.

Lieva derivacija baze je dana sa

$$\mathcal{L}_\xi e^a = i_\xi \mathrm{d}e^a + \mathrm{d}i_\xi e^a = i_\xi De^a + Di_\xi e^a - i_\xi \omega^a{}_b \wedge e^b \tag{26}$$

Ako ovo stavimo da bude nula te koristeći jednadžbu polja $De^a = 0$, ili definiciju ω^e u Formalizmu drugog reda, dobivamo

$$i_\xi(\omega^e)^a{}_b = e^\mu_b D_\mu(i_\xi e^a), \tag{27}$$

gdje je e^μ_b inverzna baza. Da bi izračunali desnu stranu primjetimo da djelovanje D_μ na tenzore još nije specificirano (osim da nema torzije) pa možemo odabrati da djeluje na indexe tenzora kao beztorzijska kovarijantna derivacija ∇_μ određena metrikom. S ovim izborom imamo $\mathcal{D}_\mu e^a_\nu = 0$, gdje $\mathcal{D}_\mu$ označava cijelu derivaciju koja uključuje i prostor-vrijeme i konekcije spina. Koristeći Leibnitzovo pravilo, (27) postaje

$$i_\xi(\omega^e)^a{}_b = e^\mu_b e^a_\nu \nabla_\mu \xi^\nu. \tag{28}$$

Limes pri $\mathcal{B}$ je dan

$$\lim_{\to\mathcal{B}} i_\xi(\omega^e)^{ab} = -\kappa n^{ab}, \tag{29}$$

gdje je $n^{ab} = n^{\mu\nu}e^a_\mu e^b_\nu$. Stoga $i_\xi\omega^e$ ipak ne isčezava na bifurkacijskoj površini.

Sad vidimo (25):

$$\lim_{\to\mathcal{B}}(Q_\xi) = -\kappa n^{ab}\epsilon_{abc\ldots d}e^c \wedge \ldots \wedge e^d. \tag{30}$$

Ovo je zapravo 2κ puta element površine na $\mathcal{B}$, stoga $\oint_\mathcal{B} Q_\xi = 2\kappa A/16\pi G$, pa je entropija (15) $S_{BH} = A/4\hbar G$, Bekenstein-Hawkingova etropija.

Da bi objasnili kako i zašto konekcija divergira na bifurkacijskoj površini, koristiti ćemo jednostavnu analogiju sa dvodimenzionalnim Euklidskim prostorom. Killingovo vektorsko polje koje generira rotaciju oko ishodišta dano je s $\xi = \partial_\theta$ u polarnim koordinatama (r, θ). Ishodište je fiksna točka rotacijske izometrije, to jest ξ tu isčezava, pa je analogna bifurkacijskoj površini. Bazu koja ima isčezavajuću Lijevu derivaciju s obzirom na ovu rotaciju Killingovo polje rotira za 2π prelaskom cijelog kruga. Za krug bliži ishodištu, baza se rotira brže, jer se radijus smanjuje. U ishodištu baza se treba rotirati beskonačno brzo, što implicira da konekcija divergira. Eksplicitno, neka je baza zadana sa $e^1 = dr$ i $e^2 = rd\theta$, tako da je $\mathcal{L}_\xi e^a = 0$. Neisčezavajuće komponente konekcije su dane sa $\omega^2{}_1 = -\omega^1{}_2 = d\theta$. Norma od $d\theta$ je $(g^{\theta\theta})^{1/2} = 1/r$, tako da $d\theta$, a stoga i konekcija, divergiraju u ishodištu, iako je kontrakcija $i_\xi\omega^2{}_1 = 1$ konačna. Na bifurkacijskoj površini prostor-vremena crne rupe imamo hiperboličnu verziju ovog fenomena.

Ako želimo izbjeći pojavljivanje singularne spin konekcije u izračunu Noetherinog naboja entropije crne rupe, moramo modificirati realizaciju simetrije difeomorfizma, tako da baza može biti invarijantna na simetriju i nesingularna na bifurkacijskoj površini. Sljedeći odjeljak uvodi ovu realizaciju.

4 Lorentz-Lieva derivacija

Lieva derivacija tenzora s obzirom na vektorsko polje ξ je definirana kao promjena tenzorskog polja uz tok polja ξ. Sustav se sastoji od dualnih vektora koji se jedinstveno prenose tokom. Oni ostaju ortonormirani pod tokom Killingovog vektora, ali osjećaju Lorentzovu transformaciju. Stoga Lijeva derivacija baze s obzirom na Killingov vektor generalno nije nula. Međutim, u nekoj bazi, može se definirati modificiranu derivaciju koja uključuje kompenzirajuću lokalnu Lorentz transformaciju tako da je modificirana derivacija baze s obzirom na Killingov vektor uvijek nula. Ovo zovemo Lorentz-Lievom derivacijom. Ona se uvodila neko puta na različite načine [7],[12].

Označavati ćemo Lorentz-Lievu derivaciju sa $\mathcal{K}^e_\xi$. To je Lieva derivacija dopunjena lokalnom $SO(n-1,1)$ baždarnom transformacijom generiranom nekim λ^e_ξ koji je određen bazom e^a kako slijedi. Primjetimo prvo da je, radi isčezavanja $\mathcal{K}^e_\xi\eta^{ab}$, λ^e_ξ antisimetrično, tj. $(\lambda^e_\xi)^{(ac)} = (\lambda^e_\xi)^{(a}_b\eta^{c)b} = 0$. Sad promotrimo djelovanje $\mathcal{K}^e_\xi$ na e^a,

$$\mathcal{K}^e_\xi e^a = \mathcal{L}_\xi e^a + (\lambda^e_\xi)^a{}_b e^b \tag{31}$$

Prostor-vremenski tenzor $e_a\mathcal{K}^e_\xi e^a$ može se rastaviti na simetrični i antisimetrični dio

$$e_{a\mu}\mathcal{K}^e_\xi e^a_\nu = e_{a(\mu}\mathcal{K}^e_\xi e^a_{\nu)} + e_{a[\mu}\mathcal{K}^e_\xi e^a_{\nu]} \tag{32}$$

Radi antisimetrije $(\lambda^e_\xi)^{ab}$, simetrični dio ne ovisi o λ^e_ξ i dan je sa

$$e_{a(\mu}\mathcal{K}^e_\xi e^a_{\nu)} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}. \tag{33}$$

Lorentz-Lieva derivacija $\mathcal{K}^e_\xi e^a$ će stoga iščezavati kad je ξ Killingov vektor ako i samo ako antisimetrični dio iščezava. Antisimetrični dio

$$e_{a[\mu}\mathcal{K}^e_\xi e^a_{\nu]} = e_{a[\mu}\mathcal{L}_\xi e^a_{\nu]} + e_{a\mu}e_{b\nu}(\lambda^e_\xi)^{ab}, \tag{34}$$

može se postaviti na nulu ako odaberemo

$$(\lambda^e_\xi)^{ab} = e^{\sigma[a}\mathcal{L}_\xi e^{b]}_\sigma. \tag{35}$$

Ovaj odabir definira Lorentz-Lievu derivaciju pridruženu s e^a. Ona s obzirom na proizvoljno vektorsko polje je stoga dana sa

$$\mathcal{K}^e_\xi e^a_\mu = \frac{1}{2}e^{a\nu}\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}. \tag{36}$$

Kad je ξ^a Killingov vektor imamo $\mathcal{K}_\xi e^a = 0$.

Pronađimo eksplicitan izraz za λ^e_ξ (35) pomoću $\nabla\xi$.

$$(\lambda^e_\xi)^{ab} = e^{\mu[a}\mathcal{L}_\xi e^{b]}_\mu = e^{\mu[a}\xi^\nu\nabla_\nu e^{b]}_\mu + e^{\mu[a}(\nabla_\mu\xi^\nu)e^{b]}_\nu \tag{37}$$

$$(\lambda^e_\xi)^{ab} = i_\xi(\omega^e)^{ab} + e^{\mu[a}e^{b]}_\nu\nabla_\mu\xi^\nu. \tag{38}$$

Prvo smo ikoristili derivaciju ∇ kompatibilnu s beztorzijskom metrikom, a potom $\nabla e^b = \mathcal{D}e^b - (\omega^e)^b{}_c e^c = = -(\omega^e)^b{}_c e^c$.

Pod Lorentzovom transformacijom baze, $e^a \to L^a{}_b e^b$, veličina λ^e_ξ se transformira kao konekcija za Lievu derivaciju,

$$\lambda^{Le}_\xi = L\lambda^e_\xi L^{-1} + L\mathcal{L}_\xi L^{-1}. \tag{39}$$

Ovo čini Lorentz-Lievu derivaciju kovarijantnom pod $SO(n-1,1)$ baždarnim transformacijama. Djelovanje Lorentz-Lieve derivacije je prošireno na bilo koji Lorentzov tenzor zahtjevom da je derivacija, to jest ako vrijedi Leibnitzovo pravilo produkta. Njeno djelovanje na bilo koju $SO(n-1,1)$ konekciju definirano je tako da λ_ξ član implementira infinitezimalne baždrane transformacije konekcije,

$$\mathcal{K}^e_\xi\omega^{ab} = \mathcal{L}_\xi\omega^{ab} - D(\lambda^e_\xi)^{ab} = i_\xi R^{ab} + D(i_\xi\omega - \lambda^e_\xi)^{ab} \tag{40}$$

Ovaj rezultat će biti ključan za izračunavanje entropije pomoću Noetherinog naboja Lorentz-difeomorphizma.

Ilustrirajmo djelovanje Lorentz-Lieve derivacije u dvodimenzionalnom ravnom Euklidskom prostoru. Baza koji smo gore koristili ima iščezavajuću Lijevu derivaciju po Killingovom vektorskom polju $\xi = \partial_\theta$ za rotaciju. Stoga za tu bazu i to vektorsko polje imamo λ_ξ=0 tako da je Lorentz-Lieva derivacija zapravo samo Lieva derivacija, koja isšezava na bazi. Problem sa takvom bazom, kao što je već objašnjeno, je to što je singularitet na fiksnoj točki Killingovog toka. Sada razmatrajmo Cartezijev sustav, $e^1 = dx$ i $e^2 = dy$. Ako napišemo isti Killingov vektor kao $\xi = x\partial_y - y\partial_x$, jednostavno se vidi da $(\mathcal{L}_\xi e)^1 = -e^2$ i $(\mathcal{L}_\xi e)^2 = e^1$. Iako ovaj sustav nije rotacijski invarijantan, njegova Lorentz-Lieva derivacija mora iščezavati pošto je ξ Killingov vektor. Zaista imamo $(\lambda^e_\xi)^1{}_2 = -(\lambda^e_\xi)^2{}_1 = 1$, tako da $(\mathcal{K}^e e)^1 = (\mathcal{L}_\xi e)^1 + (\lambda^e_\xi)^1{}_2 e^2 = -e^2 + e^2 = 0$, te slično $(\mathcal{K}^e e)^2 = (\mathcal{L}_\xi e)^2 + (\lambda^e_\xi)^2{}_1 e^1 = e^1 - e^1 = 0$. Zapravo baždarna transformacija poništava konačnu Lievu derivaciju s obzirom na Killingov vektor. Slično, sustav invarijatnan na rotaciju ima neiščezavajuću Lievu derivaciju s obzirom na translacijski Killingov vektor ∂_x, ali njegova Lorentz-Lieva derivacija s obzirom na ∂_x iščezava.

5 Entropija crne rupe kao Noetherin naboj Lorentzovog difeomorfizma

Sad možemo ponoviti korake u konstrukciji Noetherinog naboja iz drugog odjeljka, sa zamjenom Lieve derivacije Lorentz-Lievom derivacijom.

$$\delta\phi = \mathcal{K}^e_\xi\phi. \tag{41}$$

Ako pretpostavimo da nam je kovarijantan lagranžijan Lorentzov skalar, njegova varijacija je ista bez obzira mijenjaju li se polja u njemu Lievom ili Lorentz-Lievom derivacijom, stoga zadovoljava $\mathcal{K}^e_\xi L = \mathcal{L}_\xi L = \mathrm{d}\, i_\xi L$.

Noetherina struja pridružena Lorentz-Lievoj simetriji je definirana sa

$$j^{\mathcal{K}}_\xi = \theta(\phi, \mathcal{K}^e_\xi\phi) - i_\xi L, \tag{42}$$

i zatvorena je na ljusci za sve ξ i stoga je vanjska derivacija Noetherinog naboja forma $(n-2)$,

$$j_\xi^{\mathcal{K}} = \mathrm{d}Q_\xi^{\mathcal{K}}. \tag{43}$$

Izvod prvog zakona mehanike crnih rupa nastavlja se kao u slučaju difeomorfizma Noetherine struje, ali ulogu Lieve derivacije preuzima Lorentz-Lieva derivacija. Konkretnije, da bi iskoristili modificirani varijacijski identitet (11), pozadinska polja sad moraju zadovoljavati $\mathcal{K}_\xi^e\phi = 0$, tako da varijacija hamiltonijana koji generira kombiniranu Lorentz-difeomorfizam simetriju iščezava. Ovo vodi na novi izraz za entropiju crne rupe,

$$S = \frac{2\pi}{\hbar}\oint_{\mathcal{B}} \widehat{Q}_\xi^{\mathcal{K}}, \tag{44}$$

gdje opet kapa na Q znači zamjenu $\nabla_\mu\xi_\nu \to n_{\mu\nu}$. Da bi ovo izračunali za konkretnu teoriju moramo prvo naći Noetherinu struju i odgovarajući oblik Noetherinog naboja. Pogledajmo kako ovo funkcionira u praksi.

6 Lovelock gravitacija

Analiza za opću relativnost u trećem odjeljku je zapravo primjenjiva općenitije na bilo koji lagranžijan $L(e,\omega)$ koji je konstruiran od produkata bazi i kurvatura formi 2, pošto lijepo svojstvo (24) i dalje drži, a ostatak izvoda je generičan. Konkretnije, izraz za Noetherin naboj (25) je primjenjiv za sve takve lagranžijane. Ti lagranžijani odgovaraju Lovelock teorijama, zajedno sa raznim topološkim članovima koji ne utječu na jednadžbe gibanja.

Usporedba izraza (40) i (21) za Lievu i Lorentz-Lievu derivaciju konekcije otkriva da samo trebamo zamijeniti $i_\xi\omega \to i_\xi\omega - \lambda_\xi^e$ u (25) da bismo dobili formu Noetherin naboj. Ovo daje

$$Q_\xi^{\mathcal{K}} = (i_\xi\omega - \lambda_\xi^e)^{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}}. \tag{45}$$

Ključna stvar je to da pošto je baza Lorentz-Lie invarijantna, a nije Lie invarijantna, može se pretpostaviti da je regularna na $\mathcal{B}$. Stoga veličina $i_\xi\omega$ iščezava na $\mathcal{B}$, a iz (38)(13) imamo

$$(\lambda_\xi^e)^{ab} = \kappa n^{ab}. \tag{46}$$

Kad ovo zamjenimo u (45), rezultat je identičan onom kojeg smo dobili koristeći limes (29) sa singularnom, Lie invarijatnom bazom. To jest

$$\widehat{Q}_\xi^{\mathcal{K}} = -\kappa n^{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial R^{ab}}, \tag{47}$$

a integracija toga daje entropiju (44).

Lagranžijan za Lovelock gravitaciju je

$$L(e,\omega) = \epsilon_{a\ldots bcd}(c_0 e^a \wedge \ldots \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + c_1 e^a \wedge \ldots \wedge e^b \wedge R^{cd} + \ldots), \tag{48}$$

gdje je c_i konstanta vezanja za član sa i faktora kurvature. Član c_0 je kozmološka konstanta, a c_1 Einstein-Hilbertov lagranžijan. Forma $Q_\xi^{\mathcal{K}}$ je dobivena iz L pomičući svaki faktor od R na prvu poziciju i mijenjajući ga u $-\kappa n^{ab}$.

Kurvature u integrandu entropije su one od konekcije ω čija je jednadžba gibanja $D\partial L/\partial R^{ab} = 0$. Jedan i jedini način da se ovo zadovolji je $De^a = 0$, to jest da je ω konekcija spina ω^e određena sa e. Za takva rješenja kurvatura koja se pojavljuje u entropiji je ona određena sa e. Ove kurvature forme 2 se sve vraćaju na $\mathcal{B}$ i njeni indexi su svi projicirani na $\mathcal{B}$ podprostor. Također, ektrinzična kurvatura bifurkacijske površine iščezava, tako da te se te kurvature reduciraju na intrinzične. Entropija je stoga određena intrinzičnom geometrijom horizonta [13].

Za Lovelock gravitaciju Formalizmi prvog i drugog reda nisu strogo identični u više od 4 dimenzija, pošto postoje rješenja u Formalizmu prvog reda za koja $\omega \neq \omega^e$. To jest, konekcija može imati torziju. Zapravo, rješenja crnih rupa s ovim svojstvom postoje i njihova entropija može uključivati torziju preko kurvature [14][15]. Međutim, svi Noetherini naboji ovih rješenja iščezavaju, uključujući entropiju. Bilo bi interesantno naći rješenja sa netrivijalnom torzijom koja pridonosi entropiji crne rupe.

7 Topološki članovi

Kao daljnju upotrebu Lorentz-difeomorfizam simetrije pogledajmo doprinose topoloških članova entropiji crne rupe u 4-dimenzionalnoj općoj relativnosti. Lagranžijan forma 4 je dan

$$L(e,\omega) = \Big(*(e^a \wedge e^b) + c_H e^a \wedge e^b + c_E *R^{ab} + c_P R^{ab} \Big) \wedge R_{ab}, \tag{49}$$

gdje je $*R^{ab} = \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}R_{cd}$. Konstante vezanja su c_H za Holstov član [3], c_E za Eulerovu invarijantu, a c_P za Pontryaginovu invarijantu. Holstov član modificira jednadžbu gibanja konekcije, ali ne utječe na njeno rješenje ω^e, a izbacuje jednadžbu gibanja baze kad je konekcija na ljusci. Eulerov i Pontryaginov član su ekzaktne forme tako da ne utječu na jednadžbe gibanja. Da su oni vanjske derivacije baždarno invarijantnih formi, mogli bi apsorbirati te forme u simplektički potencijal θ (1) i zaključiti da ni entropija ne ovisi o njima. Međutim, te forme nisu baždarno invarijantne pa ti članovi ipak mogu doprinositi entropiji crne rupe.

Entropija crne rupe (44) za lagranžijan (49) je dana sa

$$S = \frac{2\pi}{\hbar} \oint_{\mathcal{B}} n^{cd}(*e_c \wedge e_d + c_H e_c \wedge e_d + 2c_E *R_{cd} + 2c_P R_{cd}). \tag{50}$$

Einstein-Hilbertov član je proporcionalan površini $\mathcal{B}$, kao što smo vidjeli prije. Holstov član isčezava radi ortogonalnosti na $\mathcal{B}$. Eulerov član je jedan od članova u općem Lovelock lagranžijanu (48) pa uključuje jedino intrinzičnu kurvaturu površine $\mathcal{B}$. U ovom slučaju, pošto je $\mathcal{B}$ dvodimenzionalan, to doprinosi samo Riccijevom skalaru. Integral ovog člana u entropiji je topološka invarijanta proporcionalna Eulerovoj karakteristici horizonta [13]. U višim, parnim dimenzijama, slični članovi postoje, uključujući $(n-2)/2$ tenzore kurvature. Konačno, pošto ekstrinzična kurvatura isčezava, Pontryaginov član je ekzaktna forma na $\mathcal{B}$, tako da njegov integral isčezava. Da bismo vidjeli da je pull-back od $n^{cd}R_{cd}$ na $\mathcal{B}$ egzaktan, stavimo da su l^a i n^a null normale na $\mathcal{B}$ koje zadovoljavaju $l_c n^c = -2$, tako da $n^{cd} = l^{[c}n^{d]}$. Tada imamo $n^{cd}R_{cd} = l_c D^2 n^c = d(l_c Dn^c) - Dl_c \wedge Dn^c$. Pošto ekstrinzična kurvatura od $\mathcal{B}$ isčezava, null normale moraju biti paralelno transportirane po $\mathcal{B}$ u vlastite multiplete, tako da pull-back-om na $\mathcal{B}$ imamo $Dl^c = \sigma l^c$ i $Dn^c = -\sigma n^c$ za neku formu 1 σ. Stoga $Dl_c \wedge Dn^c = -2\sigma \wedge \sigma = 0$.

8 Rasprava

Iskoristili smo Lorentz-Lievu derivaciju $\mathcal{K}_\xi$ da bi definirali određenu varijaciju baze (i ostalih Lorentzovih tenzora) pod difeomorfizmom generiranim vektorskim poljem ξ. Lorentz-Lieva derivacija je definirana kombinirajući uobičajenu Lievu derivaciju sa članom koji oduzima lokalnu Lorentzovu transformaciju koju tok inducira na sustavu. Taj član ovisi o bazi i konekciji koja kovarijantizira Lievu derivaciju s obzirom na lokalne Lorentzove transformacije. Ključno svojstvo ove definicije je to da ako je ξ Killingov vektor, Lorentz-Lieva derivacija sustava isčezava. Ovo svojstvo omogućava sustavu da bude Lorentz-Lie invarijantan na bifurkacijskoj površini Killingovog horizonta, a da se "dobro" ponaša. Koristeći ovaj formalizam, pokazali smo kako Lorentz-Lie Noetherin naboj daje entropiju crne rupe. Ilustrirali smo mogućnost računanja ovom metodom računanjem entropija crnih rupa za lagranžijane koji su polinomni u "wedge" produktima baze forme 1 i kurvature forme 2.

U izračunima smo koristili lokalno Lorentzovo baždarenje, a pretpostavili smo da dovoljno velik dio prostor-vremena možemo baždariti isto. Daljnja analiza je potrebna da bi se bavili situacijama gdje nemamo takav slučaj [12].

Ograničili smo se na lagranžijane koji su Lorentzovi skalari forme n. Moglo bi biti interesantno proučiti formalizam Noetherinog naboja sa drugačijim lagranžijanima.

Konačno, analiza kombinirane difeomorfizam-baždarne Noetherine struje također može biti primjenjena kad je lokalna baždarna simetrija unutarnja, kao u Yang-Mills teoriji. Jednostavan primjer se nalazi u dodatku E1 u [16]. On koristi izraz "baždarno kovarijantna Lieva derivacija".

Literatura

[1] Ted Jacobson and Arif Mohd, *"Black hole entropy and Lorentz-diffeomorphism Noether charge"* arXiv:1507.01054v1 [gr-qc].

[2] Robert M. Wald, *"Black hole entropy is the Noether charge"* Phys.Rev. D48, 3427-3431 (1993), arXiv:gr- qc/9307038 [gr-qc].

[3] Soren Holst, *"Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action"* Phys.Rev. D53, 5966- 5969 (1996), arXiv:gr-qc/9511026 [gr-qc].

[4] R. M. Wald, *"On identically closed forms locally constructed from a field"* Journal of Mathematical Physics 31, 2378-2384 (1990).

[5] Vivek Iyer and Robert M. Wald, *"Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy"* Phys.Rev. D50, 846-864 (1994), arXiv:gr- qc/9403028 [gr-qc].

[6] Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics, Part 1: Basics* (North-Holland, 1982).

[7] Y. Kosmann, *"Dérivées de Lie des spineurs"* Annali di Matematica Pura ed Applicata 91, 317-395 (1971).

[8] P. Spindel, C. Schomblond, and M. Henneaux, *"Invariance relativiste de la théorie des champs sur un espace-temps courbe"* Bulletin de la Classe des Sciences. Académie Royale de Belgique 2, 179 (1977).

[9] M. Henneaux, *"Forme hamiltonienne des équations d'Einstein-Dirac"* Bulletin de la Classe des Sciences. Académie Royale de Belgique 4, 379 (1977).

[10] R. Jackiw and N.S. Manton, *"Symmetries and Conservation Laws in Gauge Theories"* Annals Phys. 127, 257 (1980).

[11] Yuri N. Obukhov and Guillermo F. Rubilar, *"Invariant conserved currents in gravity theories with local lorentz and diffeomorphism symmetry"* Phys. Rev. D 74, 064002 (2006).

[12] L. Fatibene and M. Francaviglia, *"General theory of Lie derivatives for Lorentz tensors"* Communications in Mathematics 19, 11-25 (2011).

[13] Ted Jacobson and Robert C. Myers, *"Black hole entropy and higher curvature interactions"* Phys.Rev.Lett. 70, 3684-3687 (1993), arXiv:hep-th/9305016 [hep-th].

[14] Fabrizio Canfora and Alex Giacomini, *"BTZ-like black holes in even dimensional Lovelock theories"* Phys.Rev. D82, 024022 (2010), arXiv:1005.0091 [gr-qc].

[15] Andrés Anabalón, Fabrizio Canfora, Alex Giacomini, and Julio Oliva, *"Black holes with gravitational hair in higher dimensions"* Phys. Rev. D 84, 084015 (2011).

[16] Samuel E. Gralla and Ted Jacobson, *"Space-time approach to force-free magnetospheres"* Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 445, 2500-2534 (2014), arXiv:1401.6159 [astro-ph.HE].