Kosa crnih rupa

Suzana Bedić

25. siječnja 2016.

Fizički odsjek, PMF, Bijenička 32, 10 000 Zagreb

Sažetak. Crne rupe su gravitacijski objekti koje predviđa opća teorija relativnosti i već se dugo smatra da imamo dokaze o njihovom postojanju. Jedno od zanimljivih svojstava crnih rupa je mali broj parametara kojima su potpuno opisane u konačnom stanju, neovisno o načinu nastajanja i materiji od koje su nastale. Taj je teoretski rezultat postao poznat kao hipoteza: „crne rupe nemaju kosu". U ovom radu ćemo ukratko proći kroz opsežan put od začetka gornje hipoteze, kroz njene dokaze i protuprimjere, do eksperimentalne provjere iste.

I.Uvod

Teoremi jedinstvenosti Israela [1] za statična i Cartera [2] za stacionarna rješenja Einsteinovih vakuumskih i elektrovakuumskih jednadžbi navele su Wheelera i Ruffinija [3] 1971. godine da predlože kako su masa, naboj i angularni moment jedini parametri kojima je crna rupa određena u konačnom, stacionarnom stanju što je postalo poznato kao hipoteza da „crne rupe nemaju kosu" (NHC[1]). Neko vrijeme tu se pretpostavku smatralo teoremom, a prve korake u njegovom dokazivanju napravio je Bekenstein [4]. U narednim godinama uslijedili su dokazi, protuprimjeri i različiti blaži oblici teorema. U ovom radu pokušat ćemo razjasniti kakvu kosu crne rupe mogu imati, pod kojim uvjetima i u kojem obliku vrijedi NHC, ako uopće vrijedi. **II.** poglavlje započet ćemo spomenutim teoremima jedinstvenosti, zatim precizno definirati kosu, te objasniti razliku sekundarne i primarne. U **III.** poglavlju izložit ćemo originalne Bekensteinove dokaze koji su potaknuli mnoge kasnije radove. U **IV.** poglavlju proći ćemo kroz protuprimjere i vidjeti na koji se način mogu zaobići Bekensteinovi i drugi dokazi, te navesti one koji idu u prilog teoremu. Kako su nalaženi dokazi i protuprimjeri tako su predlagani različiti oblici teorema o kosi crnih rupa koje ćemo izložiti u **V.** poglavlju i pobliže proučiti vrlo privlačan „crne rupe nemaju kratku kosu"[2]. Nakon teoretskih predviđanja postavlja se pitanje eksperimentalne provjere, a odgovor možda dobijemo uskoro. Naime, u tijeku je rad na projektu *Event horizon telescope* [5] o kojem ćemo pisati u **VI.** poglavlju. Konačno, završit ćemo raspravom i zaključcima u **VII.** poglavlju.

II. Teoremi jedinstvenosti i definicija kose

U [3] je navedeno da je „crna rupa ono što ostane nakon što objekt prođe potpun gravitacijski kolaps". Npr. kada se u masivnoj zvijezdi prestane odvijati fuzija moguće je gravitacijsko prevladavanje nad tlakom zvijezde. S obzirom da bi neravnotežna raspodjela čestica i polja u okolini crne rupe, do koje može doći kolapsom, rezultirala njihovom preraspodjelom zajedno sa zračenjem energije od ili prema crnoj rupi i da polja i čestice u okolini crne rupe imaju konačnu energiju, općeprihvaćena je pretpostavka da prostorvrijeme (PV) okoline crne rupe (PV izvan horizonta crne rupe),

[1] engl. *no hair conjecture*

[2] U literaturi poznat kao *„no short hair conjecture"*

s vremenom asimptotski teži stacionarnom stanju, tj. pripadno PV je invarijantno na izometrijsku grupu generiranu Killingovim vektorom koji je vremenski barem u prostornoj beskonačnosti. Killingov vektor ξ_μ zadan je Killingovom jednadžbom $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$, gdje je ∇_μ kovarijantna derivacija pridružena danoj metrici. Dvije fizikalne pretpostavke za rezultat gravitacijskog kolapsa su regularnost horizonta i okoline, te da je okolina vakuum (ili elektrovakuum-područje u kojem se nalazi elektromagnetsko polje, ali nema izvora naboja i masa). Argument je sljedeći: savršeno simetrična zvijezda rezultira kolapsom u Schwarzschildovu (ili Reissner-Nordströmovu (RN)) crnu rupu, dok u prisustvu asimetrije ne očekujemo da ona uzrokuje singularnosti dok je zvijezda još konačne gustoće, a nakon smanjivanja radijusa zvijezde ispod njenog gravitacijskog radijusa, njime je potpuno odvojena od okoline pa, dakle, ne bi trebala uzrokovati tako drastične promjene u tom području. Također, nakon dovoljno vremena očekujemo da sva materija iz okoline prijeđe horizont ili se izrači u asimptotski daleko područje.
Israel je dokazao dva teorema vezana za statične crne rupe, od kojih se jedan odnosi na vakuumska, a drugi na vakuumska rješenja u prisustvu elektromagnetskog polja. Ovdje ih izlažemo u sažetom obliku [1]:

- Među svim statičnim, asimptotski ravnim vakuumskim (elektrovakuumskim) prostorvremenima sa zatvorenim, jednostruko povezanim ekvipotencijalnim površinama $g_{00} = konst.$, Schwarzschildovo (RN) rješenje je jedino koje ima nesingularnu površinu beskonačnog crvenog pomaka $g_{00} = 0$.

Slično je za rotirajuće crne rupe, pod pretpostavkom da vrijedi kauzalnost, tj. nema zatvorenih vremenskih ili svjetlosnih krivulja, Carter dokazao [2]:

- Moguća vakuumska rješenja za aksijalno-simetričnu okolinu crne rupe čine diskretan skup kontinuiranih obitelji, od kojih svaka ovisi barem o jednom, a najviše o dva nezavisna parametra.

Robinson [6] je ubrzo dokazao da postoji samo jedna takva obitelj; Kerrova, sa $|a| < M$, gdje je M masa crne rupe, a $a = J/M$ kutna količina gibanja (zamah) po jedinici mase, definirani u asimptotskoj beskonačnosti.
Sada vidimo kako je došlo do pretpostavke da crnu rupu u konačnom stanju u potpunosti određuju njena masa, naboj i zamah. Da bi shvatili što predstavlja kosa pogledajmo kako opisujemo gravitacijsko polje proizvoljne distribucije materije. Korisno je imati na umu analogiju sa elektromagnetskim (EM) poljem. Potencijal V EM polja neke raspodjele naboja $\rho(\mathbf{r}')$ možemo razviti u multipolni razvoj u potencijama od $1/r$, tj. po multipolnim momentima EM polja:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\mathbf{r}')d\tau',$$

gdje crtane koordinate prekrivaju distribuciju naboja volumnog elementa $d\tau'$, a P_n su Legendreovi polinomi. Pritom je prvi član (n=0) monopolni doprinos, drugi (n=1) je dipolni itd.
Sličnom logikom, ali tehnički zahtjevnije, gravitacijsko polje možemo prikazati u multipolnom razvoju [7] po momentima mase i struje, analognima električnim i magnetskim momentima u elektromagnetizmu. Za ilustraciju ćemo dati primjer na Kerrovoj metrici, u kojoj spomenuti momenti odgovaraju masi M i zamah $J = ma$. Standardni oblik Kerrove metrike je u Boyer-Lindquist koordinatama (t, r, θ, ϕ):

$$g_{00} = \frac{-r^2+2mr-a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} = -1 + \frac{2m}{r} - \frac{2ma^2\cos^2\theta}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right),$$

$$g_{0\phi} = -\frac{2ma\sin\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} = -\frac{2ma\sin\theta}{r^2} + \frac{2ma^3\sin\theta\cos^2\theta}{r^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right),$$

$$g_{rr} = \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2} = 1 + \frac{2m}{r} + \frac{4m^2-a^2\sin^2\theta}{r^2} + \frac{8m^3-2ma^2(2-\cos^2\theta)}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2} = 1 + \frac{a^2-a^2\sin^2\theta}{r^2},$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{r^2+a^2}{r^2} + \frac{2m}{r}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right) = 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2ma^2\sin^2\theta}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right).$$

Usporedbom sa općim oblikom razvoja (vidi [7] str. 333 i 334) možemo iščitati doprinos pojedinog momenta (konkretno za ovaj oblik maseni monopolni, m, i strujni dipolni, ma , a transformacijom koordinata i više momente), ali još zanimljivije

je što je takav razvoj uopće moguć i u potpunosti je određen sa dva parametra (tri ako crna rupa ima naboj Q). Ukupna masa, zamah i naboj crne rupe definirani su integralom po prostornoj beskonačnosti (opet, kao Gaussov zakon u elektrostatici). Ako postoji još neko polje koje trne dovoljno sporo da pridonosi tom integralu, za potpun opis crne rupe nam je potrebna dodatna informacija i ona se naziva *kosom*.
Napomenimo da se u literaturi nekad razlikuje sekundarna i primarna kosa; kod sekundarne se dodatna informacija može prikazati preko M, J i Q, a primarna je povezana sa novim parametrom (npr. barionski broj, izospin, hipernaboj).

III. Bekensteinovi dokazi [4], [8]

Želimo provjeriti mogućnost postojanja polja u okolini statične gole crne rupe. Okolinom crne rupe $\mathcal{E}$ smatramo cijelo prostorvrijeme izvan horizonta crne rupe $\mathcal{H}$, a pod „gola crna rupa" podrazumijevamo da nema vanjskih izvora zračenja ili materije. Također pretpostavljamo da je PV asimptotski ravno, a horizont zatvorena svjetlosna hiperpovršina neodređene topologije. U cijelom radu koristimo prirodni sustav jedinica $G = c = \hbar = 1$ i konvenciju da grčki indeksi idu od 0 do 3, a latinični od 1 do 3. Statičnost nam daje uvjete na metriku: $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, $g_{0i} = 0$ (x^0 je vremenska koordinata).

Djelovanje gustoće lagranžijana $\mathcal{L}$ skupa polja ϕ_k, minimalno vezanih za gravitaciju (zakrivljenost PV-a ne ulazi direktno u lagrangian) je dano sa

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}d^4x. \tag{1}$$

Varijacijskim principom dobivamo jednadžbu gibanja polja (vidi dodatak):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu} = 0. \tag{2}$$

Množeći je s $d^4x\phi_k\sqrt{-g}$ i integrirajući po okolini crne rupe $\mathcal{E}$ dobivamo

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\phi_k\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}\phi_k\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{3}$$

Drugi član u (3) možemo napisati kao:

$$\int\limits_{\varepsilon} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}\phi_k\right)_{,\mu} d^4x - \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x = \int\limits_{\mathcal{E}} \sqrt{-g}\nabla_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\phi_k\right)d^4x - \int\limits_{\varepsilon} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x =$$

$$= \int\limits_{\partial\mathcal{E}} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\phi_k - \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x,$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti opet koristili Stokesov teorem, a $d\sigma_\mu$ je element hiperpovršine koja je rub okoline $\partial\mathcal{E}$, i pritom se $\partial\mathcal{E}$ sastoji od horizonta i beskonačnosti.
(3) prelazi u

$$\sum_k \left(\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\phi_k\sqrt{-g}d^4x + \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_{\partial\mathcal{E}} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\phi_k\right) = 0. \tag{4}$$

Definiramo $b^\mu \equiv \sum\limits_k \phi_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}$ i rastavljamo integral po rubu:

$$-\int\limits_{\mathcal{H}} b^\mu d\sigma_\mu - \int\limits_{\infty} b^\mu d\sigma_\mu + \sum_k \left(\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}\phi_k\sqrt{-g}d^4x + \int\limits_{\mathcal{E}} \phi_{k,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,\mu}}\sqrt{-g}d^4x\right) = 0. \tag{5}$$

Ideja je pokazati da prva dva člana u (5) iščezavaju, a da je izraz u zagradi jednak nuli samo ako je $\phi_k = 0$ svugdje u $\mathcal{E}$.

Sada koristimo pretpostavke da je $\mathcal{H}$ svjetlosna površina i da se radi o statičnom slučaju;

$$g_{\mu\nu}d\sigma^{\mu}d\sigma^{\nu} \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0 \Rightarrow g_{ij}d\sigma^{i}d\sigma^{j} \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0. \tag{6}$$

Koristeći Schwarz-Cauchy-Bunyakovsky (SCB) nejednakost imamo:

$$\left(g_{ij}d\sigma^{i}b^{j}\right)^{2} \leq \left(g_{ij}d\sigma^{i}d\sigma^{j}\right)\left(g_{ij}b^{i}b^{j}\right) \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0, \tag{7}$$

odakle slijedi

$$0 \stackrel{\mathcal{H}}{=} g_{ij}d\sigma^{i}b^{j} \stackrel{\mathcal{H}}{=} g_{\mu\nu}d\sigma^{\mu}b^{\nu}, \tag{8}$$

tj. prvi član jednadžbe (5) propada.

Pri tome smo pretpostavili:

1. g_{ij} je pozitivno definitna matrica u $\mathcal{E}$, a pozitivno semidefinitna na $\mathcal{H}$
Dokaz:
Asimptotska ravnost daje $g_{00} = -1$ asimptotski. g_{00} je kvadrat Killingovog vektora vremenske translacije i pretpostavljamo invarijantnost i neprekidnost u okolini crne rupe. Ako postoji površina na kojoj g_{00} mijenja predznak, zbog neprekidnosti mora biti zatvorena. $g_{00} = 0$ površina statične metrike [9] je uvijek nullpovršina, po početnoj pretpostavci nije singularna pa je ili horizont ili dio njega. Zaključujemo $g_{00} < 0$ u okolini, osim na mogućoj izoliranoj površini koja ima $g_{00} < 0$ s obje strane, a $g_{00} = 0$ na njoj. Slijedi: $g_{00} \leq 0$ na i izvan horizonta.
Nadalje, ako je dl prostorna udaljenost između dviju točaka odvojenih koordinatnim intervalom dx^{i}, ona je dobro definirana s $dl^{2} = g_{ij}dx^{i}dx^{j}$. Očito g_{ij} je pozitivno definitna matrica, osim na horizontu gdje je pozitivno semidefinitna.

2. $g_{ij}b^{i}b^{j} < \infty$ na $\mathcal{H}$; dokazujemo kasnije u konkretnom slučaju, ovisno o polju.

Pri razmatranju integrala

$$\int_{\infty} b^{\mu}d\sigma_{\mu}$$

gledamo asimptotsko ponašanje polja. Za bezmasena polja u limesu $r \to \infty$ vrijedi $\phi \propto 1/r$ iz čega slijedi

$$b^{\mu} \propto \phi\phi^{,\mu} \propto \frac{1}{r^{3}},$$

a za masivna polja je $\phi \propto \frac{e^{-mr}}{r}$ pa imamo

$$b^{\mu} \propto e^{-mr}.$$

U oba slučaja b^{μ} trne u prostornoj beskonačnosti. U vremenskoj beskonačnosti $d\sigma^{i} = 0$ i $b^{0} = 0$ uvijek, što ćemo kasnije pokazati za svako polje. Iz toga slijedi

$$\int_{\infty} b^{\mu}d\sigma_{\mu} = 0$$

.
Jednadžba (5) nam sada daje

$$\sum_{k}\int_{\mathcal{E}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k}}\phi_{k} + \phi_{k,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\right)\sqrt{-g}d^{4}x = 0. \tag{9}$$

REALNO SKALARNO POLJE

Prvi slučaj koji ćemo gledati je realno skalarno polje ψ, mase $m > 0$ i potencijala $V = m^2\psi^2$. Pripadna gustoća lagranžijana je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + V(\psi)\right).$$

Uvrštavanje

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \psi} \equiv -\frac{1}{2}V'$$

i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} = -\psi^{,\mu}$$

u (2) daje

$$\psi_{,\mu;}{}^{\mu} - \frac{1}{2}V' = \psi_{,\mu;}{}^{\mu} - m^2\psi = 0, \tag{10}$$

što je Klein-Gordonova jednadžba poopćena na zakrivljeni prostor.
Treba pokazati da je $b^2 = \psi^2\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}$ regularno na $\mathcal{H}$.
Tenzor energije i impulsa skalarnog polja dan je sa

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + V\right), \tag{11}$$

iz čega lako dobijemo neke skalarne veličine:

$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \psi_{,\mu}\psi^{,\mu} - \frac{1}{2}\cdot 4\left(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + V\right) = -\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} - 2V$

$T^2 = \left(\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}\right)^2 + 4V^2 + 4V\left(\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}\right)$

$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \left(\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}\right)^2 + V^2 + V\left(\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}\right).$

Možemo napisati:

$$\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} = \sqrt{\frac{4}{3}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^2} \tag{12}$$

$$m^2\psi^2 = -\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^2} \tag{13}$$

Iz toga što su T i $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ fizikalni skalari pa moraju biti regularni na $\mathcal{H}$ slijedi da je b^2 regularno na $\mathcal{H}$.
Možemo koristiti jednadžbu (9) i s obzirom da se radi o statičnom slučaju ($\psi_{,0} = 0$; $b^0 = -\psi\psi^{,0} = 0$) imamo:

$$\int_{\mathcal{E}} \left(g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + m^2\psi^2\right)\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{14}$$

Dokazali smo da je g_{ij} pozitivno definitna matrica u $\mathcal{E}$ iz čega izlazi da je jedini način da integral u (14) iščezava taj da ψ iščezava u cijeloj okolini crne rupe.

Ako je masa polja $m = 0$ (13) više ne osigurava omeđenost b^2 na $\mathcal{H}$. Također, (10) određuje ψ do na aditivnu konstantu. Problem rješavamo fizikalnim argumentom; ako stavimo rubni uvjet takav da ψ iščezava asimptotski, možemo interpretirati ψ^2 kao invarijantnu gustoću vjerojatnosti, koja je kao takva fizikalan skalar, regularna na $\mathcal{H}$. Spomenuta aditivna konstanta ne mora iščezavati, ali ne pojavljuje se u fizikalnim veličinama pa je neobservabilna. Dobivamo isti zaključak kao u slučaju masivnog polja, a to je da polje iščezava u $\mathcal{E}$.

KOMPLEKSNO NABIJENO SKALARNO POLJE

Slijedeći dokaz odnosi se na kompleksno, električki nabijeno skalarno polje ψ, minimalno vezano za gravitaciju i elektromagnetsko (EM) polje opisano vektorskim potencijalom A_μ (i tenzorskim poljem $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$).

Pripadna gustoća lagrangiana dana je s

$$\mathcal{L} = -\left(d^\alpha d^*_\alpha + m^2\psi\psi^*\right) - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{15}$$

gdje je e naboj polja i

$$d_\alpha = \psi_{,\alpha} - ieA_\alpha\psi = D_\alpha\psi,$$

a D_α je kovarijantna derivacija.
Pripadni tenzor energije i impulsa je

$$T_{\mu\nu} = d_\mu d^*_\nu + d^*_\mu d_\nu - \left(d^\alpha d^*_\alpha + m^2\psi\psi^*\right). \tag{16}$$

Invarijantnost teorije na baždarnu transformaciju

$$\psi \to \psi e^{ie\Lambda}, \quad A_\mu \to A_\mu + \Lambda_{,\mu} \tag{17}$$

vodi na postojanje očuvane električne struje (vidi dodatak)

$$j_\mu = ie\left(\psi d^*_\mu - \psi^* d_\mu\right). \tag{18}$$

Zbog statičnosti možemo odabrati baždarenje u kojem je $A_i = 0$ i $A_{0,0} = 0$. Također vrijedi $j^i = 0$ i

$$j^0_{,0} = 0 = g^{00}ie\left(\psi d^*_0 - \psi^* d_0\right)_{,0}. \tag{19}$$

Izjednačavajući realni i imaginarni dio izraza (19) s nula dobivamo:

$$\Re(19) = 0 \;\Rightarrow\; \psi\psi^*_{,00} = \psi^*\psi_{,00}$$

i ako pretpostavimo $\psi = const \cdot e^{i\phi(x^\mu)}$dobivamo $\phi_{,00} = 0$, tj. $\phi = \omega x^0 + \varphi$, gdje su ω i φ realne konstante. Iz

$$\Im(19) = \left(\psi\psi^*\right)_{,0} = 0$$

slijedi da je $\psi\psi^*$ neovisno o x^0.

Dakle, odabirom $\Lambda = -\frac{\left(\omega x^0 + \varphi\right)}{e}$ možemo dobiti da je ψ realno i vremenski neovisno polje, bez mjenjanja uvjeta na A_μ. Za

$$b^\mu = \sum_{\psi_k = \psi, \psi*} \psi_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{k,\mu}}$$

nam treba:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}} = -\psi^{*,\mu} - ieA^{\mu}\psi^{*} \tag{20}$$

i

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{*}_{,\mu}} = -\psi^{,\mu} - ieA^{\mu}\psi, \tag{21}$$

što daje $b^{\mu} = -\left(\psi d^{\mu *} + \psi^{*} d^{\mu}\right)$.

Slijedi

$$b^{0} = -\left(\psi\psi^{*,0} + ieA^{0}\psi\psi^{*} + \psi^{*}\psi^{,0} - ieA^{0}\psi^{*}\psi\right) = 0,$$

$$b^{i} = \left(\psi\psi^{*,i} + \psi^{*}\psi^{,i}\right) = -\left(\psi\psi^{*}\right)_{,i},$$

što je realna veličina.

Kako bi pokazali da je $b^{\mu}b_{\mu}$ omeđeno na horizontu računamo

$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = d^{\mu}d^{*}_{\mu} + d_{\mu}d^{\mu *} - 4\left(d^{\alpha}d^{*}_{\alpha} + m^{2}\psi\psi^{*}\right) = -2d^{\mu}d^{*}_{\mu} - 4m^{2}\psi\psi^{*}$

$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 2|d^{\mu}d_{\mu}|^{2} + \frac{3}{4}Td^{\mu}d^{*}_{\mu} + \frac{T^{2}}{16} + \frac{1}{2}\left(d^{\mu}d^{*}_{\mu}\right)^{2}$

$b^{\mu}b_{\mu} = \psi\psi^{*}\left(d^{\mu}d_{\mu} + d^{\mu *}d^{*}_{\mu} + 2d^{\mu}d^{*}_{\mu}\right)$

Iz zahtjeva za regularnošću $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ na horizontu $d^{\mu}d_{\mu}$ i $d^{\mu}d^{*}_{\mu}$ moraju biti omeđeni. Iz toga i regularnosti skalara T vidimo da i $\psi\psi^{*}$ mora biti regularno iz čega slijedi da je i $b^{\mu}b_{\mu}$ omeđeno na horizontu.
Istim zaključivanjem kao prije dobivamo

$$\int_{\partial\mathcal{E}} b^{\mu} d\sigma_{\mu} = 0$$

.

Uz izraze (20) i (21) računamo još

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = ieA^{\mu}\psi^{*}_{,\mu} - e^{2}A^{2}\psi^{*} - m^{2}\psi^{*}$$

i

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{*}} = -ieA_{\mu}\psi_{,\mu} - e^{2}A^{2}\psi - m^{2}\psi,$$

čime jednadžba (9) postaje

$$\begin{aligned}&\int d^{4}x\sqrt{-g}\left\{\psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} + \psi_{,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}} + \psi^{*}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{*}} + \psi^{*}_{,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{*}_{,\mu}}\right\}\\ &= \int d^{4}x\sqrt{-g}\left\{-2e^{2}A^{2}\psi^{2} - 2m^{2}\psi^{2} - 2\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} - 2ieA^{\mu}\psi\psi^{*}_{,\mu}\right\} = 0.\end{aligned}$$

Koristeći, otprije poznato, $A^i = 0$, $\psi_{,0} = \psi^*_{,0} = 0$ dobivamo:

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left\{ g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + \left[m^2 + g_{00}\left(eA^0\right)^2 \right] \psi^2 \right\} \sqrt{-g} d^4x = 0. \tag{22}$$

Ranije smo pokazali $g_{00} \leq 0$ i g_{ij} je pozitivno definitna u $\mathcal{E}$. Ako $A^0 \neq 0$ izraz pod integralom nije pozitivno definitan. Sad ćemo pokazati da u našem baždarenju za $\psi \neq 0$ mora biti $A^0 = 0$.

Vratimo se očuvanoj struji (18);

$$j^0 = -2e^2 A^0 \psi^2. \tag{23}$$

ψ^2 interpretiramo kao gustoću vjerojatnosti nabijenih skalarnih mezona, čija je invarijantna gustoća naboja $\sqrt{-j^\mu j_\mu}$. Specifični naboj polja (po mezonu), što je fizikalni skalar, dakle omeđen, je:

$$\frac{\sqrt{-j^\mu j_\mu}}{\psi^2} = \frac{\sqrt{-g_{00} j^0 j^0}}{\psi^2} = \sqrt{-g_{00}\left(2e^2A^0\right)^2}.$$

Zaključujemo da je $g_{00}\left(A^0\right)^2$ omeđeno.

Dalje računamo b^μ za EM polje:

$$b^\mu_{EM} = A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\mu}} = \frac{-1}{16\pi} A_\alpha g^{\lambda\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial A_{\alpha,\mu}} \left[A_{\nu,\lambda} - A_{\lambda,\nu}\right]\left[A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma}\right] \tag{24}$$

$$= \frac{-1}{16\pi}\left(4A_\nu A^{\nu,\mu} - 4A_\nu A^{\mu,\nu}\right) = \frac{-1}{4\pi} A_\nu F^{\mu\nu} \tag{25}$$

Lako je pokazati iz (24) da vrijedi $b^0_{EM} = 0$. Ista razmatranja kao prije daju $b^\mu b_\mu$ je regularno na $\mathcal{H}$.

Jednadžba (9) za EM polje je

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} A_\mu + A_{\mu,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} \right) \sqrt{-g} d^4x = 0. \tag{26}$$

Uvrštaštavajući

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = e^2 \psi\psi^* g^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\beta A_\alpha + A_\beta \delta^\mu_\alpha\right) = -2e^2\psi^2 A^\mu$$

i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{1}{16\pi} \cdot 4\left(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}\right) = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}$$

u (25), i korištenjem opet $A_i = 0$ i $A_{0,0} = 0$, dobivamo:

$$\int\limits_{\mathcal{E}} g_{00} \left[\frac{1}{4\pi} g_{ij} F^{0i} F^{0j} + 2\left(eA^0\right)^2 \psi^2 \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. \tag{27}$$

Ako $g_{00} \neq 0$,što je uvjet da izraz u (22) nije pozitivno definitan, mora biti $A^0 \stackrel{\mathcal{E}}{=} 0$. Zaključujemo da polje ψ iščezava u okolini crne rupe. Iz invarijantnosti na baždarnu transformaciju (17) slijedi da rezultat vrijedi u svim baždarenjima.

Komleksno neutralno skalarno polje. U slučaju kada je ψ kompleksno, neutralno skalarno polje postupak je isti kao za nabijeno, s minimalnim vezanjem polja ψ za izmišljeno polje A_μ. To polje neće doprinositi fizikalnim veličinama ($T^{\mu\nu}$ tenzoru) zbog baždarne invarijantnosti teorije, a vodi na isti rezultat.

VEKTORSKO POLJE

Analiza je vrlo slična za neutralno, realno vektorsko polje B_μ mase $m > 0$. Pripadni tenzor polja je

$$H_{\mu\nu} = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu}, \tag{28}$$

a gustoća gustoća lagranžijana

$$\mathcal{L} = -\frac{H^{\mu\nu}H_{\mu\nu}}{16\pi} - m^2\frac{B^\mu B_\mu}{8\pi}. \tag{29}$$

Ponovo imamo minimalno vezanje za gravitaciju i lako dobivamo Proca jednadžbu u zakrivljenom prostoru:

$$H^{\mu\nu}{}_{;\nu} + m^2 B^\mu = 0. \tag{30}$$

Dok je $H^{\mu\nu}$ tenzor potpuno analogan $F^{\mu\nu}$, B^μ nije baždarno invarijantan kao A^μ, nego je jednadžbom (29) potpuno određen iz $H^{\mu\nu}$, što znači da je fizikalno polje.
Izračunamo li

$$b^\mu \equiv B_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_{\nu,\mu}} = -\frac{H^{\mu\nu}B_\nu}{4\pi}$$

vidimo da je $b^0 = 0$ u statičnom slučaju, a $b_\mu b^\mu$ fizikalan skalar. Istim postupkom kao ranije dobivamo:

$$\int_{\mathcal{E}} g_{00}\left[g_{ij}H^{0i}H^{0j} + m^2\left(B^0\right)^2\right]\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{31}$$

Iz svojstava metričkih elemenata zaključujemo da H^{0i} i B^0 iščezavaju svugdje u $\mathcal{E}$.
Ako je polje bezmaseno B^μ je baždarno invarijantan, nije fizikalno polje i time ne osigurava regularnost veličine $b_\mu b^\mu$. Takvo rješenje sferno simetrične statične crne rupe sa vektorskim bezmasenim neutralnim vektorskim poljem već je poznato kao Reissner-Nordströmova crna rupa.
Za kompleksno nabijeno vektorsko polje možemo, sličnim postupkom kao za skalarno polje, bez dodatnih pretpostavki, pokazati da slijedi isti rezultat, odnosno, ako sve zbrojimo, pokazali smo da *statična, sferno simetrična crna rupa ne može imati (masivnu i bezmasenu) skalarnu i (masivnu) vektorsku kosu, nabijenu, ni neutralnu.* Da pri zaključivanju treba biti oprezan i imati na umu koje smo pretpostavke uzeli u obzir ćemo vidjeti kasnije.

Iste, 1972. godine Bekenstein je objavio „crna rupa u svom konačnom stanju ne može biti obdarena vanjskim skalarnim, vektorskim ili spin-2 mezonskim poljem". Do tada su Hartle [10] i Teitelboim [11] već razmatrali mogućnost interakcije s crnom rupom slabom interakcijom, izmjenom neutrina. Hartle je zaključio da je takva interakcija nemoguća za Kerrovu crnu rupu, a Teitelboim za sferno simetričnu crnu rupu zaključuje kako joj se ne može mjeriti leptonski broj izvana. Uz spomenuti Bekensteinov rezultat, koji ćemo u nastavku dokazati, a koji upućuje na neočuvanje barionskog broja u fizici crnih rupa jer nema načina za vanjskog opažača da izmjeri koliko je bariona prešlo horizont, crne rupe se čine vrlo jednostavne (Kerr-Newman rješenja), a $T_{\mu\nu}$ samo elektromagnetske prirode.
Opet gledamo masivno skalarno mezonsko polje, ali u okolini $\mathcal{E}$ rotirajuće stacionarne ($g_{\mu\nu,0} = 0$) crne rupe. Po Hawkingovom teoremu [12] znamo da je okolina osnosimetrična, a horizont $\mathcal{H}$ homeomorfan sferi.
Metriku okoline možemo pisati u obliku:

$$ds^2 = W\left(d\rho^2 + dz^2\right) + Adt^2 + Bd\varphi^2 + Cdtd\varphi, \tag{32}$$

gdje su W, A, B, C neovisni o t i kutu simetrije φ .
Zahtjev za kauzalnošću u okolini (odsustvo zatvorenih vremenskih i svjetlosnih krivulja) vodi na zaključak $W \geq 0$ i može iščezavati samo u izoliranim točkama $\rho - z$ ravnine.
Horizont je, po definiciji, nesingularna svjetlosna hiperpovršina normale n_μ. Zbog simetrija vrijedi $n_t = n_\varphi = 0$;

$$n_\mu n^\mu = 0 = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{\rho\rho} n_\rho n_\rho + g^{zz} n_z n_z$$

.
Dobivamo:

$$W^{-1}\left(d\rho^2 + dz^2\right) \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0. \tag{33}$$

Skalarno polje ψ mase m zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu:

$$\psi_{,\mu}{}^{;\mu} - m^2\psi = 0. \tag{34}$$

Iz simetrija ($\psi_{,t} = \psi_{,\varphi} = 0$) slijedi:

$$\psi_{,\rho}{}^{;\rho} + \psi_{,z}^{;z} - m^2\psi = 0. \tag{35}$$

Množenjem s $\psi\sqrt{-g}d^4x$ i integralom po $\mathcal{E}$ dobivamo

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left[\left(W^{-1}\psi_{,\rho}\sqrt{-g}\right)_{,\rho}\psi + \left(W^{-1}\psi_{,z}\sqrt{-g}\right)_{,z}\psi - -m^2\psi^2\sqrt{-g}\right] d^4x = 0 \tag{36}$$

Prvi član možemo napisati kao

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \left(W^{-1}\psi_{,\rho}\psi\right)_{,\rho}\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_{\mathcal{E}} \psi_{,\rho}^2 W^{-1}\sqrt{-g}d^4x = \int\limits_{\partial\mathcal{E}} W^{-1}\psi_{,\rho}\psi n_\rho d\sigma - \int\limits_{\mathcal{E}} \psi_{,\rho}^2 W^{-1}\sqrt{-g}d^4x,$$

gdje smo koristili Stokesov teorem.
n_μ je normala na rub okoline $\partial\mathcal{E}$ ($\mathcal{H}$ i beskonačnost), a $n_\mu d\sigma$ vektorski element 3D hiperpovršine $\partial\mathcal{E}$. Analogno pišemo i drugi član u (36) koja postaje

$$\int\limits_{\partial\mathcal{E}} W^{-1}\psi\left(\psi_{,\rho}n_\rho + \psi_{,z}n_z\right)d\sigma = \int\limits_{\mathcal{E}} \left[\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)W^{-1} + m^2\psi^2\right]\sqrt{-g}d^4x. \tag{37}$$

Želimo pokazati da integral po rubu $\partial\mathcal{E}$ iščezava. Da integral po beskonačnosti iščezava argumentiramo kao i u statičnom slučaju, asimptotskim ponašanjem polja. Koristeći relacije (12) i (13) možemo izraziti $\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)\psi^2 W^{-1}$ preko fizikalnih veličina, regularnih na horizontu.
SCB nejednakost nam daje

$$\left[W^{-1}\psi\left(\psi_{,\rho}n_\rho + \psi_{,z}n_z\right)\right]^2 \leq W^{-2}\psi^2\left(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,z}^2\right)\left(n_\rho^2 + n_z^2\right) \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0 \tag{38}$$

Zadnja jednakost dolazi iz (32). Ostaje nam vidjeti da je $d\sigma$ nesingularan. Moraju postojati Kruskalove koordinate u kojima je horizont nesingularan i u kojima možemo izraziti $n_\mu d\sigma$. U tim je koordinatama $d\sigma$ očito nesingularan, a kako je invarijanta slijedi da je nesingularan i u početnim koordinatama.
Iz (37) i činjenice da je $d\sigma$ nesingularan slijedi da lijeva strana jednadžbe (36) iščezava. Ako uzmemo u obzir koje smo uvjete na W tražili radi kauzalnosti, vidimo da desna strana od (36) iščezava samo ako je $\psi \stackrel{\mathcal{E}}{=} 0$.

Poopćen Bekensteinov dokaz

Primijetimo da je, između ostaloga, ključno u dosadašnjim dokazima bilo $V' \geq 0$, što ne predstavlja problem ako imamo skalarno polje koje zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu, ali se postavlja pitanje vrijedi li NHC za polja drugačijeg potencijala. Primjer polja od interesa je Higgsovo polje sa potencijalom u obliku dvostruke jame i za koje je $V' < 0$ u nekim područjima. Sada ćemo pokazati da je pozitivnost gustoće energije polja dovoljan uvjet za isključivanje skalarne, minimalno vezane kose. Pretpostavke:

-statična, asimptotski ravna, sferno simetrična metrika

-minimalno vezanje polja za gravitaciju

-nenegativna gustoća energije polja

Djelovanje multipleta skalarnih polja ψ, χ, ... minimalno vezanih za gravitaciju dano je s

$$S_{\psi,\chi,...} = -\int \mathscr{E}\left(I, J, K, ..., \psi, \chi, ...\right)\sqrt{-g}d^4x, \tag{39}$$

gdje je $\mathscr{E}$ funkcija, $I \equiv g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}$, $J \equiv g^{\alpha\beta}\chi_{,\alpha}\chi_{,\beta}$, $K \equiv g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\chi_{,\beta}$ su primjeri invarijanti složenih od prvih derivacija polja, koje odgovaraju kinetičkim članovima u lagranžijanu. Mi ćemo se u daljnjem računu, radi jednostavnosti, zadržati na dva skalarna polja (poopćenje na više je trivijalno).

Tenzor energije i impulsa koji odgovara djelovanju $S_{\psi,\chi}$ je

$$T_\alpha^{\ \beta} = -\mathscr{E}\delta_\alpha^{\ \beta} + 2\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)\psi_{,\alpha}\psi^{,\beta} + 2\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right)\chi_{,\alpha}\chi^{,\beta} + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)\left(\chi_{,\alpha}\psi^{,\beta} + \psi_{,\alpha}\chi^{,\beta}\right). \tag{40}$$

Opažač 4-brzine $U^\alpha (U^\alpha U_\alpha = -1)$ opaža lokalnu gustoću energije

$$\rho = \mathscr{E} + 2\left[\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)(\psi_{,\alpha}U^\alpha)^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right)(\chi_{,\alpha}U^\alpha)^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)\chi_{,\alpha}U^\alpha\psi_{,\beta}U^\beta\right]. \tag{41}$$

Pretpostavljamo da polje ima vremenski Killing vektor. Ako se opažač giba duž tog Killing vektora imamo $\psi_{,\alpha}U^\alpha$, $\chi_{,\alpha}U^\alpha$ i $\rho = \mathscr{E}$, iz čega slijedi

$$\mathscr{E} \geq 0. \tag{42}$$

Ako se drugi opažač giba relativno prema prvome 3-brzinom $\mathbf{v}$, u slobodnopadajućem koordinatnom sustavu, sugibajućem sa prvim opažačem vrijedi $U^0 = \gamma$ i $\mathbf{U} = \gamma\mathbf{v}$, gdje je $\gamma = \left(1 - \mathbf{v}^2\right)^{-1/2}$.

Kada $|\mathbf{v}| \to 1$, članovi u (40) koji sadrže derivacije očito dominiraju nad $\mathscr{E}$, prema tome ukupno moraju biti nenegativni. Zagradu u (40) možemo napisati kao kvadratnu formu

$$z^T Q z, \tag{43}$$

gdje je

$$z = \begin{pmatrix} \psi_{,\alpha}U^\alpha \\ \chi_{,\alpha}U^\alpha \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right) & \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right) \end{pmatrix}.$$

Uvjet da je (42) nenegativna za svaki z je ekvivalentan uvjetu da je Q pozitivno semidefinitna što znači da njene svojstvene vrijednosti i principalni minori a i b moraju biti nenegativni (vidi npr. [13]). Uvjet na svojstvene vrijednosti od Q daje

$$\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)^2 \leq 4\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right) \tag{44}$$

i (uzevši u obzir da nas ne zanima trivijalno rješenje u kojem su polja konstantna u cijelom prostoru)

$$\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right) > 0, \quad \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right) > 0. \tag{45}$$

.

Sada pretpostavljamo postojanje statičnog asimptotski ravnog rješenja Einsteinovih jednadžbi za skalarno polje. Metriku izvan horizonta možemo pisati kao

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{46}$$

gdje su ν i λ funkcije od r i trnu kao $\mathcal{O}(r^{-1})$ kada $r \to \infty$. Također $\psi = \psi(r)$ i $\chi = \chi(r)$. Horizont događaja $\mathcal{H}$ odgovara površini $r = r_h$, gdje $e^{\nu(r_h)} = 0$ (ako postoji više takvih r_h horizont odgovara vanjskom).
Zakon očuvanja kojeg zadovoljava $T_\mu^{\ \nu}$ dan s (39) je

$$T_{\mu\ ;\nu}^{\ \nu} = 0, \tag{47}$$

čija je r komponenta

$$\left[\sqrt{-g}T_r^{\ r}\right]' - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial r}T^{\alpha\beta} = 0, \tag{48}$$

gdje crtica označava $\partial/\partial r$ i

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2\sin\theta.$$

Lijeva strana (47) je jednaka

$$\sin\theta\left[e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2T_r^{\ r}\right]' - \frac{1}{2}e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2\sin\theta\left[\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}g^{rr}T_r^{\ r} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}g^{tt}T_t^{\ t} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}g^{\theta\theta}T_\theta^{\ \theta} + \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r}g^{\phi\phi}T_\phi^{\ \phi}\right].$$

Zbog statičnosti i sferne simetrije $T_\mu^{\ \nu}$ mora biti dijagonalan i $T_\theta^{\ \theta} = T_\varphi^{\ \varphi}$, što nam omogućuje da (47) pišemo u obliku

$$\left(e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2T_r^{\ r}\right)' - \frac{1}{2}e^{\frac{\lambda+\nu}{2}}r^2\left(\nu'T_t^{\ t} + \lambda'T_r^{\ r} + 4T_\theta^{\ \theta}/r\right) = 0. \tag{49}$$

Sređivanjem izraza (48) i korištenjem $T_t^{\ t} = T_\theta^{\ \theta} = -\mathscr{E}$ dobivamo

$$\left(e^{\frac{\nu}{2}}r^2T_r^{\ r}\right)' = -\left(e^{\frac{\nu}{2}}r^2\right)'\mathscr{E}. \tag{50}$$

Integrirajmo dobivenu jednadžbu po r od r_h do r. Član izvrijednjen u r_h iščezava jer $e^{\nu(r_h)} = 0$, a $T_r^{\ r}$ je konačan (mora biti kako bi fizikalna invarijanta $T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$ bila konačna na $\mathcal{H}$);

$$T_r^{\ r}(r) = -\frac{e^{\frac{\nu}{2}}}{r^2}\int_{r_h}^{r}\left(e^{\frac{\nu}{2}}r^2\right)'\mathscr{E}dr. \tag{51}$$

Primijetimo, $e^{\nu(r_h)} = 0$ i $e^{\nu(r>r_h)} > 0$ pa e^{ν}mora rasti s r blizu horizonta. Iz (51) slijedi da, uz $\mathscr{E} > 0$, dovoljno blizu horizonta mora vrijediti $T_r^{\ r} < 0$.
Nadalje, izraz (49) možemo napisati u obliku

$$\left(T_r^{\ r}\right)' = -\frac{e^{\frac{\nu}{2}}}{r^2}\left(e^{\frac{\nu}{2}}r^2\right)'\left(\mathscr{E} + T_r^{\ r}\right), \tag{52}$$

a (39) daje

$$\mathscr{E} + T_r^{\ r} = 2e^{-\lambda}\left[\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial I}\right)(\psi_{,r})^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial J}\right)(\chi_{,r})^2 + \left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial K}\right)\chi_{,r}\psi_{,r}\right]. \tag{53}$$

Ranije izvedeni uvjeti (43) i (44) daju $\mathscr{E} + T_r^{\ r} \geq 0$ svugdje, što povlači $\left(T_r^{\ r}\right)' < 0$ dovoljno blizu horizinta (vidi (51)). Kada asimptotsko ponašanje $e^{\nu/2} \to 1$ stavimo u (52) dobivamo $\left(T_r^{\ r}\right)' < 0$. Za održavanje asimptotske ravnosti $\mathscr{E}$ mora padati barem sa r^{-3} u limesu $r \to \infty$(Vidi jednadžbu (55) i pripadni komentar.). Integral u (50) tada konvergira i $|T_r^{\ r}|$

pada asimptotski sa r^{-2}, ali kako je $(T_r^{\ r})' < 0$ zaključujemo da je $T_r^{\ r}$ pozitivan i smanjuje se povećanjem r, asimptotski. Iz prijašnjih zaključaka o ponašanju $T_r^{\ r}$ blizu horizonta zaključujemo da postoji interval $[r_a, r_b]$ gdje $(T_r^{\ r})' > 0$ i da $T_r^{\ r}$ mijenja predznak na nekom r_c; $r_a > r_c > r_b$ (moguće je više takvih intervala). Sada ćemo, pomoću Einsteinovih jednadžbi, pokazati da je takav rezultat neostvariv.
Relevantne Einsteinove jednadžbe su

$$e^{-\lambda}\left(r^{-2} - r^{-1}\lambda'\right) - r^{-2} = 8\pi G T_t^{\ t} = -8\pi G \mathscr{E} \tag{54}$$

$$e^{-\lambda}\left(r^{-1}\lambda' + r^{-2}\right) - r^{-2} = 8\pi G T_r^{\ r}. \tag{55}$$

Rješavanjem prve dobivamo

$$e^{-\lambda} = 1 - 8\pi G r^{-1}\int_{r_h}^{r} \mathscr{E} r^2 dr - 2GMr^{-1}, \tag{56}$$

gdje je M konstanta integracije. Asimptotska ravnost zahtjeva $\mathscr{E} = \mathcal{O}\left(r^{-3}\right)$ asimptotski tako da $\lambda = \mathcal{O}\left(r^{-1}\right)$ asimptotski. Također zahtjevamo $e^{\lambda(r_h)} \to \infty$ tako da $2GM = r_h$ (M interpretiramo kao masu crne rupe). Iz (55) slijedi da je $e^{\lambda} \geq 1$ u cijeloj okolini. (Promjena predznaka nije moguća jer bi, uz $e^{\nu} > 0$, značila promjenu signature, što ne odgovara regularnosti rješenja.)
Drugu Einsteinovu jednadžbu pišemo kao

$$e^{-\frac{\nu}{2}} r^{-2}\left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2\right)' = \left[4\pi r G T_r^{\ r} + \frac{1}{2r}\right] e^{\lambda} + \frac{3}{2r} > 4\pi r G T_r^{\ r} e^{\lambda} + \frac{2}{r}, \tag{57}$$

gdje nejednakost dolazi od $\frac{e^{\lambda}}{2} + \frac{3}{2} > 2$. U području $[r_c, r_b]$ smo našli $T_r^{\ r} > 0$, iz čega slijedi $e^{-\frac{\nu}{2}} r^{-2}\left(e^{\frac{\nu}{2}} r^2\right)' > 0$ u tom području, a što uvršteno u (51) daje $(T_r^{\ r})' < 0$, u suprotnosti sa ranijim zaključkom.
Jedini način za izbjeći kontradikciju je prihvaćanje da su polja ψ,χ,... konstantna u okolini ε, takvih vrijednosti da sve komponente $T_\alpha^{\ \beta}$ iščezavaju, tj. (vidi jedn. (39))

$$\mathscr{E}(0, 0, 0, ..., \psi, \chi, ...) = 0. \tag{58}$$

To je upravo rješenje koje nam je služilo kao asimptotski rubni uvjet, tj. rješenje je identično Schwarzschildovo. Ako je crna rupa električki ili magnetski nabijena, a skalarna polja nisu vezana za EM, tako da vrijedi jednadžba (46), slična rasprava vodi na zaključak da crna rupa mora biti Reissner-Nordströmova.

III. Protuprimjeri NHC-a

Sada ćemo ukratko izložiti različite tipove rješenja crnih rupa sa kosom koja su ukazala na nedostatke prijašnjih dokaza, pokazala se stabilnima i/ili otvorila nova poglavlja u istraživanju crnih rupa. Detaljnije informacije se mogu naći u navedenoj literaturi.

KONFORMNA KOSA

Prvi protuprimjer NHC-a dao je sam Bekenstein [14] u obliku bezmasenog konformnog skalarnog polja. Konformna transformacija je promjena skale $g_{\mu\nu}(x) \to \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$, gdje x označava sve koordinate, a $\Omega(x)$ je neka funkcija. Polje ψ je konformno invarijantno ako zadovoljava jednadžbu

$$\psi_{,\alpha}^{\ ;\alpha} - \frac{R}{6}\psi = 0, \tag{59}$$

gdje je R skalar zakrivljenosti. Djelovanje konformnog polja ψ i ostalih polja, čija je gustoća lagrangiana $\mathcal{L}$, je

$$S = \int \left[\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{2}\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} - \xi \frac{R}{2}\psi^2 + \mathcal{L} \right] \sqrt{-g} d^4x, \tag{60}$$

gdje je

$$\xi = \frac{n-2}{4(n-1)} \overset{n=4}{\equiv} \frac{1}{6} \equiv \xi_c$$

za konformno vezanje skalarnog polja za gravitaciju u četiri dimenzije ($\xi = 0$ odgovara ranije promatranom minimalnom vezanju).
Varijacijskim principom djelovanja (60) po ψ dobivamo (59), a varijacijom po $g^{\mu\nu}$ Einsteinove jednadžbe.
Bekenstein je u tom radu dokazao teorem po kojem za svako rješenje Einsteinovih jednadžbi sa običnim skalarnim poljem postoje dva rješenja Einsteinovih jednadžbi sa konformnim skalarnim poljem. U nastavku daje statično sferno-simetrično rješenje vezanih Einstein-Maxwell-konformno-skalarno-polje jednadžbi sa horizontom regularne geometrije i parametrizirano električnim nabojem e i skalarnim nabojem q. Linijski element, EM polje i skalarno polje tog rješenja su redom:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \\ F_{\mu\nu} &= er^{-2}\left(\delta^r_\mu \delta^t_\nu - \delta^t_\mu \delta^r_\nu\right) \\ \psi &= q\left(r - M\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{61}$$

gdje je $M = \sqrt{e^2 - \frac{4\pi q^2}{3}}$.

Dano rješenje je prvo smatrano nefizikalnim (osim za $q = 0$) jer skalarno polje divergira na $\mathcal{H}$, no Bekenstein je [15], proučavanjem putanja testnih čestica u PV-u danim s (60), pokazao da je $\mathcal{H}$ fizikalno regularan jer vrijedi:

i) beskonačnost polja ψ nije povezana sa beskonačno visokom (odbojnom) potencijalnom barijerom (kao beskonačnost EM potencijala u $r = 0$ za odgovarajući predznak naboja)
ii) ne postoje putanje testnih čestica (slobodnih, električki ili skalarno nabijenih) koje završavaju na $\mathcal{H}$ u konačnom vlastitom vremenu
iii) plimne akceleracije (gravitacijskog, skalarnog ili EM porijekla) su omeđene na $\mathcal{H}$

S obzirom da je za potpun opis rješenja potreban dodatan parametar, skalarni naboj, rezultat je crna rupa sa (sekundarnom jer ima isti broj parametara kao RN obitelj) kosom.

Bronnikov i Kireyev [16] su, međutim, pokazali da je to rješenje nestabilno pod radijalnim perturbacijama. Kvantnomehaničke fluktuacije se ne mogu isključiti pa će s vremenom ostati obično Schwarzschildovo rješenje. Iz tog se razloga sva nađena rješenja a koja se pokažu nestabilnima uglavnom odbacuju kao astrofizički nerelevantna, a tako je i Bekensteinova konformna kosa odbačena, ali je pokazala da postoje načini zaobilaženja NHC-a i potaknula nove potrage za kosom.
Prirodno se postavlja pitanje postoji li analogno rješenje za $\xi \neq 1/6$ i poopćenje Bekensteinove crne rupe na proizvoljan broj dimenzija prostorvremena n i više je radova objavljeno na tu temu. Klimčik je npr. dokazao [17] da Bekensteinova crna rupa ne postoji za $n = 3$ i za $n > 4$. Mayo i Bekenstein [18] su pokazali da:

- statična sferno-simetrična nabijena ili neutralna crna rupa ne može imati kosu u obliku neutralnog skalarnog polja (također je uključeno poopćenje na više polja) sa standardnim kinetičkim djelovanjem, pozitivno-semidefinitnog potencijala samointerakcije i neminimalnog vezanja za gravitaciju sa $\xi < 0$ i $\xi \geq 1/2$

- nabijena sferno-simetrična crna rupa ne može imati kosu u obliku nabijenog skalarnog polja sa standardnim kinetičkim djelovanjem, regularnim potencijalom samointerakcije i $\xi \neq 0$.

Još neke radove navodimo pod [19], ali zasad se pokazalo da je Bekensteinova konformna crna rupa jedino rješenje tog tipa, neovisno o vrijednosti veličine ξ, broju dimenzija i potencijalu samointerakcije.

NEABELOVA KOSA

Obojene crne rupe. Već se u prvim Bekensteinovim dokazima dalo naslutiti da NHC neće vrijediti za bezmasena baždarna polja sa ne-Abelovom samointerakcijom. Yasskin [20] daje rješenje Kerrove geometrije sa prisustvom konstantnog skalarnog polja sa spontanim lomom simetrije. U istom radu daje metodu kojom se za svako rješenje Einstein-Maxwell jednadžbi može konstruirati skup rješenja vezanih Einstein-Yang-Mills (EYM) jednadžbi bilo koje baždarne grupe sa invarijantnom metrikom, gdje su baždarna polja bezmaseni vektorski mezoni, a baždarni naboji očuvane veličine kao izospin i hipernaboj. Međutim, jedina takva poznata baždarna polja imaju masu različitu od nula. Taj bi se problem mogao riješiti Higgsovim mehanizmom generiranja mase spontanim lomom simetrije. Greene, Mathur i O'Neil [21] su numeričkim rješavanjem Einstanove gravitacije vezane za SU(2) baždarnu teoriju i Higgsov dublet standardnog modela (EYMH) našli sferno-simetrično rješenje sa netrivijalnim baždarnim i Higgsovim poljem izvan horizonta koje trne eksponencijalno daleko od crne rupe. Napominju da je to rješenje vrlo vjerojatno nestabilno, kao što je nestabilno i rješenje sa masivnim vektorskim poljem ne-Abelove interakcije (ENAP[3]) koje također daju. Ovdje izlažemo njihovu kratku analizu iz koje se vidi kako uopće ne-abelovska priroda interakcije može zaobići prijašnje NHC dokaze na primjeru SU(2) baždarne teorije.

Lagranžijan SU(2) baždarne teorije se može pisati

$$\mathcal{L}_{EYM} = -\frac{1}{16\pi}\left[|F|^2\right] = -\frac{1}{16\pi}\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F^{(i)}_{\mu\nu}F^{(i)}_{\rho\sigma}\right],$$

gdje je i izospinski indeks,

$$F^{(i)}_{\mu\nu} = A^{(i)}_{\nu,\mu} - A^{(i)}_{\mu,\nu} + g\epsilon_{ijk}A^{(j)}_{\mu}A^{(k)}_{\nu}$$

i g je konstanta baždarnog vezanja. Jednadžba koja odgovara Bekensteinovoj jednadžbi (25) je

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{E}} d^4x\sqrt{-g}\left[-8\pi\mathcal{L}_{EYM} + \frac{1}{2}\left(g\epsilon_{ijk}A^{(j)}_{\mu}A^{(k)}_{\nu}\right)F^{(i)\mu\nu}\right] = 0. \tag{62}$$

Ako gledamo statična polja i, zbog jednostavnosti, pretpostavimo $A^{(i)}_0 = 0$ slijedi $|F|^2$, ali drugi član u (61) nije nužno pozitivan pa je očito da postojanje takvog nelinearnog člana može voditi na zaobilaženje Bekensteinovog dokaza. Netrivijalna rješenja sistema EYM su nazvana *obojene crne rupe*[4]. Ta su rješenja parametrizirana cijelim brojem n koji odgovara broju čvorova YM potencijala i sva su nestabilna na radijalne linearne perturbacije. Rješenja SU(N) EYM teoriju su, između ostalih, tražili Künzle [22] i Kleihaus, Kunz i Sood [23] koji navode statična, sferno-simetrična, asimptotski ravna rješenja sa YM kosom i pokazuju da, za razliku od Einstein-Maxwell rješenja, SU(2) EYM statična rješenja nisu nužno sferno, već samo osnosimetrična. Volkov i Straumann [24] su našli rješenje SU(2) kose pridružene sporo rotirajućoj crnoj rupi i zanimljivo je da je statički limes neutralan, dok je naboj rotirajućeg rješenja proporcionalan kutnoj količini gibanja.

Poznate se *dilatonske obojene crne rupe* [25] sličnih svojstava kao obične obojene, a pripadni integral djelovanja se javlja u različitim teorijama ujedinjenja.

Skyrme crne rupe. Druga zanimljiva klasa rješenja proizlazi iz nelinearnih $\sigma-$modela u interakciji sa gravitacijskim poljem. Najjednostavniji nelinearni $\sigma-$model sa stabilnim solitonskim rješenjima dao je Skyrme [26], a pripadna rješenja crnih rupa mogu se naći u [27]. Barem je jedno rješenje sa Skyrme kosom stabilno.

Proca crne rupe. Proca polje je masivno YM polje koje interagira sa gravitacijom. Već smo spomenuli rješenje koje su našli Greene, Mathur i O'Neill, a o kosi u obliku Proca polja pišu također Torii, Maeda i Tachizawa [28] u nekoliko radova i raspravljaju o njenoj stabilnosti.

Crne rupe u monopolima. Monopoli su prvo razmatrani u okviru Maxwellove elektrodinamike, a zatim su nađeni monopoli kao rješenja YMH teorije i rješenja koja opisuju gravitacijske monopole. Ne-Abelova crna rupa može postojati ako je gravitacijski radijus manji od veličine monopola. [29]

[3] *Einstein-non-Abelian-Proca*

[4] generatori SU(3) simetrije odgovaraju gluonima, nosiocima „naboja boje”

Za pregled ne-Abelovih crnih rupa i rasprave o stabilnosti vidi npr. [30]

KVANTNA KOSA

Aksionske crne rupe. Prva poznata stabilna dinamička, ne-baždarna kosa je aksionska kosa. Rotacija crne rupe djeluje kao izvor aksionske kose, a kod nerotirajuće crne rupe tu ulogu ima postojanje i električnog i magnetskog naboja [31]. Aksionska kvantna kosa je primjer kose koja ne modificira vakuumsku metriku okoline, tj. njen tenzor energije i impulsa iščezava, ali je ukupni aksionski naboj različit od nula i u principu bi se mogao mjeriti nelokalnim eksperimentima kvantne prirode. [32]

Crne rupe sa diskretnim baždarnim nabojima. Kvantna kosa povezana sa diskretnim baždarnim nabojima se može pojaviti kada lom lokalno kontinuirane baždarne simetrije ostavi neslomljenom diskretnu podgrupu baždarne grupe. Naboji neslomljene simetrije mogu ostati vezani za crnu rupu, a u principu se mogu mjeriti Aharonov-Bohm tipom raspršenja kozmičke strune na topološki stabilnoj struni vezanoj uz naboj neslomljene simetrije. [33]

Zanimljivo je da rotacija crne rupe može podržati minimalno vezano kompleksno **skalarno polje** [34] i to rješenje nema statičan limes. Zaobilaženje odgovarajućeg Bekensteinovog dokaza je omogućeno činjenicom da skalarno polje ne nasljeđuje simetrije metrike. Pripadno rješenje, osim M i J, ima očuvani kontinuirani Noetherov naboj, mjeru skalarne kose.

$\boxed{\mathbf{\Lambda \neq 0}}$

Iako nije posebno naglašeno, svi do sada spomenuti dokazi i kose odnose se na asimptotski ravna rješenja. Eksperimentalna vrijednost kozmološke konstante Λ je približno $2 \cdot 10^{-35} s^{-2}$ [35][5] i svemir u kojem živimo nije asimptotski ravan, već negativno zakrivljen. Koliko je opravdano zahtjevati asimptotsku ravnost rješenja i što možemo reći o kosi crnih rupa u svemiru sa $\Lambda \neq 0$?

$\mathbf{\Lambda < 0.}$ Winstanley [36] proučava mogućnost prisustva klasičnog skalarnog polja ne-minimalno vezanog za gravitaciju oko četverodimenzionalne crne rupe i pritom uzima $\Lambda \neq 0$ i da polje nije samointeragirajuće. Dokazuje da nema takvog rješenja osim za $\Lambda < 0$ i ξ (parametar vezanja za skalar zakrivljenosti) pozitivan, za koje postoje rješenja i neka od njih su stabilna. Dobar pregled rješenja i literature vezane za anti-de Sitter (adS) prostor, koji odgovara $\Lambda < 0$, daje Winstanley u [37]. Za razliku od SU(N) asimptotski ravnih rješenja, koja su sva nestabilna, odgovarajuća rješenja u adS prostoru su stabilna. Kako asimptotski adS rješenja ne očekujemo opaziti u svemiru, zanimanje za njih je često vezano za korespodenciju anti-de Sitter prostora i konformne teorije polja (adS/CFT korespodencija[6]), koja se primjenjuje npr. u teoriji struna, nuklearnoj fizici i teoriji supravodiča. [38]

$\mathbf{\Lambda > 0.}$ Koliko nam je poznato za crne rupe prostorvremena sa pozitivnom kozmološkom konstantom nisu nađena stabilna rješenja sa kosom, već su, kako ćemo vidjeti u idućem poglavlju, dokazani neki oblici NHC-a, iako nema dokaza za sasvim općenita svojstva kose.

IV. Što je sa pretpostavkom da crne rupe nemaju kosu?

Teško je u zaokruženom obliku dati odgovor na pitanje održivosti pretpostavke da crne rupe nemaju kosu. Kao što smo vidjeli ono je jako osjetljivo na pretpostavke o simetriji rješenja, nasljeđivanju simetrije, masi polja i načinu na koji je generirana, o samointerakciji, zahtjevu za regularnošću, pretpostavljenom asimptotskom ponašanju, vezanjem za gravitaciju i druga polja i stabilnošću. Možemo reći da u najopćenitijem smislu NHC ne vrijedi jer, kako smo vidjeli, poznati su razni tipovi kose od kojih su neke stabilne, ali svakako nije moguća prisutnost bilo kakvog polja u okolini crne rupe, već ta polja moraju poštivati određene uvjete. Treba naglasiti i da analiza nužno uključuje mnoga pojednostavljenja

[5] Noviji eksperimentalni podaci se slažu sa navedenom vrijednošću.
[6] poznato i kao baždarno-gravitacijska dualnost

kao npr. da u okolini nema izvora raznih polja, što vodi i na stroge simetrije problema, koje u prirodi nisu u potpunosti ostvarene, kao i da se ne uzima u obzir mogućnost prisutnosti drugih crnih rupa.
Također je i pitanje smatramo li kosom svako rješenje za čiji nam potpuni opis treba više od mase, zamaha i naboja crne rupe ili samo ona za čiji nam opis treba više parametara od broja parametara u RN/Kerr-Newman obitelji rješenja. Pod postojanjem kose većina autora podrazumijeva slučaj kada metrika prostorvremena i konfiguracija drugih polja stacionarne crne rupe nije potpuno određena očuvanim nabojima definiranima u asimptotskoj beskonačnosti.

Kada se ispostavilo da je, prva nađena, konformna kosa nestabilna stabilnost se počela zahtjevati kao uvjet jer je inače kosa, kako je rečeno u [39], „perika koja lako otpadne". S druge strane, konformno rješenje je ukazalo na to da neregularnost polja ne znači nužno nefizikalnost rješenja.
Najviše je dokaza u prilog pretpostavci dano za skalarna polja i za statična, sferno-simetrična rješenja. Navedimo samo neke predložene oblike teorema:

- Statično, sferno-simetrično prostorvrijeme sa crnom rupom regularnog horizonta, koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe sa poljima materije dane proizvoljnim brojem skalarnih polja, sa pozitivno-semidefinitnim potencijalom, minimalno vezanih za gravitaciju i koja zadovoljavaju pripadne statične jednadžbe gibanja je nužno trivijalno, tj. prostorvrijeme je Schwarzschildovo, a skalarna polja su konstantna i odgovaraju nuli potencijala. [40] Kako smo vidjeli, treba dodati i pretpostavku da polja zadovoljavaju sfernu simetriju.

- Statična, sferno-simetrična crna rupa ne može imati kosu u obliku multipleta (ili jednog) neutralnih skalarnih polja minimalno vezanih za gravitaciju, čija je gustoća energije nenegativna. [41]

- Jedino asimptotski ravno, statično, sferno-simetrično rješenje sistema određenog djelovanjem

  $$S = \int \left[f\left(\phi\right)R - h\left(\phi\right)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]\sqrt{-g}d^4x, \qquad f\left(\phi\right) > 0,\, h\left(\phi\right),$$

  gdje je ϕ svugdje konačno neutralno skalarno polje je Schwarzschildovo rješenje. [42]

- Za svaku vrijednost parametra neminimalnog vezanja polja za gravitaciju ξ, samogravitacijsko skalarno polje kvartične samointerakcije neizbježno iščezava iz okoline statične asimptotski ravne crne rupe. [43]

  Pripadno djelovanje je

  $$S = \frac{1}{2}\int \left[\frac{R}{8\pi} - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{\lambda}{2}\phi^4 - \xi R\phi^2\right]\sqrt{-g}d^4x.$$

- Za djelovanje

  $$S = \int \left[\frac{1}{16\pi}\left(R - 2\Lambda\right) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V\left(\phi\right)\right],$$

  gdje je Λ kozmološka konstanta, a ϕ realno skalarno polje potencijala V, ne postoji regularno sferno-simetrično statično rješenje ako je polje bezmaseno ili je konveksnog potencijala. [40]

- Statična, sferno-simetrična crna supa sa $\Lambda > 0$ ne može podržati skalarna polja konveksnog potencijala i masivno Proca vektorsko polje između korizonta događaja i kozmološkog horizonta. [44]

- U stacionarnom, osnosimetričnom de Sitter ($\Lambda > 0$) prostorvremenu crnoj rupi ne može biti pridruženo masivno polje spina 1/2 ili 2. [45]

- Statične, sferno-simetrične crne supe u prostoru sa $\Lambda > 0$ ne mogu imati stabilnu samointeragirajuću skalarnu kosu konformalno vezanu za gravitaciju. [46]

Iz atrofizičkog pogleda se javlja prigovor [47] da su crne rupe u svemiru često dio binarnog sustava ili povezane s akrecijskim diskom i/ili mlazovima materije zbog čega su iskrivljene plimnim silama pa na njih nisu primjenjiva razna razmatranja vezana za kosu. Gürlebeck predlaže da NHC vrijedi u obliku:

- Doprinos iskrivljene crne rupe multipolnim momentima koji opisuju gravitacijsko polje blizu beskonačnosti je jednako doprinosu Schwarzshildove crne rupe.

„Kratka" kosa. Sudarsky [41] je u analizi YM kose došao do rezultata da se ona nužno prostire dalje od $3/2r_H$, gdje je r_H radijus horizonta i predlaže daljnju istragu o univerzalnosti tog rezultata. Vezano za to, Núñez, Quevedo i Sudarsky objavljuju rad [48] koji započinje ovakvom fizikalnom raspravom:
U nađenim stabilnim kosama je ključan nelinearan karakter materije; interakcija između dijela polja koje bi bilo uvučeno u crnu rupu i dijela koje bi bilo izračeno omogućava stabilnost kose iz čega možemo pretpostaviti da dužina kose ima graničnu donju vrijednost dužine, prostiranja od crne rupe. Ističu da je teorem kojeg dokazuju, a kojeg ćemo sada izložiti, primjenjiv na sve do tada nađene kose. Slabi energijski uvjet (WEC^7) je zahtjev $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ za svaki vremenski vektor t^μ.

Teorem: Ako je

$$ds^2 = -e^{-2\delta}\mu dt^2 + \mu^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

linijski element asimptotski ravnog prostorvremena sferno-simetrične crne rupe, koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe sa poljima materije za koje vrijedi WEC, čiji je trag tenzora energije i impulsa nepozitivan i čija gustoća energije raste prema nuli brže od r^{-4}, onda je funkcija

$$\mathcal{W} \equiv e^{-\delta}r^4 T_r^r$$

negativno-semidefinitna na $\mathcal{H}$ i pada između r_H i r_0, gdje je $r_0 > \frac{3}{2}r_H$ i za neki $r > r_0$ počinje rasti prema asimptotskoj vrijednosti nula.

Teorem kaže da asimptotsko ponašanje polja ne može početi prije nekog

$$r > r_0 > \frac{3}{2}r_H,$$

tj. da se kosa mora protezati barem do te vrijednosti. Dakle, predlažu da NHC vrijedi u obliku **„crne rupe nemaju kratku kosu".**

Godinu kasnije Brown i Husain [49] pokazuju da ta pretpostavka o kratkoj kosi ne vrijedi u najširem smislu jer su našli sferno-simetrično, statično rješenje crne rupe sa pridruženim anizotropnim poljem proizvoljne duljine prostiranja od crne rupe. Fizikalna slika je da materija može opstati u jakom gravitacijskom polju bez kolapsa samo ako su joj unutarnji tlakovi dovoljno veliki, što se može pojaviti u anizotropnom fluidu. Kao i u kasnijem radu Herdeiroa i Radua, kojeg smo već spominjali, ključna je razlika simetrije metrike i polja materije.
Stabilnost argumentiraju pokazujući da dobiveno rješenje može nastati sferno-simetričnim gravitacijskim kolapsom, iako napominju da bi prihvatljiviji argument bio kad bi uspjeli pokazati da početna perturbacija ne raste beskonačno s vremenom.
Ključno u zaobilaženju ranijeg teorema o kratkoj kosi je da pretpostavka o nepozitivnosti traga tenzora energije i impulsa ne vrijedi za anizotropni fluid.

Hod u [50] ispituje moguću dužinu kose oko rotirajućih crnih rupa i zaključuje da mogu imati ekstremno kratku stacionarnu konfiguraciju skalarnih polja. Konkretno, radi se o analitičkom rješenju Klein-Gordon-Kerr-Newman valne jednadžbe za linearizirano skalarno polje u režimu velikih masa polja.
U [51] postavlja pitanje fizikalnog objašnjenja za poznatu donju granicu dužine kose $3/2r_H$ i ističe da fotonsfera, granica područja gdje može postojati stacionarna, sferno-simetrična konfiguracija i gdje ne može, Schwarzschildove crne rupe odgovara točno toj vrijednosti. Dokazuje teorem koji kaže da asimptotsko ponašanje polja ne može početi prije fotonsfere. Pritom ima iste pretpostavke kao u [48], a funkcija analogna funkciji

$$\mathcal{W} = e^{-\delta}r^4 T_r^r$$

[7] *weak energy condition*

je $r^4 T^r_r$. Uz malo drugačiju definiciju dužine kose dokazuje da mora biti dulja od radijusa fotonsfere r_γ.
Također daje dokaz u prilog prijedlogu da uvijek vrijedi:

$$\frac{M - m(r_\gamma)}{m(r_\gamma) - m(r_H)} \geq 1,$$

gdje je M ukupna masa definirana u asimptotskoj beskonačnosti, $M - m(r_\gamma)$ je masa kose izvan fotonsfere, a $m(r_\gamma) - m(r_H)$ je masa kose između horizonta i fotonsfere. Drugim riječima, područje izvan fotonsfere uvijek sadrži barem 50% ukupne mase kose. Analitički provjerava predloženu granicu za velike EYM crne rupe, za koje je taj omjer 2.08, i numerički za EYM, EYMH, EYMD, ENAP i ES crne rupe i sve ju poštuju.

V. Eksperimentalna provjera

Koristeći teleskope koji mjere u području infracrvenih valnih duljina, analizirane su orbite zvijezda naše galaksije vrlo blizu centra Sagitarius A* (Sgr A*) i jak su dokaz da se radi o masivnoj crnoj rupi od $\sim 4 \cdot 10^6 M_\odot$, gdje je $M_\odot$ masa Sunca. Teoretsko predviđanje je da velika zakrivljenost prostorvremena blizu crne rupe stvara tamnu sjenu okruženu sjajnim fotonskim prstenom i oblik sjene je približno kružan. Opažanje sjene i njenog oblika je novi test za opću teoriju relativnosti. Dijametar sjene je proporcionalan masi crne rupe i skoro neovisan o njenom zamahu. 2000. godine Falcke, Melia i Agol [52] pokazuju da je sjena od Sgr A* observabilna u submilimetarskim valnim duljinama, pod pretpostavkom da je akrecijski disk optički tanak u tom dijelu spektra. Dakle, kažu, postoje realna očekivanja slikanja horizonta od Sgr A* u narednih nekoliko godina.

Zbog obrnute proporcionalnosti kutne razlučivosti i dijametra teleskopa, za razlučivanje sjene od Sgr A* potreban je teleskop dijametra približnog Zemljinom dijametru. *Event Horizon Telescope* (EHT) je projekt u kojem se koristi (VLBI[8]) tehnika istovremenog prikupljanja podataka iz teleskopa diljem Zemlje i efektivno se ostvaruje teleskop dijametra jednakog razmaku najudaljenijih teleskopa. Početni podaci su potvrdili očekivanje da se radi o masivnoj crnoj rupi, a daljnjim prikupljanjem i analizom podataka rade se precizne slike u različitim (pretežno submilimetarskim) valnim duljinama.

Osim Sgr A* EHT ispituje i M87, izvor radio mlazova, i očekuju se odgovori na neka pitanja vezana za kosu crnih rupa jer se sjena „ćelave" crne rupe razlikuje od sjene u prisustvu kose. U [53] autori se okreću Kerrovoj crnoj rupi sa skalarnom kosom čija se sjena drastično razlikuje od sjene Kerrove crne rupe. Općenito predviđanje je manja sjena od one Kerrove istih asimptotskih naboja.
Posljedica pretpostavke da crne rupe nemaju kosu je da se svi viši multipolni momenti gravitacijskog polja (sjetimo se rasprave iz II.poglavlja) neutralne crne rupe mogu izraziti kao funkcije M i J. Konkretno, kvadrupolni moment q_2, najniži koji će se mjeriti, zadovoljava

$$q_2 = -\frac{J^2}{M}.$$

Observabilna provjera ove relacije je još jedno ispitivanje postojanja kose oko Sgr A*.
Razni predloženi testovi NHC-a se mogu grupirati u dvije grupe: ispitivanje svojstava prostorvremena u području daleko i blizu od horizonta. Primjer za prvu grupu je precizno opažanje orbitalne dinamike zvijezda oko Sgr A* . Testovi svojstava jakog gravitacijskog polja crne rupe se temelje na gravitacijskim valovima generiranima upadanjem objekata zvjezdanih masa u crnu rupu ili na EM zračenju emitiranom iz akrecijskog diska. U modeliranju se uglavnom modificira Kerrova metrika parametarskim deformacijama.
Pod [5] navodimo još neke od radova na temu testiranja teoretskih predviđanja o poljima oko crne rupe.

VI. Zaključak

Priča o kosi crnih rupa počinje teoremima jedinstvenosti stacionarnih i statičnih prostorvremena crnih rupa u vakuumu ili u prisutnosti elektromagnetskog polja, koji su prvi ukazali na jednostavnost konačnog stanja gravitacijskog kolapsa, pa smo i mi krenuli od njih. Mnogi su dokazi objavljeni u prilog potvrde te jednostavnosti i prvi od njih su Bekensteinovi, koje smo izložili u II. poglavlju. Kako smo vidjeli, priča ne staje na tome jer su ti dokazi temeljeni na određenim

[8] *Very Large Baseline Interferometry*

pretpostavkama o poljima i simetriji rješenja. U ovom smo radu dali pregled puteva zaobilaženja prvih dokaza i tako pronađenih tipova kosa. Kao što smo vidjeli, teško je formulirati općenit teorem o nepostojanju kose, već je najbolje što možemo tražiti odgovor unutar okvira konkretnog slučaja. Na kraju smo se dotakli teme eksperimentalne provjere i ukazali na globalni projekt *Event horizon telescope* kojim se, proučavanjem centara dviju galaksiva, Mliječne staze i M87, očekuje testiranje opće teorije relativnosti u području vrlo visokih gravitacijskih polja i ispitivanje kose oko rotirajuće crne rupe.

Zahvale

Zahvaljujem svom mentoru, doc. dr. sc. Ivici Smoliću, na uvodu u temu, opsežnoj literaturi koju je sa mnom podijelio, usmjeravanju istraživanja i odgovorima na mnoga pitanja.

DODATAK

Varijacijski princip kaže da djelovanje

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}d^4x$$

poprima ekstremalnu vrijednost u klasičnoj konfiguraciji polja (u rješenju pripadnih jednadžbi polja), odnosno, ne mijenja se u prvom redu variranja polja oko takve konfiguracije. Pripadna promjena polja i njihovih derivacija je

$$\phi_k \to \phi_k + \delta\phi_k, \quad \phi_{k,\mu} \to \phi_{k,\mu} + \delta\phi_{k,\mu}.$$

Transformacija gustoće lagranžijana pritom je

$$\mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu}) \to \mathcal{L}(\phi_k + \delta\phi_k, \phi_{k,\mu} + \delta\phi_{k,\mu}) = \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}(\delta\phi_k)_{,\mu} \tag{63}$$

.
Slijedi:

$$\delta S = \delta\int \mathcal{L}(\phi_k, \phi_{k,\mu})\sqrt{-g}d^4x = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}(\delta\phi_k)_{,\mu}\right]\sqrt{-g}d^4x = 0.$$

Drugi član u zagradi je jednak

$$\begin{aligned}
&\int\limits_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\delta\phi_k\right)_{,\mu}\sqrt{-g}d^4x - \int\limits_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi_k\sqrt{-g}d^4x \\
&= \int\limits_{\partial V} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\delta\phi_k\sqrt{\gamma}d^3x - \int\limits_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi_k\sqrt{-g}d^4x,
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili Stokesov teorem:

$$\int\limits_V \nabla_\mu V^\mu\sqrt{|g|}d^nx = \int\limits_{\partial V} n_\mu V^\mu\sqrt{|\gamma|}d^{n-1}x,$$

gdje je ∂V rub volumena V, a γ inducirana metrika na njemu.
Integral po rubu ∂V propada jer varijacije polja trnu u beskonačnosti po kojoj se integrira. Dobivamo:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}\right]\delta\phi_k\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{64}$$

Funkcionalna derivacija $\frac{\delta S}{\delta\phi_k}$ je definirana tako da zadovoljava

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta\phi_k}\delta\phi_k d^4x = 0$$

u kritičnoj točki i iz toga dobivamo jednadžbu gibanja polja

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu} = 0 \tag{65}$$

Pogledajmo kako invarijantnost lagranžijana vodi na postojanje očuvane struje: iz (63) imamo

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\delta\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}(\delta\phi_k)_{,\mu}. \tag{66}$$

Ako u (66) uvrstimo (vidi (64))

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k} \to \frac{\delta S}{\delta\phi_k} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\right)_{,\mu}$$

dobivamo

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\delta\phi_k\right)_{,\mu} + \frac{\delta S}{\delta\phi_k}\delta\phi_k.$$

Izraz $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{k,\mu}}\delta\phi_k \equiv j^\mu$ se naziva Noetherina struja. I vidimo da vrijedi

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

tj. Noetherina struja je očuvana, ako vrijedi jednadžba gibanja polja (65) i lagranžijan je invarijantan na infinitezimalnu transformaciju.

LITERATURA:

[1] W. Israel, Phys. Rev. 164, 1776 (1967); Commun. Math. Phys. 8, 245 (1968)
[2] B. Carter, Phys. Rev. Lett. 26, 331 (1971)
[3] R. Ruffini i J. A. Wheeler, Phys. Today 24, 30 (1971)
[4] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. Lett. 28, 452 (1972)
[5] http://vlbiimaging.csail.mit.edu/
C. M. Will, The Astro. J. 674, L25 (2008)
A. E. Broderick i dr., arXiv: astro-ph.HE/1311.5564v1 (2013)
[6] D.C. Robinson, Phys. Rev. Lett 34, 905 (1975)
[7] K. S. Thorne, Rev. of Modern Phys. 52, No. 2 (1980)
[8] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 5, 1239 (1972); Phys. Rev. D 51, R6608 (1995)
[9] C.V. Vishveshwara, J. Math. Phys. ~, 1339 (1968)
[10] J. B. Hartle, Phys. Rev. D 3, 2938 (1971)
[11] C. Teitelboim, Lett. Al Nuovo Cim. 3, 397 (1972)
[12] S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 25, 152 (1972)
[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Positive-definite_matrix#Quadratic_forms
[14] J. D. Bekenstein, Annals of Physics 82, 535 (1974)
[15] J. D. Bekenstein, Annals of Physics 91, 75 (1975)
[16] K. A. Bronnikov i Y. N. Kireyev, Phys. Lett. A 67, 95 (1978)
[17] C. Klimčik, J. Math. Phys. 34, 1914 (1993)
[18] A. E. Mayo i J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 54, 5059 (1996)
[19] T. Zannias, arXiv: gr-qc/9409030v1 (1994)
A.Saa, Phys. Rev. D 53, 7377 (1996)
E. Ayon-Beato, arXiv: gr-qc/0212050v1 (2002)
[20] P. B. Yasskin, Phys. Rev. D 12, 2212 (1975)
[21] B. R. Greene, S. D. Mathur, C. M. O'Neill, Phys. Rev. D 47, 2242 (1993)
[22] H. P. Künzle, Class. Quantum Grav. 8, 2283 (1991); Commun. Math. Phys. 162, 371 (1994)
[23] B. Kleihaus, J. Kunz i A. Sood, arXiv: hep-th/9705179v2 (1997)
[24] M. S. Volkov i N. Straumann, Phys. Rev. Lett 79, 1428 (1997)
[25] E. E. Donetz i D. V. Gal'tsov, Phys. Lett. B, 302, 411 (1993)
T. Torii i K. Maeda, Phys. Rev. D 48, 1643 (1993);
G. Lavrelashvili i D. Maison, Nucl. Phys. B 410, 407 (1993)
[26] T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. London A 260, 127 (1961)
[27] H. C. Luckock i I. Moss, Phys. Lett B 176, 314 (1986);
S. Droz, M. Heusler i N. Straumann, Phys. Lett. B 268, 371 (1991)
P. Bizon i T. Chmaj, Phys. Lett. B 297, 55 (1992)
[28] T. Torri, K. Maeda i T. Tachizawa, Phys. Rev. D 51, 1510 (1995)
[29] K. Lee, V. P. Nair i E. J. Weinberg, Phys. Rev D 45, 2751 (1992)
S. A. Ridgway i E. J. Weinberg, Phys. Rev D 51, 638 (1995)
E. J. Weinberg, arXiv: gr-qc/0106030v2 (2001)
[30] G. Lavrelashvili, arXiv: gr-qc/3701049v1 (1997)
T. Tachizawa, K. Maeda i T. Torii, Phys. Rev. D 51, 4054 (1995);
V. P. Frolov i I. D. Novikov, *Black hole physics,* Klumer Academic, Dordrecht (1998)
[31] B. A. Cambell, N. Kaloper i K. A. Olive, Phys. Lett B 263, 364 (1991)
K. Lee i E. J. Weinberg, Phys. Rev. D 44, 3159 (1991)
[32] M. J. Bowick i dr., Phys. Rev. Lett. 61, 2823 (1988)
[33] S. Coleman, J. Preskill i F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 67, 1975 (1991)
Nucl. Phys. B 378, 175 (1992)
L. M. Krauss i F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 62, 1221 (1989)
[34] C. A. R. Herdeiro i E. Radu, phys. Rev. Lett. 112, 221101 (2014)
[35] M. Carmeli, arXiv: astro-ph/0111259v1 (2001)
[36] E. Winstanley, Class. Quantum Grav. 22, 2233 (2005)
[37] E. Winstanley, arXiv: gr-qc/0801.0527v1 (2008)
[38] https://en.wikipedia.org/wiki/AdS/CFT_correspondence#Applications_to_quantum_gravity;

J. Fernández-Gracia i B. Fiol, arXiv: hep-th/0906.2353 (2009)
C. Martinez i R. Troncoso, Phys. Rev. D 74, 064007 (2006);
T. Hertog, Phys. Rev. D 74, 084008 (2006)
[39] T. Torii, K. Maeda i M. Narita, arXiv: gr-qc/9809036v1 (1998)
[40] D. Sudarsky, Class. Quantum Grav. 12, 579 (1994)
[41] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 51, R6608 (1995)
[42] A. Saa, J. of Math.Phys. 37, 2346 (1996)
[43] E. Ayón-Beato, , arXiv: gr-qc/0212050v1 (2002)
[44] S. Bhattacharya, A. Lahiri, Phys. Rev. Lett. 99, 201101 (2007)
[45] S. Bhattacharya, A. Lahiri, Phys. Rev. D 86, 084038 (2012)
[46] G. Dotti, R. Gleiser, C. Martínez, Phys. Rev. D 77, 104035 (2008)
[47] N. Gürlebeck, Phys. Rev. Lett. 114, 151102 (2015)
[48] D. Núñez, H. Quevedo i D. Sudarsky, Phys. Rev. Lett. 76, 571 (1996)
[49] J. D. Brown i V. Husain, Int. J. Mod. Phys. D 6, 563 (1997)
[50] S. Hod, Phys. Lett. B 739, 196 (2014)
[51] S. Hod, Phys. Rev. D 84, 124030 (2011)
[52] H. Falcke, F. Melia, E. Agol, J. of Astro. 528, L13 (2000)
[53] V. P. Cunha, A. R. Herdeiro, E. Radu, H. F. Rúnarsson, arXiv: gr-qr/1509.00021v2 (2015)