Korelacijska funkcija tenzora energije i impulsa i anomalija traga

Clay James Grewcoe, F-3817
Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb

Sažetak

U ovom radu bavit ćemo se korelacijskim funkcijama tenzora energije-impulsa u konformalnoj teoriji polja. Prvo, uvodimo konformalnu transformaciju tj. simetriju, i zatim Noetherin teorem kao ishodišnu točku sačuvanja. Također, definiramo tenzor energije i impulsa u kanonskom smislu i u okviru formalizma integrala po stazama, te zatim promatramo posljedice konformalne invarijantnosti teorije na trag korelacijske funkcije tj. anomaliju traga u kvantnoj teoriji u odnosu na klasičnu. Ovu anomaliju proučavamo u 2D koristeći diferencijalnu i dimenzionalnu regularizaciju i na kraju u 4D prostoru.

1 Uvod

1.1 Konformalna grupa

Neka je $g_{\mu\nu}$ metrički tenzor d dimenzionalnog prostora, tj. prostor-vremena. Konformalna je transformacija po definiciji invertibilno preslikavanje $x \to x'$ koje metriku ostavlja invarijantnom do na lokalni faktor skale,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \quad . \tag{1.1}$$

Skup konformalnih transformacija čini grupu, s Poincaréovom grupom kao podgrupom (očito jer za nju vrijedi $\Lambda(x) = 1$). Promotrimo sad metriku pri općoj infinitezimalnoj transformaciji koordinata $x'^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x)$,

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \epsilon^\alpha)(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta} \\ &= g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \quad . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Želimo li da transformacija bude konformalna (tj. da (1.1) bude zadovoljeno) mora vrijediti,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu &= f(x) g_{\mu\nu} \quad / \cdot g^{\mu\nu} \\ \Rightarrow 2\partial_\mu \epsilon^\mu = f(x) d \quad &\Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{d}\partial_\mu \epsilon^\mu \\ \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu &= \frac{2}{d}\partial_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Manipulacijom ovog izraza može se pokazati da su (konačne) transformacije sadržane u konformalnoj grupi sljedeće,

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + a^\mu && \text{translacija} \\ x'^\mu &= \alpha x^\mu && \text{dilatacija} \\ x'^\mu &= M^\mu_\nu x^\nu && \text{rotacija} \\ x'^\mu &= \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b\cdot x + b^2 x^2} && \text{SCT}^1 \end{aligned}$$

[1]specijalna konformalna transformacija

1.2 Noetherin teorem

Akcija je definirana kao:

$$S = \int d^d x \, \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad ,$$

stoga je njezina transformacija,

$$\begin{aligned} S' &= \int d^d x \, \mathcal{L}(\Phi'(x), \partial_\mu \Phi'(x)) \\ &= \int d^d x' \, \mathcal{L}(\mathcal{F}(\Phi(x)), \partial_\mu \mathcal{F}(\Phi(x))) \\ &= \int d^d x \left|\frac{\partial \boldsymbol{x'}}{\partial \boldsymbol{x}}\right| \mathcal{L}\left(\mathcal{F}(\Phi(x)), \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right)\partial_\nu \mathcal{F}(\Phi(x))\right) \; . \end{aligned}$$

Pogledajmo sad opću infinitezimalnu transformaciju klasičnog polja ($\Phi'(x') = \mathcal{F}(\Phi(x))$),

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \tag{1.4}$$

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \tag{1.5}$$

jacobijan možemo dobiti derivacijom (1.4)

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}\right)$$

koristeći identitet

$$\det(1 + A) \approx 1 + \mathrm{Tr} A, \quad A \ll$$

slijedi jacobijan i njegov inverz

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{x'}}{\partial \boldsymbol{x}}\right| = 1 + \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu - \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}\right) \quad . \tag{1.7}$$

Uvrštavanjem (1.4)-(1.7) u izraz za transformiranu akciju slijedi za varijaciju S:

$$\delta S = -\int d^d x \, j^\mu_a \partial_\mu \omega_a \tag{1.8}$$

gdje je

$$j^\mu_a = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\partial_\nu \Phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right)\frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_a} \quad . \tag{1.9}$$

Parcijalnom integracijom slijedi

$$\delta S = \int d^d x \, \partial_\mu j^\mu_a \, \omega_a \quad , \tag{1.10}$$

ako su jednadžbe gibanja zadovoljene onda akcija mora biti invarijantna na transformaciju tj. varijacija akcije mora iščezavati pa je stoga

$$\partial_\mu j^\mu_a = 0$$

struja j^μ_a sačuvana. Ta struja je kanonska pa je ona definirana do na sve promjene koje ne narušavaju sačuvanje. Treba također napomenuti da je Noetherin teorem klasičan te da on prelazi u Wardove identitete za kvantna polja (sačuvanje vrijedi za korelacijske funkcije fizikalnih stanja).

1.3 Tenzor energije i impulsa

Primijenimo sada Noetherin teorem na specifičnu transformaciju infinitezimalne translacije $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$, vrijedi (1.4)

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon^\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon^\nu} = 0$$

dakle,

$$T^{\mu\nu}_c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\partial^\nu \Phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{1.11}$$

ovo je kanonski tenzor energije i impulsa. Kao i prije, imamo slobodu u izboru tog tenzora pa dodavanjem divergencije još jednog tenzora (tzv. Belinfante tenzora) antisimetričnog u prva dva indeksa ne mijenjamo sačuvanje ni Wardove identitete, a možemo taj tenzor tako odabrati da ukupni novi tenzor energije-impulsa bude simetričan ($T^{\mu\nu}_B = T^{\nu\mu}_B$). Može se pokazati eksplicitni izraz za Belinfante tenzor,

$$B^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} S^{\rho\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Phi)} S^{\mu\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \Phi)} S^{\mu\nu}\right)\Phi \tag{1.12}$$

Vratimo se sada na relaciju (1.8) i pogledajmo lokalno ovisnu infinitezimalnu translaciju $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ u prostoru proizvoljne metrike (ne nužno ravnom kao do sada) i pretpostavimo da je sačuvani tenzor simetričan,

$$\begin{aligned}\delta S &= -\int d^d x \, T^{\mu\nu}\partial_\mu \epsilon_\nu \\ &= -\frac{1}{2}\int d^d x \, T^{\mu\nu}(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \\ &\overset{(1.2)}{=} \frac{1}{2}\int d^d x \, T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad .\end{aligned} \tag{1.13}$$

U kvantnom slučaju imamo vakuumski funkcional dan izrazom,

$$Z[g] = \int [d\Phi]_g \exp - S[\Phi, g] \equiv \exp - W[g] \ ,$$

pri infinitezimalnoj transformaciji metrike dobivamo,

$$\begin{aligned} Z[g+\delta g] &= \int [d\Phi]_{g+\delta g} \exp - S[\Phi, g+\delta g] \\ &= \int [d\Phi]_g \left(1 - \frac{1}{2}\int d^d x \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}\right) \\ &\quad \cdot \exp - S[\Phi, g] \\ &= Z[g] - \frac{1}{2}\int d^d x \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}\langle T^{\mu\nu}\rangle \quad , \end{aligned}$$

pri čemu je uzeto u obzir da $T^{\mu\nu}$ sadrži i varijaciju integralne mjere i varijaciju akcije. Slijedi trivijalno,

$$\delta W[g] = -\frac{\delta Z[g]}{Z[g]} = \frac{1}{2}\int d^d x \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}\langle T^{\mu\nu}\rangle \ ,$$

to jest

$$\langle T^{\mu\nu}(x)\rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta W[g]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad . \tag{1.14}$$

1.4 Difeomorfizam

Def. [3] Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ mnogostrukosti, a f preslikavanje $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, ako je f bijekcija i beskonačno derivabilna ($\in C^\infty$) te posjeduje C^∞ inverz, onda se f naziva difeomorfizam.

Difeomorfizmi su važni u okvirima opće teorije relativnosti zbog toga što je to jedina teorija polja invarijantna na (aktivne) difeo-transformacije.

2 Trag tenzora energije i impulsa u klasičnoj teoriji polja

Pogledajmo sada relaciju(1.13) u okvirima konformalnih transformacija(1.3)

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2}\int d^d x \, T^{\mu\nu}(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \\ &= -\frac{1}{2}\int d^d x \, T^{\mu\nu}\frac{2}{d}\partial_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{d}\int d^d x \, T^\mu{}_\mu \partial_\nu \epsilon^\nu \quad .\end{aligned} \tag{2.1}$$

Slijedi da iščezavanje traga tenzora energije i impulsa implicira invarijantnost akcije na konformalne transformacije. Obrat ne vrijedi jer $\epsilon^\mu(x)$ nije proizvoljna funkcija. Ako teorija posjeduje invarijantnost skale, tenzor se može konstruirati tako da mu trag iščezava, kao što ga se moglo simetrizirati u teoriji s rotacijskom simetrijom.
Neka je dimenzija prostora neke opće teorije polja sa

simetrijom skale $d > 2$, slijedi za infinitezimalnu dilataciju,

$$x'^\mu = (1+\alpha)x^\mu$$
$$\mathcal{F}(\Phi) = (1-\alpha\Delta)\Phi \quad ,$$

uvrštavajući to u (1.9) slijedi

$$\begin{aligned} j_D^\mu &= -\mathcal{L}x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}x^\nu\partial_\nu\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\Delta\Phi \\ &= T^\mu_{c\,\nu}x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\Delta\Phi \end{aligned}$$

gdje smo prepoznali kanonski tenzor definiran u (1.11). Nadalje,

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_D^\mu &= T^\mu_{c\,\mu} + \Delta\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

jer je to sačuvana struja. Definiramo virijal

$$V^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\nu\Phi)}(\eta^{\mu\nu}\Delta + iS^{\mu\nu})\Phi \tag{2.3}$$

gdje je $S^{\mu\nu}$ spinski operator polja. Pretpostavimo da se virijal može napisati kao divergencija novog tenzora $V^\mu = \partial_\alpha\sigma^{\alpha\mu}$, definirajmo još dva tenzora:

$$\begin{aligned} \sigma_+^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\nu\mu}) \\ X^{\lambda\rho\mu\nu} &= \frac{2}{d-2}\Big(\eta^{\lambda\rho}\sigma_+^{\mu\nu} - \eta^{\lambda\mu}\sigma_+^{\rho\nu} - \eta^{\lambda\nu}\sigma_+^{\mu\rho} + \eta^{\mu\nu}\sigma_+^{\lambda\rho} \\ &\quad - \frac{1}{d-1}(\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu} - \eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\nu})\sigma^\alpha_{+\,\alpha}\Big) \quad . \end{aligned}$$

Sada imamo novi tenzor energije i impulsa,

$$T^{\mu\nu} = T_c^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu} \quad . \tag{2.4}$$

Lako se pokaže da dodatni član $X^{\lambda\rho\mu\nu}$ ne utječe na jednadžbu sačuvanja jer $\partial_\mu\partial_\lambda\partial_\rho X^{\lambda\rho\mu\nu} = 0$, također on čuva simetričnost tenzora energije i impulsa jer antisimetrični dio,

$$X^{\lambda\rho\mu\nu} = \frac{2}{(d-1)(d-2)}\sigma^\alpha_{+\,\alpha}(\eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\rho\mu})\,,$$

očito iščezava pri kontrakciji s $\partial_\lambda\partial_\rho$.

$$\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho X^{\lambda\rho\mu}{}_\mu = \partial_\mu V^\mu \tag{2.5}$$

$$\partial_\rho B^{\rho\mu}{}_\mu = i\partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi)}S^{\mu\rho}\Phi\right) \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem (2.3), (2.5) i (2.6) u (2.2) slijedi

$$T^\mu{}_\mu = \partial_\mu j_D^\mu \tag{2.7}$$

dakle, ako je struja sačuvana, onda trag iščezava. Treba naglasiti da to ne vrijedi za dimenzije prostora manje od 3, što se vidi iz definicije $X^{\lambda\rho\mu\nu}$, međutim lako se pokaže na partikularnim primjerima da se tenzor energije i impulsa može konstruirati tako da mu trag iščezava. Za slobodno skalarno polje je npr. to posebno jednostavno jer je već Belinfante tenzor energije i impulsa ($T_B^{\mu\nu}$) iščezavajućeg traga. Također je pokazano da Poincaréova simetrija i simetrija skale osiguravaju ukupnu konformalnu invarijantnost teorije.

3 Tenzor energije i impulsa u kvantnoj teoriji polja u 2D

3.1 Anomalija traga

Počnimo od korelacijske funkcije dvije točke, tzv. Schwingerove funkcije

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} = \langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle$$

ona, zbog Lorentzove simetrije, nasljeđuje simetričnost $T^{\mu\nu}$ u indeksima:

$$S_{\mu\nu\rho\sigma} = S_{\nu\mu\rho\sigma} = S_{\mu\nu\sigma\rho} = S_{\nu\mu\sigma\rho} \quad .$$

Translacijska simetrija sugerira,

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) &= \langle T_{\mu\nu}(0)T_{\rho\sigma}(-x)\rangle \\ &= \langle T_{\rho\sigma}(-x)T_{\mu\nu}(0)\rangle \\ &= S_{\rho\sigma\mu\nu}(-x) \quad , \end{aligned}$$

a invarijantnost na transformacije skale (iz akcije se vidi da dimenzija skaliranja mora biti 2)

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(\lambda x) = \lambda^{-4}S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \quad .$$

Kombinirajući te simetrije i Wardov identitet

$$\partial^\mu\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = \partial^\mu S_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \tag{3.1}$$

dobijemo najopćenitiji oblik Schwingerove funkcije

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = \frac{c/2}{x^4}(I_{\mu\rho}(x)I_{\nu\sigma}(x) + I_{\nu\rho}(x)I_{\mu\sigma}(x) \\ - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje je

$$I_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - 2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \quad .$$

Trivijalno se vidi

$$\begin{aligned} S^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu &= \langle T^\mu{}_\mu(x)T^\nu{}_\nu(0)\rangle \\ &= \frac{c}{2x^4}\Big(\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} + 8\tfrac{x^\mu x_\mu x^\nu x_\nu}{x^4} + \eta^\mu{}_\mu\eta^\nu{}_\nu \\ &\quad - 2\eta^{\mu\nu}\tfrac{x_\mu x_\nu}{x^2} - 2\eta_{\mu\nu}\tfrac{x^\mu x^\nu}{x^2} \\ &\quad - 2\eta^\mu{}_\nu\tfrac{x_\mu x^\nu}{x^2} - 2\eta_\mu{}^\nu\tfrac{x^\mu x_\nu}{x^2}\Big) \\ &= \frac{c}{2x^4}(d + 8 + d - d^2 - 2 - 2 - 2 - 2) \overset{2D}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad &\langle T^\mu{}_\mu\rangle = 0 \quad . \end{aligned}$$

Međutim, u ovom razmatranju nije uzeta u obzir UV divergencija kad $x \to 0$. Stoga, prvo treba regularizirati Schwingerovu funkciju. Ovdje će to biti napravljeno tzv. diferencijalnom regularizacijom.

Diferencijalna regularizacija radi se tako da, ako imamo funkciju $F(x)$ koju želimo regularizirati, moramo naći najopćenitiju funkciju $f(x)$ takvu da je $\mathcal{D}f(x) = F(x)$ i $\mathcal{D}f$ ima dobro definiran Fourierov transformat, gdje je $\mathcal{D}$ opći diferencijalni operator koji odgovara simetrijama teorije.

U našem slučaju,

$$\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}f(x) \quad ,$$

simetrije nam nalažu Wardov identitet

$$\partial^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial^\rho \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial^\sigma \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$

i simetrija, i prva dva, i zadnja dva indeksa, drugim riječima diferencijalni operator mora biti transverzalan i simetričan u $\mu \leftrightarrow \nu$ i $\rho \leftrightarrow \sigma$. Najopćenitiji diferencijalni operator s tim simetrijama i četiri derivacije je

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = \alpha \mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} + \beta \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$$

gdje su,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma - (\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu)\Box \\ &\quad + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\Box\Box \qquad (3.3)\\ \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma - \tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma \\ &\quad + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho + \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho)\Box \qquad (3.4)\\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma})\Box\Box \quad .\end{aligned}$$

Trag operatora je

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\rho\partial_\sigma\Box - (2\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\Box)\Box + 2\eta_{\rho\sigma}\Box\Box \\ &= (\eta_{\rho\sigma}\Box - \partial_\rho\partial_\sigma)\Box \qquad (3.5)\\ &= \eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} \quad . \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Iz dimenzionalne analize

$$\dim \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma} = -4, \quad \dim S_{\mu\nu\rho\sigma} = -4$$

slijedi da $f(x)$ mora biti bezdimenzionalan, dakle $f(x)$ je funkcija $\ln \mu^2 x^2$ gdje je uveden μ regulator masene skale kako bi argument logaritma bio bezdimenzionalan. Dakle, ukupni ansatz za korelacijsku funkciju iznosi

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu\rho\sigma} = \; & \mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\alpha_1 \ln\mu^2x^2 + \alpha_2\ln^2\mu^2x^2 + \cdots\right) \\ & + \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\beta_1 \ln\mu^2x^2 + \beta_2\ln^2\mu^2x^2 + \cdots\right) \quad .\end{aligned} \qquad (3.7)$$

Sada tražimo koeficijente α_i i β_i takve da (3.7) odgovara (5.1) za $x \neq 0$. Lako se vidi da $\{\alpha_i, \beta_i\} = 0$ za $i > 2$, stoga nam preostaje da odredimo $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ i β_2.

Nakon malo manipulacija dobivaju se sljedeći izrazi za članove u razvoju ansatza

$$\begin{aligned}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma \ln\mu^2x^2 = \tfrac{4}{x^4}\Big(\tfrac{4}{x^2}\big(& \eta_{\rho\sigma}x_\nu x_\mu + \eta_{\nu\sigma}x_\rho x_\mu \\ & + \eta_{\nu\rho}x_\sigma x_\mu + \eta_{\mu\sigma}x_\rho x_\nu \\ & + \eta_{\mu\rho}x_\sigma x_\nu + \eta_{\mu\nu}x_\rho x_\sigma\big) \\ & - (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}) \\ & - 24\tfrac{x_\mu x_\nu x_\rho x_\sigma}{x^4}\Big)\end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma \ln^2\mu^2x^2 = \tfrac{8}{x^4}\Big(& (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}) \\ & + 26\tfrac{x_\mu x_\nu x_\rho x_\sigma}{x^4} \\ & - (\; 6\eta_{\rho\sigma}x_\nu x_\mu + 4\eta_{\nu\sigma}x_\rho x_\mu \\ & \quad + 4\eta_{\nu\rho}x_\sigma x_\mu + 3\eta_{\mu\sigma}x_\rho x_\nu \\ & \quad + 3\eta_{\mu\rho}x_\sigma x_\nu + 6\eta_{\mu\nu}x_\rho x_\sigma) \\ & + \ln\mu^2x^2 A_{\mu\nu\rho\sigma}\Big)\end{aligned} \qquad (3.9)$$

$$\Box \ln\mu^2x^2 = 0 \qquad (x \neq 0) \qquad (3.10)$$

$$\Box \ln^2\mu^2x^2 = \frac{8}{x^2} \qquad (x \neq 0) \qquad (3.11)$$

$$\Box\Box \ln^2\mu^2x^2 = \frac{32}{x^4} \qquad (x \neq 0) \qquad (3.12)$$

gdje je $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ neki tenzor sastavljen od kombinacija metrike i vektora položaja. S obzirom na to da želimo eliminirati članove s logaritmom slijedi da mora vrijediti $\alpha_2 = -\beta_2$. Primijetimo još da je djelovanje $\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ i $\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ na logaritam jednako (zbog (3.10)), $\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}\ln\mu^2x^2 = \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\ln\mu^2x^2 = \partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma\ln\mu^2x^2$, stoga nam je samo bitan zbroj $\alpha_1 + \beta_1$. Uvrštavajući (3.8)-(3.12) u (3.3) i (3.4) i zatim u (3.7) pa uspoređujući koeficijente ispred članova (jer jednakost mora vrijediti za sve $x \neq 0$) i raspisa (5.1) slijede izrazi za koeficijente,

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \beta_1 &= -\frac{c}{24} \\ \alpha_2 = -\beta_2 &= -\frac{c}{96} \quad .\end{aligned}$$

Konačno, regularizirana Schwingerova funkcija ima oblik

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu\rho\sigma} &= \langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle \\ &= -\frac{c}{24}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}\ln\mu^2x^2 \\ &\quad - \frac{c}{96}\left(\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} - \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\right)\ln^2\mu^2x^2 \; .\end{aligned} \qquad (3.13)$$

S obzirom na jednakost tragova $\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ i $\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ (3.6) drugi član u (3.13) ne doprinosi tragu:

$$\begin{aligned}\langle T^\mu{}_\mu(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle &= -\frac{c}{48}\eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}\ln\mu^2x^2 \\ &\overset{(3.5)}{=} \frac{c}{48}\left(\eta_{\partial_\rho\partial_\sigma - \rho\sigma}\Box\right)\Box\ln\mu^2x^2 \quad .\end{aligned}$$

Ako izvrijednimo $\Box \ln \mu^2 x^2$ za sve x u 2D vrijedi,

$$\Box \ln \mu^2 x^2 = 4\pi \delta^2(x)$$

pa je onda konačni izraz za anomalni trag tenzora energije i impulsa (ili anomalni drugi Wardov identitet)

$$\langle T^\mu{}_\mu(x) T_{\rho\sigma}(y)\rangle = c\frac{\pi}{12}\left(\partial_\rho\partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\Box\right)\delta^2(x-y)\ . \tag{3.14}$$

Ako smo u prostoru s malom perturbacijom metrike ($h_{\mu\nu}$),

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \\ g^{\mu\nu}(x) &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x) \end{aligned} \tag{3.15}$$

onda možemo koristeći izraz (A.2) iz Dodatka A dobiti

$$\langle T^\mu{}_\mu(x)\rangle = c\frac{\pi}{12}\left(\partial_\rho\partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\Box\right)h^{\mu\nu}(x) \quad . \tag{3.16}$$

U ovom izrazu lako prepoznajemo razvoj Riccijevog skalara do prvog reda perturbacije metrike

$$R = \left(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box\right)h^{\mu\nu}$$

stoga,

$$\langle T^\mu{}_\mu(x)\rangle = c\frac{\pi}{12}R(x) \quad . \tag{3.17}$$

Callan-Symanzikov operator komutira s onim Wardovog identiteta, pa možemo provjeriti da je (3.13) zaista sačuvano i u $x = 0$. CS diferencijalni operator se u našem slučaju svodi na logaritamsku derivaciju po skali,

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}S_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \propto \left(\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} - \mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\right)\ln\mu^2x^2 = 0$$

što se vidi iz (3.3) i (3.4). Dakle, zahtjev sačuvanja u $x = 0$ vodi na anomaliju traga.

3.2 Nejedinstvenost regularizacije

Treba se još pozabaviti činjenicom da regularizacija nije jedinstvena, tj. da rezultati u procesima regularizacije jako često ovise o korištenoj metodi regularizacije. Kako bismo pokazali da anomalija traga nije rezultat same *diferencijalne* regularizacije, provjerit ćemo bi li dodatni dopušteni članovi u izrazu (3.13) uklonili anomaliju. Pogledajmo paritetno invarijantni dio $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ sa svim dopuštenim članovima (dodatni članovi moraju isključivo doprinostiti u $x = 0$)

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\rho\sigma} = \quad & A(\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu)\Box\ln\mu^2x^2 \\ &+ B(\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma \\ &\quad + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho + \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho)\Box\ln\mu^2x^2 \\ &+ C(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma})\Box\Box\ln\mu^2x^2 \\ &+ D\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\Box\Box\ln\mu^2x^2 \quad . \end{aligned}$$

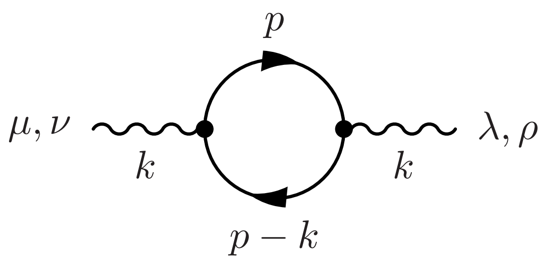
Sačuvanje i trag iznose

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4\pi\big((A+2B)\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma + (A+D)\eta_{\rho\sigma}\partial_\nu\Box \\ &\quad + (B+C)(\eta_{\rho\nu}\partial_\sigma\Box + \eta_{\sigma\nu}\partial_\rho\Box)\big)\delta^2(x) \\ A^\mu{}_{\mu\rho\sigma} &= 4\pi\big((2A+4B)\partial_\rho\partial_\sigma \\ &\quad + (A+2C+2D)\eta_{\rho\sigma}\Box\big)\delta^2(x) \quad . \end{aligned}$$

Ove dvije jednakosti ne mogu istovremeno iščezavati, stoga ova anomalija nije rezultat vrste regularizacije korištene, već stvarna anomalija koja može biti prikazana u formi anomalije traga ili u formi anomalije difeomorfizma.

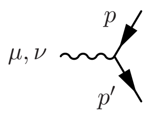
4 Anomalija tenzora energije i impulsa metodom Feynmanovih dijagrama u 2D

Pogledajmo sada isti račun preko Feynmanovog dijagrama kiralnog fermiona,



Slika 1: Feynmanov dijagram procesa

vrh vezanja gravitona i fermionske linije iznosi



$$= \frac{i}{8}\left[\left(p+p'\right)_\mu\gamma_\nu + \left(p+p'\right)_\nu\gamma_\mu\right]\frac{1+\gamma_*}{2}$$

u impulsnom prostoru. Koordinatna reprezentacija korelacijske funkcije je onda

$$\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(y)\rangle = 4\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-ik(x-y)}S_{\mu\nu\rho\sigma}(k)\ . \tag{4.1}$$

Iz dijagrama slijedi,

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\rho\sigma}(k) = -\tfrac{1}{64}\int\tfrac{d^2p}{(2\pi)^2}\,\mathrm{tr}\Big[&\tfrac{1}{\not p}\big((2p-k)_\mu\gamma_\nu + (2p-k)_\nu\gamma_\mu\big) \\ &\tfrac{1}{\not p-\not k}\big((2p-k)_\rho\gamma_\sigma + (2p-k)_\sigma\gamma_\rho\big)\tfrac{1+\gamma_*}{2}\Big] \end{aligned}$$

gdje je iskorišteno osnovno svojstvo projektora i γ_* matrice[2],

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma_*}{2}\frac{1+\gamma_*}{2} &= \frac{1+\gamma_*}{2} \\ \{\gamma_\mu, \gamma_*\} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

[2]analogon γ_5 u 2D prostoru

Nakon dimenzionalne regularizacije slijedi rezultat za trag tenzora

$$S^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma}(k) = \frac{1}{192\pi}\left(\eta_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma\right) \quad ,$$

prijeđemo li u koordinatni prostor koristeći (4.1) slijedi

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}\rangle = -\frac{1}{48\pi}\left(\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\Box\right)h^{\rho\sigma} \quad . \tag{4.2}$$

Ovo, međutim, nije kovarijantni izraz (3.16), što znači da proces regularizacije nije čuvao kovarijantnost (invarijantnost difeomorfizma). Narušenje invarijantnosti difeomorfizma sada treba provjeriti računajući divergenciju (4.1). Koristeći isti postupak kao i kod računanja traga, dobijemo u impulsnom prostoru,

$$D_{\nu\rho\sigma}(k) = -\frac{1}{96\pi}\eta_{\rho\sigma}k_\nu k^2$$

što u koordinatnoj reprezentaciji odgovara anomaliji difeomorfizma

$$\nabla^\mu\langle T_{\mu\nu}\rangle = \frac{1}{12\pi}\eta_{\rho\sigma}\partial_\nu\Box h^{\rho\sigma} \quad . \tag{4.3}$$

Sada preostaje pokazati da se kovarijantnost može vratiti dodavanjem članova akciji koji ne utječu na simetrije. S obzirom na to da smo u konformalno invarijantnoj teoriji možemo napraviti Weylovu transformaciju oblika

$$g_{\mu\nu} \to e^{2\omega(x)}g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \delta_\omega h_{\mu\nu} = 2\omega\,\eta_{\mu\nu}$$

i transformaciju difeomorfizma (1.2)

$$\delta_\epsilon h_{\mu\nu} = \partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu$$

U skladu s (1.10) i (2.1) slijede

$$A_\omega = -\int d^2x\,\omega\,\langle T^{\mu}{}_{\mu}\rangle \quad ,$$

$$A_\epsilon = \int d^2x\,\epsilon^\nu\,\nabla^\mu\langle T_{\mu\nu}\rangle \quad .$$

Doda li se varijacija kontračlana

$$C = -\frac{1}{96\pi}\int d^2x\, h\Box h$$

u akciju, rekonstruiramo već dobiveni kovarijantni oblik (3.16) i iščezavanje divergencije tj. invarijantnost difeomorfizma,

$$A_\omega + \delta_\omega C = \frac{1}{48\pi}\int d^2x\,\omega\,\left(\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h\right) \tag{4.4}$$

što je izraz koji smo dobili prije. To je primjer česte zablude da dimenzionalna regularizacija čuva kovarijantnost jer, kao što smo vidjeli, morali smo uvesti kontračlanove kako bismo vratili difeo-invarijantnost. Također treba pripaziti da se izraz prvo regularizira prije nego se rade kontrakcije indeksa.

5 Pregled anomalije u 4D

Poopćenje (5.1) na d dimenzija glasi,

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = \frac{c/2}{x^{2d}}(I_{\mu\rho}(x)I_{\nu\sigma}(x) + I_{\nu\rho}(x)I_{\mu\sigma}(x) \\ - \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma})\end{aligned} \tag{5.1}$$

$I_{\mu\nu}$ je zadržao istu definiciju kao i u (5.1). Istim postupkom diferencijalne regularizacije dobije se regularizirani izraz

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle = -\frac{c/2}{2(d-2)^2d(d^2-1)}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{1}{x^{2d-4}}\right) \\ +\frac{c/2}{2(d-2)^2d(d+1)}\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{1}{x^{2d-4}}\right) .\end{aligned} \tag{5.2}$$

gdje su $\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ i $\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ kao i u 2D slučaju (3.3) i (3.4). Trivijalno slijede relacije,

$$\begin{aligned}\partial^\mu\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial^\mu\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \\ \eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= -(d-1)(\partial_\rho\partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\Box)\Box \\ \eta^{\mu\nu}\mathcal{D}^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= -(\partial_\rho\partial_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\Box)\Box\end{aligned}$$

ako se ograničimo na $d=4$ onda je lako pokazati

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)T_{\rho\sigma}(0)\rangle \overset{d=4}{=} 0 \quad .$$

Opet trebamo provesti diskusiju o jedinstvenosti regularizacije stoga ćemo promotriti opći član koji možemo dodat izrazu (5.2), a da ne utječe na vrijednosti u $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mu\nu\rho\sigma} = \quad &\Big[A\,\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\partial_\sigma\Box \\ &+ B\,(\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma \\ &\quad + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho + \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho)\Box^2 \\ &+ C\,(\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma + \eta_{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu)\Box^2 \\ &+ D\,(\eta_{\mu\rho}\eta\nu\sigma + \eta_{\nu\rho}\eta\mu\sigma)\Box^3 \\ &+ E\,\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\Box^3\Big]\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

zahtjevamo da vrijedi sačuvanje iz čega slijede uvjeti na koeficijente:

$$C = -A + 2D, \quad D = -B, \quad E = A + 2B \quad .$$

Trag onda postaje

$$\mathcal{A}^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma} = -4\pi^2(3A+4B)(\eta_{\rho\sigma}\Box - \partial_\rho\partial_\sigma)\Box\,\delta(x)\,.$$

što odgovara trivijalnoj anomaliji $\propto \Box R$ koja se može ukloniti prikladnim Weyl invarijantnim kontračlanom u akciji, kao što je bilo napravljeno u prošlom poglavlju. Slijedi, dakle, da ova anomalija uistinu nije "prava" već da samo može proizaći kao rezultat vrste regularizacije korištene.

6 Zaključak

Sada ćemo sumirati što je bilo pokazano. U prvom dijelu bio je dan uvod u pojmove koji se koriste i kratke osnove relacija koje su potrebne za razumijevanje kasnijih izvoda. U drugom dijelu napravljen je izvod traga tenzora energije i impulsa u klasičnoj teoriji polja kako bi se uspostavila veza nužnosti njegovog iščezavanja i sačuvanja koje proizlazi iz simetrija akcije. Treće poglavlje posvećeno je kvantnoj teoriji polja u 2D, sada sačuvanje prelazi na korelacijsku funkciju. Međutim, pokazano je da, ako želimo zadržati sačuvanje, ne možemo izbjeći anomaliju u tragu, tj. to je stvarna anomalija koja se može izraziti u obliku anomalije traga ili anomalije difeomorfizma. Četvrto poglavlje bavi se računanjem anomalije preko Feynmanovih dijagrama koristeći dimenzionalnu regularizaciju, i pokazano je da u tom slučaju, suprotno od uvriježenog mišljenja, dimenzionalna regularizacija ne čuva kovarijantnost, već je trebalo popraviti izraz Weyl-invarijantnim kontračlanom. Konačno, u petom dijelu analiziran je slučaj u 4D te je pokazano kako nema anomalije, tj. ako se pojavi kao posljedica vrste regularizacije, lako ju se eliminira kontračlanovima.

Dodatak A Tenzor energije i impulsa u formalizmu integrala po stazama u zakrivljenom prostoru

Općenito vezanje tenzora energije-impulsa na vanjsku klasičnu struju dano je particijskom funkcijom

$$Z[j^{\mu\nu}] = \langle 0|\mathcal{T} e^{\frac{i}{2}\int dx T_{\mu\nu}(x) j^{\mu\nu}(x)}|0\rangle = e^{-iW[j_{\mu\nu}]}$$

slijedi za generacijski funkcional,

$$W[j^{\mu\nu}] = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{-i^{n+1}}{2^n n!} \int \prod_{i=1}^{n} dx_i j^{\mu_i\nu_i}(x_i) \\ \langle 0|\mathcal{T} T_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots T_{\mu_n\nu_n}(x_n)|0\rangle$$

koristeći relaciju (1.14) i razvoj metrike (3.15) možemo dobiti

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{-i^{n+1}}{2^{n-1} n!} \int \prod_{i=1}^{n} dx_i h^{\mu_i\nu_i} \\ \langle 0|\mathcal{T} T^{\mu}{}_{\mu}(x)\cdots T_{\mu_n\nu_n}(x_n)|0\rangle \ . \tag{A.1}$$

Do prvog reda u $h^{\mu\nu}$ (A.1) iznosi,

$$\langle T^{\mu}{}_{\mu}(x)\rangle = \int dy \langle T^{\mu}{}_{\mu}(x) T_{\rho\sigma}(y)\rangle h^{\rho\sigma} \quad . \tag{A.2}$$

Dodatak B Postupak dimenzionalne regularizacije

Postupak dimenzionalne regularizacije kod izračunavanja petlji u Feynmanovim dijagramima je (ovdje opisano za petlju s dva propagatora):

1. Feynmanova parametrizacija (ovdje opisano za petlju s dva propagatora)

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(xA+(1-x)B)^2} \\ &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{(xA+yB)^2} \end{aligned}$$

2. Prepoznavanje l i Δ tako da nazivnik ima formu $(l^2-\Delta)^n$ i translacija integralnog impulsa u l

3. Transformacija nastalih tenzorskih integrala slijedećim izrazima (rezultatima usrednjavanja po kutevima):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} f(l^2) l_\mu &= 0 \\ \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} f(l^2) l_\mu l_\nu &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} f(l^2) \frac{1}{d} l^2 g_{\mu\nu} \\ \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} f(l^2) l_\mu l_\nu l_\rho &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

4. Wickova rotacija - prijelaz iz Minkowski prostora u euklidski transformacijom,

$$l^0 \equiv i l_E^0, \quad \vec{l} \equiv \vec{l}_E \quad \Rightarrow \quad l^2 = -l_E^2, \quad d^d l = i d^d l_E$$

5. Izvrjednjavanje integrala za opći broj dimenzija D, najčešći su:

$$\begin{aligned} \int \tfrac{\mu^{d-D} d^D l_E}{(2\pi)^D} \tfrac{1}{(l_E^2+\Delta)^n} &= \tfrac{\mu^{d-D}}{(4\pi)^{D/2}} \tfrac{\Gamma(n-\frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\tfrac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{D}{2}} \\ \int \tfrac{\mu^{d-D} d^D l_E}{(2\pi)^D} \tfrac{l_E^2}{(l_E^2+\Delta)^n} &= \\ &\tfrac{\mu^{d-D}}{(4\pi)^{D/2}} \tfrac{D}{2} \tfrac{\Gamma(n-\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(n)} \left(\tfrac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{D}{2}-1} \end{aligned}$$

6. Razvoj $D = d - \varepsilon$ po ε i zadržavanje samo konstantnih članova i članova $\propto 1/\varepsilon$ koji jedini doprinose u limesu $\varepsilon \to 0$. Razvoj Γ:

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \psi(n+1)\right)$$

gdje je

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma \quad ,$$

a γ Euler-Mascheronijeva konstanta.

Literatura

[1] L. Bonora, A. Duarte Pereira, B. Lima de Souza, *Regularization of energy-momentum tensor correlators and parity-odd terms*, arXiv: 1503.03326v2 [hep-th]

[2] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer

[3] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984)

[4] C. Rovelli, *Loop Quantum Gravity*, Living Rev. Relativity, 11, (2008), 5

[5] L. Bonora, S. Giaccari, B. Lima de Souza, *Trace anomalies in chiral theories revisited*, arXiv:1403.2606v3 [hep-th]

[6] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, arXiv:gr-qc/9712019v1

[7] R. Delbourgo, A. Salam, *PCAC Anomalies and Gravitation*, International Centre for Theoretical Physics, IC/72/86, Miramare - Trieste August 1972

[8] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesly (1995)

[9] P.J. Mulders, *Dirac and Majorana Fermions*, September 2012 (notes academic lectures)

[10] D. Tong, *Lectures on String Theory*, arXiv:0908.0333v3 [hep-th]

[11] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press (1996)