

Mase kvarkova i mezona u vakuumu i na konačnoj temperaturi

Domagoj Leljak

26. siječnja 2016.

Sažetak

Standardni model teorija je fundamentalnih interakcija u fizici - elektromagnetizma, te slabe i jake interakcije. Posebnost je jake interakcije, formalno opisane kvantnom kromodinamikom (QCD) s baždarnom grupom $SU(3)_c$, njezina iznimna neperturbativnost. QCD je neabelovska baždarna teorija, što efektivno uzrokuje i jako vezanje na niskim energijama. Niskoenergetski režim je proučen u ovom radu pomoću Dyson-Schwinger i Bethe-Salpeter jednadžbi, koje daju dobar fenomenološki uvid u neperturbativne fenomene poput generacije mase "ni iz čega", što je u ovom radu pokušano postići numerički u novom programskom jeziku *Julia*. Brzine nekih operacija uspoređene su sa njihovim analogonima u jeziku *Python*.

1 Kvantna kromodinamika

QCD jest baždarna teorija polja jakih interakcija. Dinamika svake teorije polja je definirana preko gustoće lagranžijana (kolokvijalno - samo lagranžijan), koji za QCD izgleda kao:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu D^\mu - m_q) \psi_q - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \quad (1)$$

Ovdje su ψ_q kvarkovska polja okusa q , a γ^μ matricama figurira euklidska Cliffordova algebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (2)$$

Suma se implicira kada se indeksi ponavljaju. Operator D^μ je kovarijantna derivacija uvedena radi zahtjeva na baždarnu invarijantnost teorije i definirana preko:

$$D^\mu = \partial^\mu - igA_a^\mu(x)t_a \quad (3)$$

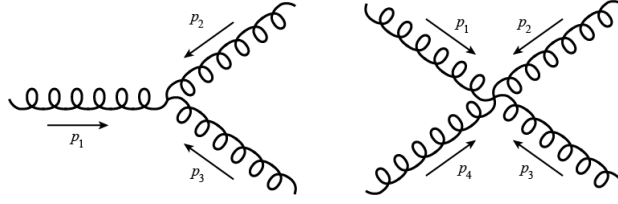
U Gell-Mannovoj bazi $t_a = \frac{\lambda_a}{2}$, $\forall a = 1\dots 8$ su generatori $SU(3)$ grupe, odnosno kvarkovska polja transformiraju se unutar grupe operatorom $U = e^{-i\alpha_a t_a}$, uz parametar lokalne transformacije α_a . Vektorsko polje baždarnog gluona predstavljeno je sa $A_a^\mu(x)$, čiji je tenzor jakosti dan sa:

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + gf_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\nu \quad (4)$$

Totalno antisimetrične strukturne konstante f_{abc} definirane su preko komutatorske algebre generatora:

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c \quad (5)$$

Naizgled sličan strukturom onom elektrodinamike, lagranžijan kromodinamike ipak ima posebnost koja uvelike alterira dinamiku koju opisuje. Naime, neiščezavajući strukturni faktori (neabelovskost teorije) ostavljaju mogućnost gluonima da interagiraju međusobno kroz kubične i kvartične interakcije. Drugim riječima, baždarni bozoni teorije i sami nose naboj, za razliku od kvantne elektrodinamike, čiji naboj foton ne nosi. Naboj jake interakcije naziva se boja, a kako je baždarna grupa $SU(3)$, postoje 3 boje, konvencionalno crvena (r), zelena (g) i plava (b).



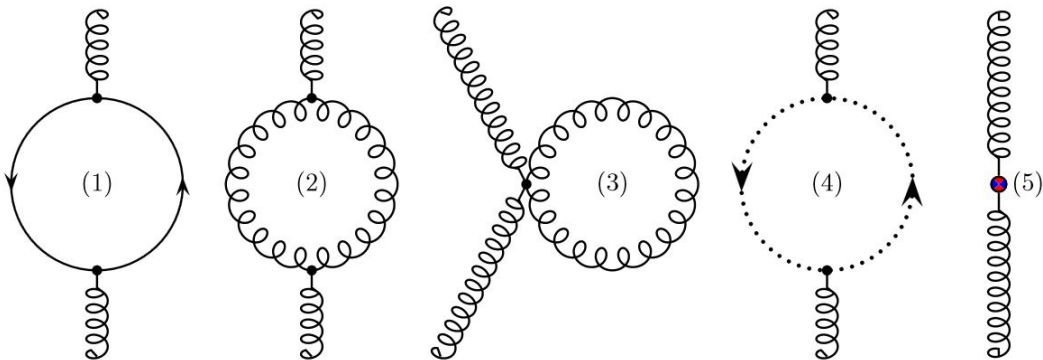
Slika 1: Kubične i kvartične gluonske interakcije

Upravo činjenica da je teorija neabelovska otvara vrata fenomenu asimptotske slobode. U kvantnoj teoriji polja se već desetljećima proučavaju invarijantne amplitude prijelaza (koje govore o udarnim presjecima) pomoću perturbativnog formalizma, odnosno razvoja Dysonove formule u red potencija. Integrali za svaki član u razvoju simbolički se mogu prikazati pomoću takozvanih Feynmanovih dijagrama. No, kada se uključe kvantne korekcije u računu dijagrama (kao npr. doprinosi samointerakcije), oni počnu divergirati. To se popravljiva renormalizacijom, odnosno redefiniranjem konstante vezanja u odnosu na referentnu skalu. Ispostavlja se da je za QCD ona za visoke energije reda veličine ~ 0.1 (podsjetnik, u prirodnom sustavu jedinica $\hbar \rightarrow 1$), što dozvoljava perturbativni razvoj. Funkcionalna ovisnost renormaliziranog vezanja, dobivena pomoću dijagrama sa slike (2), do na jednu petlju izgleda kao:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{1 + B\alpha_s(Q_0^2) \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)} \quad (6)$$

$$B = \frac{11N_c - 2N_f}{12\pi}$$

Odnosno, funkcija B jest pozitivna za kvantnu kromodinamiku i α_s pada sa Q^2 . Problem nastaje u niskoenergetskim režimima. Naime, već za $Q^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$, na skali mase protona, vezanje postaje reda veličine ~ 1 i teorija izlazi iz domene perturbativnog režima. Jedna od fizikalnih manifestacija neperturbativnosti tog režima jest dinamičko slamanje kiralne simetrije. Naime, mase laganih kvarkova (koje su parametri standardnog modela) zanemario su male s obzirom na skale u pitanju, a njihova vezana stanja su iznimno masivna. Proton se tako sastoji od dva u i jednog d kvarka ($m \sim 3 - 10 \text{ MeV}$), a u vezanom stanju masa mu je $\sim 1 \text{ GeV}$. To indicira da će sami kvarkovi biti podložni nekoj vrsti dinamičkog generiranja mase kroz specifičnu gluonsku interakciju, dok će lagranžijan efektivno izgubiti kiralnu simetriju, koja je uvjetovana masenim dijelom.



Slika 2: Jednopenljeni integrali samoenergije gluona, pomoću (5) se rješava UV divergencije

Još jedno od misterioznih fenomenoloških svojstava fizike elementarnih čestica tiče se upravo propagacije čestica koje interagiraju jakom silom. Naime, empirijska je činjenica, zasad, da se kao realne čestice propagiraju samo stanja koja su singleti u bojnem prostoru, odnosno samo one čestice koje su "bezbojne". Posljedično, sretna je slučajnost da je svemir izabrao kao baždarnu grupu QCD-a $SU(3)$, a ne $U(3)$, koja bi dozvolila postojanje devetog

gluona, bojnog singleta. Tada bi jaka sila mogla postati dugodosežna, što bi imalo u velikom razmjeru posljedice na svemir. Realan oktet gluona odgovara osam generatora grupe, i kako sami nose boju također su konfinirani u bezbojna vezana stanja.

2 Funkcionalni integrali u teoriji polja

Tradicionalni način tretiranja teorije polja bio bi metodom kanonske kvantizacije, no tada je režim u pitanju teško dostupan. Zbog toga se kvantizaciji pristupa formalizmom integrala po putevima. Ovdje su navedena samo neka njegova svojstva u svrhu boljeg razumijevanja strukture koja je proučavana (tzv. "obučeni" kvarkovski propagator) relativno jednostavnim separabilnim modelom. U formulaciji kvantne mehanike preko integrala po putevima centralna figura proučavanja, iz koje se relativno jednostavno dobivaju sve Greenove funkcije je generirajući funkcional $\mathcal{Z}[J]$, i on u kromodinamici izgleda kao:

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J] = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{QCD}} + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu A_\mu)\right] \quad (7)$$

Ovdje uglate zagrade impliciraju da se radi o funkcionalu - entitetu koji za input ima funkciju, a za output broj (za razliku od funkcije, koja i za input i za output ima broj). Unutar uglate zagrade pokraj \mathcal{Z} nalaze se polja izvora, dodana u lagranžijan radi lakšeg računa Greenovih funkcija teorije, što će postati jasno uskoro. Tako η i $\bar{\eta}$ moraju biti Grassman polja kako bi mogli služiti kao izvor fermionima (kvarkovima), a J_μ ima strukturu standardnog vektorskog polja. U skraćenoj notaciji ne pišu se ovisnosti polja o varijabli prostor vremena ($\phi \subset \{\eta, \bar{\eta}, J, \bar{\psi}, \psi, A\} \rightarrow \phi(x)$, ϕ predstavlja sva polja), te $\mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] = \mathcal{D}[\bar{\psi}]\mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[A]$. Također, implicitan je spinorni stupanj slobode, točnije bi bilo pisati:

$$\mathcal{D}[\bar{\psi}]\mathcal{D}[\psi] = \prod_{r=1}^4 \mathcal{D}[\bar{\psi}_r] \prod_{s=1}^4 \mathcal{D}[\psi_s] \quad (8)$$

Greenove funkcije, u reprezentaciji integrala po putevima dane su sa:

$$\langle 0|T\{\phi^{(1)}(x_1) \cdots \phi^{(n)}(x_n)\}|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}\right] \phi^{(1)}(x_1) \cdots \phi^{(n)}(x_n)}{\int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}\right]} \quad (9)$$

Opet je simbolički sa $\phi^{(i)} \subset \{\bar{\psi}, \psi, A\}$ prikazano bilo koje polje u teoriji, i dat mu je indeks i . Odnosno, ako je od interesa 2-točkasta fermionska (kvarkovska) korelacijska funkcija:

$$\langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}\right] \bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)}{\int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}\right]} \quad (10)$$

Postaje jasna potreba za uvođenjem generirajućeg funkcionala: do Greenovih funkcija jednostavo se dolazi funkcionalnom derivacijom po odgovarajućim strujama koje se zatim pošalju u nulu.

$$\langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle = \frac{(-i)^2}{\mathcal{Z}[0, 0, 0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, 0]}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta (-\eta(x_2))} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = iS_F(x_1 - x_2) \quad (11)$$

Još je potreban jedan entitet za razumijevanje Dyson-Schwingerovih jednadžbi (pomoću kojih će biti modeliran efekt dinamičkog slamanja kiralne simetrije), generirajući funkcional za "spojene" Greenove funkcije \mathcal{W} (\mathcal{Z} uključuje i nepovezane dijagrame):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J] &= \exp(\mathcal{W}[\eta, \bar{\eta}, J]) \\ \mathcal{W}[\eta, \bar{\eta}, J] &\equiv i\Gamma[\psi, \bar{\psi}, J] + i \int d^4x [\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu A_\mu] \end{aligned} \quad (12)$$

Efektivna akcija (ili pravi, puni verteks) $\Gamma[\psi, \bar{\psi}, J]$ veličina je iz koje se mogu izvući jednočestične ireducibilne Greenove funkcije. Odnosno, treba primjetiti da se inverz kvarkovskog propagatora može zapisati kao:

$$S_F^{-1}(x - y) = \frac{\delta^2 \Gamma[\psi, \bar{\psi}, J]}{\delta \psi(x) \delta \bar{\psi}(y)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} \quad (13)$$

Iduća primjedba tiče se definicije funkcionalne derivacije/integrala. Kao posljedica toga da je integral suma doprinosa svih konfiguracija polja u svim točkama (pa kada se polju doda mala perturbacija $\delta\phi$ vrijednost integrala se ne mijenja), integral potpunog diferencijala iščezava:

$$\int \mathcal{D}[\phi] \frac{\delta}{\delta\phi} \equiv 0 \quad (14)$$

Odnosno zahvaljujući tome, na primjeru QCD-a, može se pogledati integral funkcije derivirane po $\bar{\psi}$:

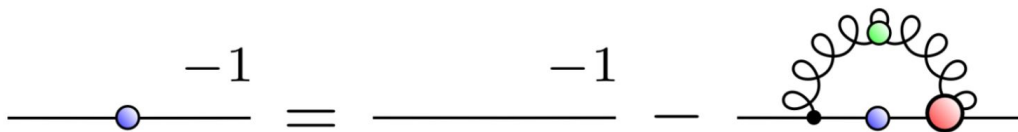
$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} \exp[i\mathcal{S}_{\text{QCD}}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu A_\mu] \\ &= \int \left[\frac{\delta\mathcal{S}_{\text{QCD}}}{\delta\bar{\psi}} \left(-i\frac{\delta}{\delta J}, -i\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}, i\frac{\delta}{\delta\psi} \right) + \eta(x) \right] \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J] \end{aligned} \quad (15)$$

Ovdje $\mathcal{S}_{\text{QCD}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}$ nije ništa doli QCD akcije. Derivira li se (15) još jednom po ψ (jer je od interesa kvarkovski propagator), podijeli sa \mathcal{Z} i upotrijebi Ward-Green-Takahashi identitet, te prijeđe Fourierovim transformatom u impulsni prostor, dobiva se famozna Dyson-Schwingerova jednadžba (DSE) za puni kvarkovski propagator $S_q(p)$ okusa q (tj. njegov inverz):

$$\begin{aligned} S_q(p)^{-1} &= ip \cdot \gamma + \tilde{m}_q + \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(p-l) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} S_q(l) \Gamma_\nu^a(l, p) \\ \Sigma_q &\equiv \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(p-l) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} S_q(l) \Gamma_\nu^a(l, p) \end{aligned} \quad (16)$$

Korištena je euklidska konvencija $p \cdot \gamma = p_\mu \gamma_\mu$. Masa \tilde{m}_q je lagranžijanska, strujna masa kvarka okusa q . Jakost vezanja opisana je konstantom g , $D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(p-l)$ je puni gluonski propagator, i $\Gamma_\nu^a(l, p)$ puni kvark-gluon verteks teorije. Član Σ_q je ustvari petljeni integral fermionske samoenergije, pa se jednadžba može prikazati shematski u maniri Feynmanovih dijagrama, kao na slici (3). Već sada se vidi da će zahvaljujući njemu kvarkovi generirati masu čak i u slučaju kada $\tilde{m}_q \rightarrow 0$, za razliku od perturbativnog slučaja (koji zapravo ionako ne vrijedi na relevantnoj skali), u kojemu je masa uvijek proporcionalna onoj lagranžijanskoj:

$$M_q(p^2)^{\text{pert}} \sim \tilde{m}_q \left(1 - \frac{\alpha_s(p^2)}{\pi} \ln \left[\frac{p^2}{\tilde{m}_q^2} \right] + \dots \right) \quad (17)$$

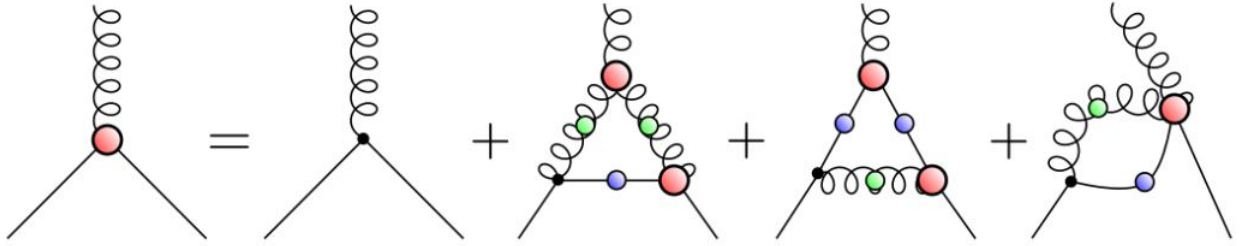


Slika 3: DSE jednadžba za puni kvarkovski propagator - on je jednak zbroju slobodnog propagatora i dijela koji dolazi od oblačenja gluonskom interakcijom

2.1 "Ladder" aproksimacija

Navedena DSE, koja je kasnije izmodelirana jednostavnim separabilnim modelom, predstavlja neku vrstu rekurzivne jednadžbe za puni propagator $S_q(p)$, u smislu da se sam puni propagator zove kao "argument" funkcije. U tom smislu neizbježno podsjeća na Lippman-Schwinger jednadžbu u nerelativističkoj teoriji. Tako bi na prvi pogled mod rješavanja jednadžbe mogao biti neka vrsta iterativnog uvrštavanja propagatora u integral (prvo slobodni, pa prvo rješenje, pa drugo...). Međutim, stvar je mnogo složenija. U integralu koji predstavlja samoenergiju Σ_q nalazi se puni verteks, koji također ima svoju Dyson-Schwinger jednadžbu, simbolički prikazanu slikom (4). Iz nje se jasno vidi da za rješenje dvotočkaste fermionske korelacijske funkcije trebamo rješenje višetočkastih korelacijskih funkcija. Da

stvar bude još gora, za rješenje trebamo i puni gluonski propagator. Odnosno, DSE su zapravo skup beskonačno mnogo funkcionalnih diferencijalnih jednadžbi, ponekad zvanih i beskonačni toranj DSE. Zato se u fenomenološkim studijama DSE često "režu" na načine koji su opravdani fizikalnim argumentima. Najpopularniji i najjednostavniji način na koji se to može napraviti jest takozvanom "ladder" ili "ljestvičastom" aproksimacijom. Ona se tako naziva jer se, u ovom primjeru, puni verteks (interakcija) zamjenjuje točkastom QCD interakcijom pomnoženom sa nekom funkcijskom ovisnošću o impulsu, što inače u dijagramatskom prikazu interakcija efektivno rezultira serijom izmjena bozona vezanih na fermione točkastom interakcijom.



Slika 4: DSE jednadžba za puni kvark-gluon verteks

Iduća generacija modela uključivala bi tzv. "next-to-ladder" interakcije, gdje bi se točkastom verteksu još dodala npr. izmjena gluona i tzv. "cross term", no kako inicijalna metoda, barem fenomenološki vrlo dobro opisuje proces generacije masa, oni nisu ovdje uzimani u obzir. Dakle, konačna supstitucija u terminima DSE (16) bila bi $\Gamma_\nu^a(l, p) \rightarrow \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu$, i nakon uzimanja u obzir kontrakcija Gell-Mannovih matrica ($t^a t^a = \frac{16}{3}$), izraz za samoenergiju postaje:

$$\Sigma_q = \frac{4}{3} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(p-l) \gamma_\mu S_q(l) \gamma_\nu \quad (18)$$

Treba još napomenuti i da će bilo kakva funkcionalna ovisnost o impulsu koja može bitno stoji uz verteks biti upijena u model gluonskog propagatora.

2.2 Model gluonskog propagatora

Zahvaljujući beskonačnom broju vezanih jednadžbi, očito je da za rješenje DSE gluonski propagator također zahtjeva model. Nametanjem Lorentz kovarijantnosti entitetu gluonskog propagatora dobiva se njegov općeniti oblik. Za dva nezavisna momenta očekuje se da će skalarne funkcije u propagatoru o njima ovisiti (za, recimo l_μ i p_μ) preko p^2 , l^2 i $p \cdot l$. Kako se očekuje opis masa kvarkova i njihovih vezanih stanja na konačnim temperaturama, odabran je separabilni model koji je za to pogodan, i to u "Feynmanolikom" baždarenju:

$$\begin{aligned} g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(p-l) &\rightarrow \delta_{\mu\nu} D(p^2, l^2, p \cdot l) \\ D(p^2, l^2, p \cdot l) &= D_0 \mathcal{F}_0(p^2) \mathcal{F}_0(l^2) + D_1 \mathcal{F}_1(p^2) (p \cdot l) \mathcal{F}_1(l^2) \\ \mathcal{F}_0(p^2) &= \exp\left\{-\frac{p^2}{\Lambda_0^2}\right\} \text{ i } \mathcal{F}_1(p^2) = \exp\left\{-\frac{p^2}{\Lambda_1^2}\right\}, \text{ za } \Lambda_0 = 0.814\text{GeV} \text{ } \Lambda_1 = 1.035\text{GeV} \\ D_0 &= 217.3\text{GeV}^{-2} \text{ i } D_1 = 99.5\text{GeV}^{-4} \end{aligned} \quad (19)$$

Mnogo je modela u povijesti korišteno u svrhe objašnjavanja raznih fenomena pri niskim energijama u QCD-u. Možda je najpoznatiji Nambu-Jona-Lasinio (tzv. NJL) model, za koji je Yoichiro Nambu i nagrađen Nobelovom nagradom 2008. godine zbog, po prvi puta elegantnog objašnjavanja dinamičkog slamanja kiralne simetrije. U njemu je ovisnost o impulsu gluona naprosto konstanta $D(p^2, l^2, p \cdot l) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{C}{\Lambda^2}$, no tada samoenergija divergira i integral treba odrezati na nekoj karakterističnoj skali Λ , odnosno renormalizirati. Poznat je i Munczek-Nemirovsky model u kojem je ovisnost o impulsu samo delta funkcija: $D(p^2, l^2, p \cdot l) \rightarrow \Lambda^2 \delta^4(p)$. On ne zahtjeva renormalizaciju i integral je rješiv analitički. Oba od ovih modela imaju jednu zajedničku stvar, generiraju masu dinamički na skali manjoj

od neke referente QCD skale čak i kada lagranžijanska masa ide u nulu $\tilde{m}_q \rightarrow 0$. Konačno, samoenergija izgleda kao:

$$\Sigma_q = \frac{4}{3} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [D_0 \mathcal{F}_0(p^2) \mathcal{F}_0(l^2) + D_1 \mathcal{F}_1(p^2) (p \cdot l) \mathcal{F}_1(l^2)] \gamma_\mu S_q(l) \gamma_\mu \quad (20)$$

3 Mase u vakuumu

3.1 Kiralna simetrija QCD-a

Prije analize generacije efektivnih masa u odabranom modelu zgodno je prisjetiti se značenja kiralne simetrije u teoriji polja. Kiralna transformacija može se definirati preko projektora koji djeluju na fermionsko (u ovom slučaju kvarkovsko) polje:

$$\begin{aligned} \psi &= P_L \psi + P_R \psi = \psi_L + \psi_R \\ P_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Maseni dio će u lagranžijanu tako miješati u kiralnoj bazi lijevi i desni dio:

$$\mathcal{L}_m = m \bar{\psi} \psi \supset m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (22)$$

To efektivno znači da lagranžijan kiralne transformacije ne ostavljaju invarijantnim baš zbog tog člana. Drugim riječima, za nulmase lagranžijan je potpuno kiralno simetričan. Na hadronskoj skali, strujne mase su praktički zanemarive ($\text{GeV} \gg \text{MeV}$) pa lagranžijan sadržava aprosimativnu kiralnu simetriju čije slamanje je demonstrirano u sljedećem potpoglavlju.

3.2 Mase kvarkova

Fermionski propagator se, zahvaljujući opet Lorentz kovarijantnosti može općenito zapisati kao:

$$\begin{aligned} S_q(p)^{-1} &= i(p \cdot \gamma) A_q(p^2) + B_q(p^2) \\ \Rightarrow S_q(p) &= \frac{-i(p \cdot \gamma) A_q(p^2) + B_q(p^2)}{p^2 A_q^2(p^2) + B_q^2(p^2)} \end{aligned} \quad (23)$$

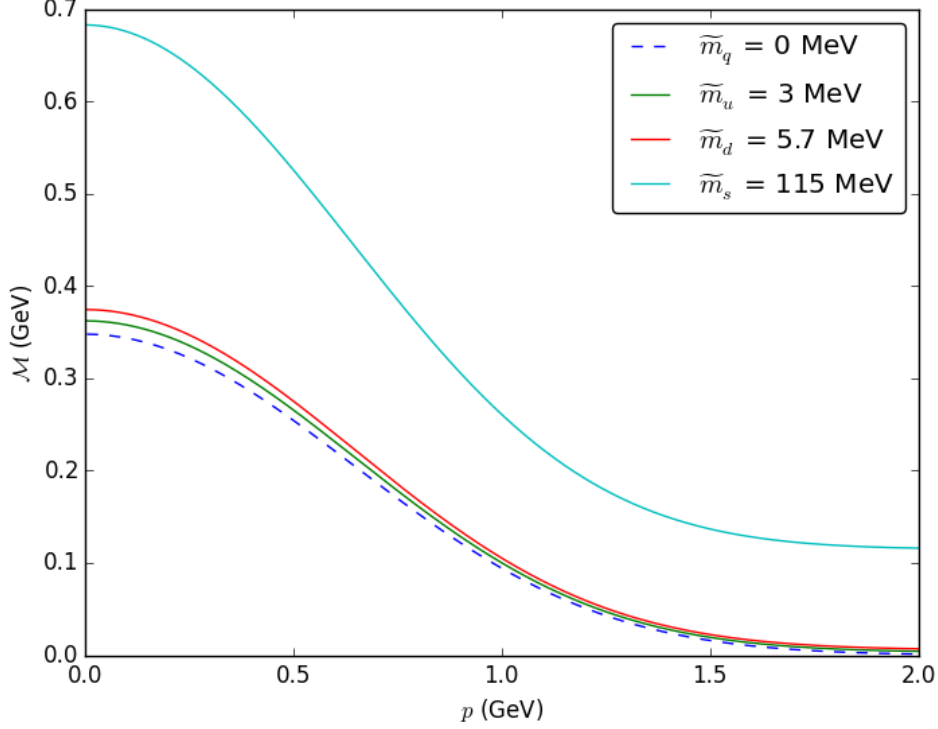
Usporedi li se prvi izraz sa onim slobodnog propagatora: $S_0(p)^{-1} = i(p \cdot \gamma) + \tilde{m}_q$, vidi se da će efektivnom masom figurirati faktor $\mathcal{M}_q(p^2) = \frac{B_q(p^2)}{A_q(p^2)}$, pa se nakon uvrštavanja općenitog oblika u (16) dobije se:

$$ip \cdot \gamma A_q(p^2) + B_q(p^2) = ip \cdot \gamma + \tilde{m}_q + \frac{4}{3} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} D(p^2, l^2, p \cdot l) \frac{2i(l \cdot \gamma) A_q(l^2) + 4B_q(l^2)}{l^2 A_q^2(l^2) + B_q^2(l^2)} \quad (24)$$

Ako se izvadi trag iz navedene matrične jednadžbe dobije se rekurzivna jednadžba za $B_q(p^2)$, a ako se trag izvadi nakon množenja jednadžbe sa $-i(p \cdot \gamma)$ dobije se analogna za $A_q(p^2)$:

$$\begin{aligned} B_q(p^2) - \tilde{m}_q &= \mathcal{F}_0(p^2) \frac{16D_0}{3} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{F}_0(l^2) B_q(l^2)}{l^2 A_q^2(l^2) + B_q^2(l^2)} \equiv b_q \mathcal{F}_0(p^2) \\ A_q(p^2) - 1 &= \mathcal{F}_1(p^2) \frac{2D_1}{3} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^2 \mathcal{F}_1(l^2) A_q(l^2)}{l^2 A_q^2(l^2) + B_q^2(l^2)} \equiv a_q \mathcal{F}_1(p^2) \end{aligned} \quad (25)$$

Ovdje su zbog parnosti redom iščeznuli dijelovi uz D_1 i D_0 . Faktori a_q i b_q ne ovise o impulsu i to je prednost separabilnog modela, koja će se pokazati posebno pogodna kada se analiza proširi na konačne temperature. Dobivene jednadžbe nazivaju se jednadžbama procjepa (tzv. *gap equations*), jer govore o procjepu koji nastaje između efektivnih masa na visokim, i strujnih na niskim energijama ($\mathcal{M}_q - \tilde{m}_q \approx \mathcal{M}_q$). Jednadžba se rješava numerički za a_q i b_q metodom koja je kasnije ukratko pojašnjena, te se onda računaju $A_q(p^2)$ i $B_q(p^2)$ za sve impulse.



Slika 5: Rezultati numeričke analize efektivne mase kvarkova za 3 sektora

Na slici (5) nalaze se funkcije $\mathcal{M}_q(p^2) = \frac{B_q(p^2)}{A_q(p^2)}$ dobivene za tri sektora (strani, \tilde{m}_s i laki \tilde{m}_u, \tilde{m}_d) te kiralnu granicu ($\tilde{m}_q = 0$), u navedenom separabilnom modelu. Jasno se vidi da u ultrarelativističkom slučaju funkcije masa poprimaju vrijednosti strujnih, lagranžijanskih masa, dok se na niskim energijama generira velika efektivna masa koja rezultira slamanjem kiralne simetrije. Čak i u slučaju u kojem se strujna masa pošalje u nulu, efektivna masa je reda veličine trećine mase protona $\approx \frac{M_p}{3}$.

3.3 Mase mezona

Mase mezona u ovom radu računane su preko Bethe Salpeterove (BS) jednadžbe za amplitude vezanih stanja:

$$-\Gamma_{q\bar{q}'}(p, P) = \frac{4}{3} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(p-l) \gamma_\mu S_q(l_+) \Gamma_{q\bar{q}'}(l, P) S_{q'}(l_-) \gamma_\nu \quad (26)$$

Uvedene su pokrate $l_\pm \equiv l \pm \frac{P}{2}$, gdje je odabrano da se svaki od kvarkova nosi po $\frac{P}{2}$ impulsa (pola ulazi, pola izlazi). Praktično se s njome računa tako da se iz svojstava simetrije pretpostavi oblik amplitude i onda ju se tretira kao fiktivni problem svojstvenih vrijednosti: kako se očekuje da korelacijska funkcija mezonske struje ima pol za $P^2 = -M^2$, gdje je M masa vezanog stanja, s lijeve se strane dodaje svojstvena vrijednost koja poprima jedinicu upravo u tom slučaju, dakle:

$$-\lambda(P^2) \Gamma_{q\bar{q}'}(p, P) = \frac{4}{3} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(p-l) \gamma_\mu S_q(l_+) \Gamma_{q\bar{q}'}(l, P) S_{q'}(l_-) \gamma_\nu \quad (27)$$

Općeniti oblik koji, redom skalarna i pseudoskalarna BS amplituda mogu imati za ovakav separabilni model, nakon što se uzmu u obzir simetrije u pitanju, jest:

$$\begin{aligned} \Gamma_P(l, P) &= \gamma_5 (iE_P(P^2) + (P \cdot \gamma) F_P(P^2)) \mathcal{F}_0(l^2) \\ \Gamma_S(l, P) &= E_S(P^2) \mathcal{F}_0(l^2) \end{aligned} \quad (28)$$

Skalarna amplituda je rezana, korišten je samo njen dominantni član. Uz poznavanje kvarkovskih $A_q(p^2)$ i $B_q(p^2)$ funkcija, sada se može numerički odrediti i masa skalarnog σ -mezona te pseudoskalarnih K te π -mezona, kroz jednadžbu za svojstvenu vrijednost. Za skalar je lako, nakon uzimanja traga:

$$\lambda(P^2) = -\frac{4}{3}D_0 tr_s \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \mathcal{F}_0^2(l^2) [S_q(l_+) S_{q'}(l_-)] \quad (29)$$

Međutim, kako za pseudoskalarne BS amplituda nije trivijano proporcionalna jediničnoj matrici, problem postaje:

$$\mathcal{K}(P^2)f = \lambda(P^2)f \quad (30)$$

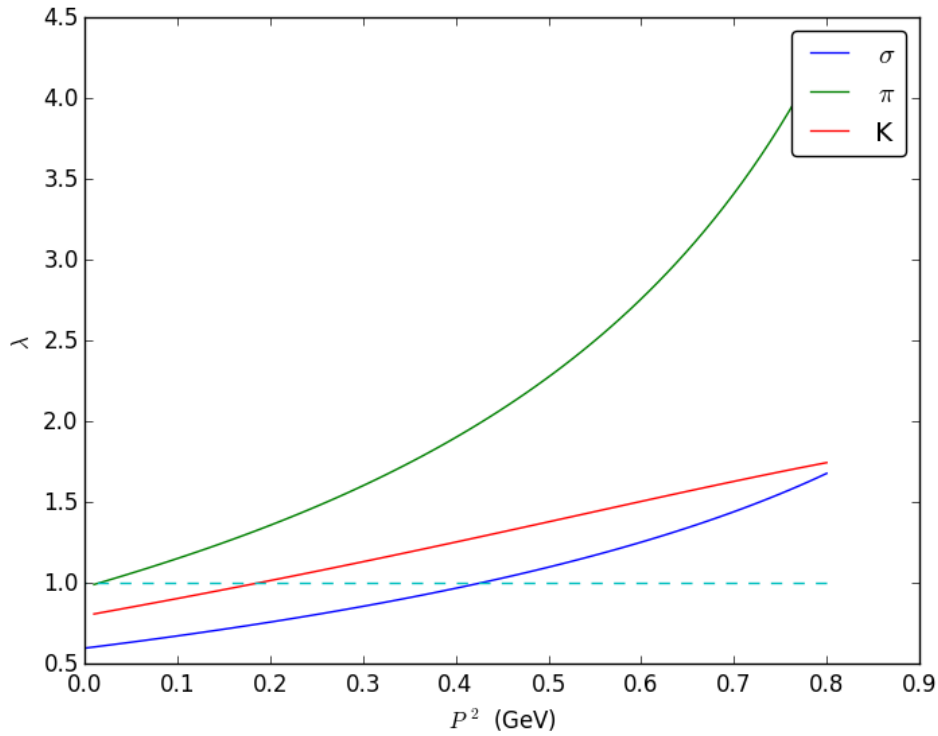
Ovdje je svojstveni vektor $f = \begin{pmatrix} E_P(P^2) \\ F_P(P^2) \end{pmatrix}$, a matrica \mathcal{K} :

$$\mathcal{K}_{ij}(P^2) = -\frac{4D_0}{3} tr_s \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \mathcal{F}_0^2(q^2) [\hat{t}_i S(l_+) t_j S(q_-)] \quad (31)$$

Opet su definirani pomoćni vektor-stupci $\hat{t} = \begin{pmatrix} i\gamma_5 \\ -\gamma_5 \frac{p \cdot \gamma}{2P^2} \end{pmatrix}$ i $t = \begin{pmatrix} i\gamma_5 \\ \gamma_5(p \cdot \gamma) \end{pmatrix}$. Od interesa je:

$$\lambda(P^2) = \frac{\mathcal{K}_{11} + \mathcal{K}_{22} + \sqrt{\mathcal{K}_{11}^2 + \mathcal{K}_{22}^2 - 2\mathcal{K}_{11}\mathcal{K}_{22} + 4\mathcal{K}_{12}\mathcal{K}_{21}}}{2} \quad (32)$$

Mogu se crtati svojstvene vrijednosti kao funkcije od impulsa.



Slika 6: Svojstvene vrijednosti u ovisnosti o kvadratu impulsa

Dobivene mase tri mezona u pitanju su:

	M_σ	M_π	M_K
rezultat (MeV)	654	128	433
stvarnost (MeV)	600	140	495

Podudarnost sa realnim masama mogla se povećati daljnjim alteriranjem parametara modela, no uspješno je pokazano kako se sa jednostavnim modelom mogu generirati mase u isto vrijeme čak i za strani sektor.

4 Mase na konačnim temperaturama

4.1 Matsubara formalizam

Ekstenzija modela na konačne temperature vrši se pomoću takozvanog Matsubara formalizma, koji izranja kao prirodna generalizacija uslijed funkcionalne podudarnosti integrala po putevima iz kvantne teorije polja te particijskih funkcija iz statističke fizike. Zamjenom realne nulte varijable u koordinatnom prostoru (vremena) sa imaginarnom, korespondencija postaje potpuna:

$$e^{-\beta\hat{H}} \leftrightarrow e^{i\hat{H}t} \text{ odgovara } t = i\beta \quad (33)$$

Standardno, $\beta = \frac{1}{T}$. Prijelazom na imaginarno vrijeme, zauzvrat su postavljeni rubni uvjeti na polja u pitanju, zahvaljujući KMS [4] uvjetu, i to periodički za bozonska, a antiperiodički za fermionska polja, odnosno u slučaju baždarnih polja i polja tvari u QCD-u:

$$\begin{aligned} \text{gluon} &\rightarrow A_\mu(\vec{x}, \tau + \beta) = A_\mu(\vec{x}, \tau) \\ \text{kvark} &\rightarrow \psi(\vec{x}, \tau + \beta) = -\psi(\vec{x}, \tau) \end{aligned} \quad (34)$$

Ovdje je uvedeno najavljeno imaginarno vrijeme $\tau = it$. Jednostavan recept za prijelaz na konačnu temperaturu tada postaje diskretiziranje četvrte komponente impulsa:

$$\begin{aligned} \text{gluon} : p_4 &\rightarrow \omega_n = (2n + 1)\pi T \\ \text{kvark} : p_4 &\rightarrow \omega_n = 2n\pi T \\ p &\rightarrow p_n = (\omega_n, \vec{p}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_4}{2\pi} &\rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad (35)$$

4.2 Mase kvarkova

Poopćavanjem modela za konačne temperature slama se $O(4)$ simetrija i četvrta komponenta impulsa postaje diskretna varijabla. Propagator zahtijeva redefiniciju iz istih argumenata simetrije kao prije:

$$\begin{aligned} S_q^{-1}(p_n, T) &= i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p})A_q(p_n^2, T) + i(\gamma_4\omega_n)C_q(p_n^2, T) + B_q(p_n^2, T) \\ \Rightarrow S_q(p_n, T) &= \frac{B_q(p_n^2, T) - i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p})A_q(p_n^2, T) - i(\gamma_4\omega_n)C_q(p_n^2, T)}{d_q(p_n^2, T)} \\ d_q(p_n, T) &\equiv \vec{p}^2 A_q^2(p_n^2, T) + \omega_n^2 C_q^2(p_n^2, T) + B_q^2(p_n^2, T) \end{aligned} \quad (36)$$

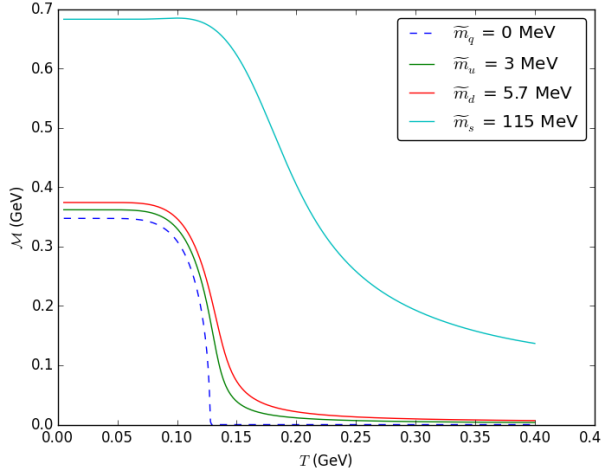
Uvrštavanjem danog propagatora u Dyson-Schwinger jednadžbu i postupnog izvlačenja tragova dobivaju se tri jednadžbe procjepa ovisne o temperaturi:

$$\begin{aligned} a_q(T) &= \frac{8D_1}{9} T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p}^2 \mathcal{F}_1(p_n^2) \frac{1 + \mathcal{F}_1(p_n^2)a_q(T)}{d_q(p_n^2, T)} \\ b_q(T) &= \frac{16D_0}{3} T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_0(p_n^2) \frac{\tilde{m}_q + b_q(T)\mathcal{F}_0(p_n^2)}{d_q(p_n^2, T)} \\ c_q(T) &= \frac{8D_1}{3} T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_n^2 \mathcal{F}_1(p_n^2) \frac{1 + \mathcal{F}_1(p_n^2)c_q(T)}{d_q(p_n^2, T)} \end{aligned} \quad (37)$$

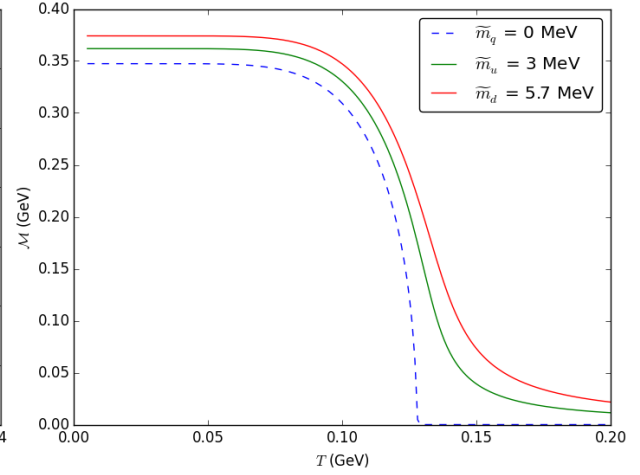
Kao i u slučaju za vakuum, različiti dijelovi gluonskog propagatora propadaju za različite koeficijente zbog parnosti funkcije unutar integrala. Definicije koeficijenata $a_q(T)$, $b_q(T)$ i $c_q(T)$ proizlaze iz koeficijenata iz jednadžbe (36) za propagator:

$$\begin{aligned} B_q(p_n^2, T) &= \tilde{m}_q + b_q(T)\mathcal{F}_0(p_n^2) \\ A_q(p_n^2, T) &= 1 + a_q(T)\mathcal{F}_1(p_n^2) \\ C_q(p_n^2, T) &= 1 + c_q(T)\mathcal{F}_1(p_n^2) \end{aligned} \quad (38)$$

Efektivna masa je i u ovom slučaju predstavljena odnosom $\mathcal{M}_q = \frac{B_q(p_n^2, T)}{A_q(p_n^2, T)}$ no koeficijenti sada ovise i o temperaturi. Koeficijenti se računaju rekurzivno, numerički, i rezultat je prikazan na slici (7), sa stranim kvarkom i bez njega.



Slika 7: Mase u , d i s kvarkova za $T \neq 0$, uz kiralni limes

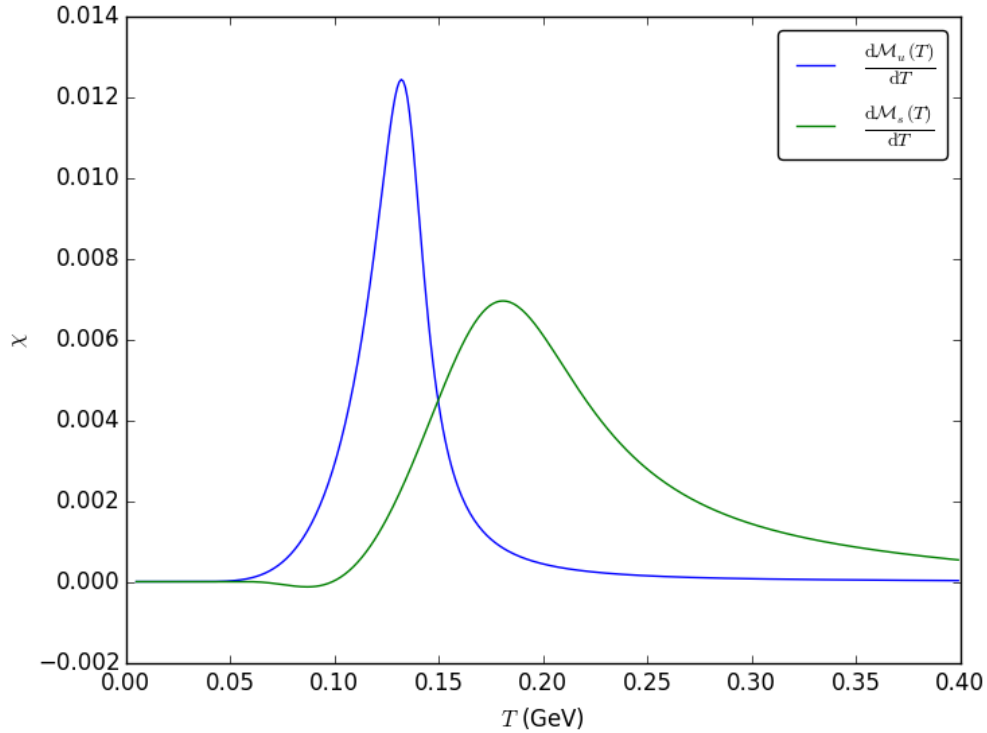


Slika 8: Mase u i d kvarkova za $T \neq 0$, uz kiralni limes

Rezultat opet svjedoči istom fenomenu, ispod neke kritične temperature efektivna masa kvarkova počinje naglo rasti sa svoje strujne vrijednosti, ali ovog puta u kiralnom slučaju na kritičnoj temperaturi masa ide točno u nulu. Naravno, u ovom naivnom modelu, temperatura prijelaza je različita za strani i laki sektor. Kao portret toga, daju se definirati generalizirane susceptibilnosti:

$$\chi_q = \frac{d\mathcal{M}_q}{dT} \quad (39)$$

Za maksimume susceptibilnosti pojedinih sektora se dobiva temperature prijelaza, koje se vide na slici (9). Laki kvarkovi su udruženi, pa je gledano samo $m_q = m_d \approx m_u$.



Slika 9: Generalizirane susceptibilnosti

Kritična temperatura za strani kvark je u ovom modelu $T_s = 181$ GeV, a za u kvark $T_u = 132$ GeV, i one su vidljivo različite, što je nerealno, očekuje se da se fazni prijelaz

za sve sektore dogodi na istoj temperaturi. U kiralnom slučaju može se razmatrati tzv. pseudokritična temperatura $T_\chi = 128$ GeV.

Sinkroniziranje prijelaza za razne okuse može se modelirati tzv. petljom Polyakova, kao što je učinjeno u [2]. Definira se termodinamički Landauov potencijal u kojem ulogu parametra uređenja igra kiralni kvarkovski kondenzat, definiran kao:

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_{\bar{m}_q=0} &= -N_c \text{tr}_s S_0(x, x) \\ &= -4N_c T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{b_0(T)\mathcal{F}_0(p_n^2)}{d_0(p_n^2, T)}\end{aligned}\quad (40)$$

Time se efektivno u termodinamički model uključuje pozadinsko gluonsko polje. Potencijal će tada također doživljavati neki maksimum na temperaturi dekonfinacije T_d , no kritične temperature se izjednačavaju za svaki sektor upravo na toj temperaturi i promatranjem susceptibilnosti ustanovi se da vrijedi $T_d = T_\chi = T_s = T_u$.

4.3 Mase mezona

Analogno vakuumskom slučaju, u korelacijskoj funkciji postoje za $\lambda(P^2) \rightarrow \lambda(\nu_m^2, \vec{P}^2; T)$ polovi, gdje je imaginarna energetska os diskretizirana sa $P = (\nu_m^2, \vec{P})$. Nule funkcije $1 - \tilde{\lambda}(\nu_m^2, 0; T)$ karakterizirat će temporalne mase, a nule funkcije $1 - \tilde{\lambda}(0, \vec{P}^2; T)$ spacijalne - za samo približno slomljenu O(4) simetriju (niske temperature) one će biti gotovo degenerirane, očekivano barem do temperature ~ 100 MeV [3]. Iznad te temperature, temporalne i spacijalne mase opisuju druge aspekte modova vezanih stanja. Ovdje su promatrani prostorni modovi, i za njih BSE glasi:

$$\begin{aligned}-\tilde{\lambda}(0, \vec{P}^2; T)\Gamma_{qq'}(p_m, \vec{P}) &= \frac{4}{3}T \sum_n \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(\omega_\mu - \omega_\nu, \vec{p} - \vec{l}) \times \\ &\quad \times \gamma_\mu S_q((l_n)_+) \Gamma_{qq'}(l_m, \vec{P}) S_{q'}((l_n)_-) \gamma_\nu\end{aligned}\quad (41)$$

Predlošci za amplitude sada izgledaju kao:

$$\begin{aligned}\Gamma_P(l_n, \vec{P}) &= \gamma_5 (iE_P(\vec{P}^2) + (\vec{P} \cdot \vec{\gamma}) F_P(\vec{P}^2)) \mathcal{F}_0(l_n^2) \\ \Gamma_S(l_n, \vec{P}) &= E_S(\vec{P}^2) \mathcal{F}_0(l_n^2)\end{aligned}\quad (42)$$

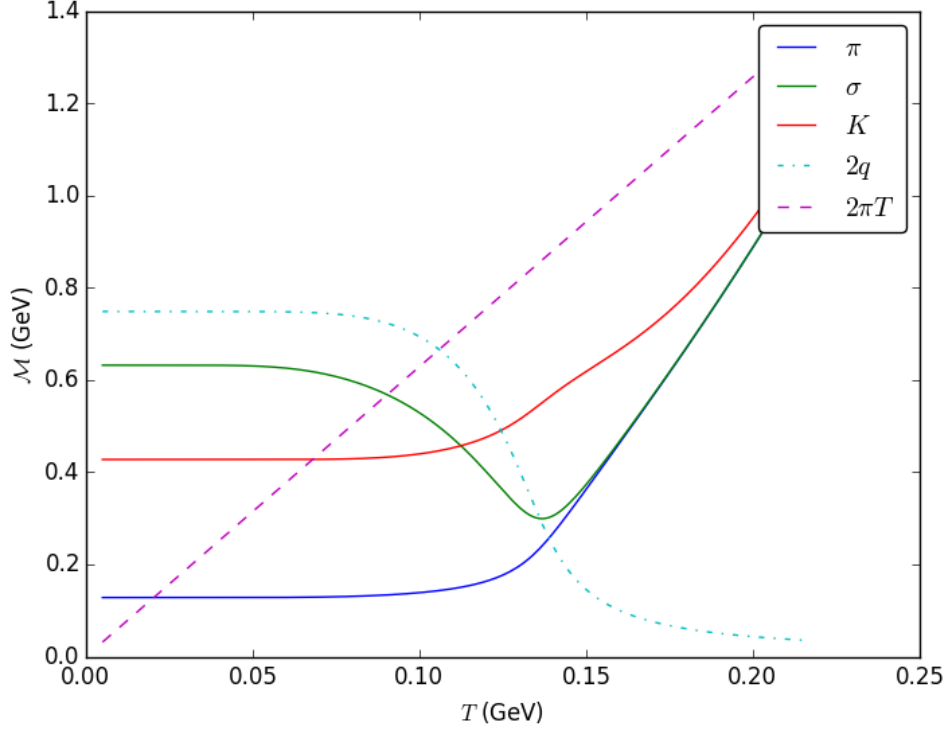
Korelacijska funkcija imat će pol za $1 - \tilde{\lambda}(0, \vec{P}^2 = -M^2; T) = 0$. Radi potpunosti, dan je i konačan izgled funkcionalne ovisnosti svojstvene vrijednosti za lagani skalarni mezon:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(0, \vec{P}^2; T)_S &= \frac{16D_0}{3} T \sum_n \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_0^2(l_n^2) [\omega_n^2 \sigma_{C,u}((l_n)_+) \sigma_{C,u}((l_n)_-) \\ &\quad \left(\vec{l}^2 - \frac{\vec{P}^2}{4} \right) \sigma_{A,u}((l_n)_+) \sigma_{A,u}((l_n)_-) - \sigma_{B,u}((l_n)_+) \sigma_{B,u}((l_n)_-)]\end{aligned}\quad (43)$$

Uvedene su pokrate:

$$\sigma_{A,q}((l_n)_\pm) = \frac{A_q((l_n)_\pm)}{d_q((l_n)_\pm)} \quad \sigma_{B,q}((l_n)_\pm) = \frac{B_q((l_n)_\pm)}{d_q((l_n)_\pm)} \quad \sigma_{C,q}((l_n)_\pm) = \frac{C_q((l_n)_\pm)}{d_q((l_n)_\pm)}\quad (44)$$

Za pseudoskalarne mezone opet treba rješavati netrivialan matrični problem svojstvenih vrijednosti koji je dodatno zakompliciran slomljenom O(4) simetrijom, pa jednadžbe za njihove svojstvene vrijednosti ovdje nisu eksplicitno navedene. Vektorski mezoni nisu razmatrani u ovom radu uopće, ali bi proširenje modela bilo moguće uz predloške za vektorsku BS amplitudu.



Slika 10: Mase mezona na konačnoj temperaturi

Na slici (10) prikazane su dobivene mase pseudoskalarnih i skalarnih mezona uključenih u razmatranje. Otprilike nešto iznad kritične temperature T_u susreću se linije efektivnih masa piona, σ -mezona i dva kvarka, te σ i π postaju degenerirani. Tu se očekuje dekonfinacija i stvaranje kvark-gluon plazme, ali je kritična temperatura u korištenom modelu nerealistično niska. Također, $2q$, σ i π se ne susreću egzaktno u jednoj točki. Oba efekta mogu se popraviti uvođenjem pozadinskog gluonskog polja pomoću petlje Polyakova. Svi mezoni daleko iznad kritične temperature teže u $2\pi T$, odnosno dinamički generirana masa postaje zanemariva, prostorna masa se približava termalnoj masi para bezmasenih kvarkova. Može se zaključiti da je fenomenologija QCD-a na konačnim temperaturama ovim vrlo jednostavnim modelom opisana zadivljujuće dobro za primjere koji su razmatrani.

5 Numeričke metode

5.1 Integriranje

Tokom računa trebalo je integrirati netrivialne višedimenzionalne funkcije. Kao najpogodniji način za računanje integrala pokazalo se aproksimiranje integrala kvadraturom. Za integrale po kutu između impulsa koristila se Gauss-Legendre kvadratura:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (45)$$

Za sam impuls, Gauss-Laguerre kvadratura:

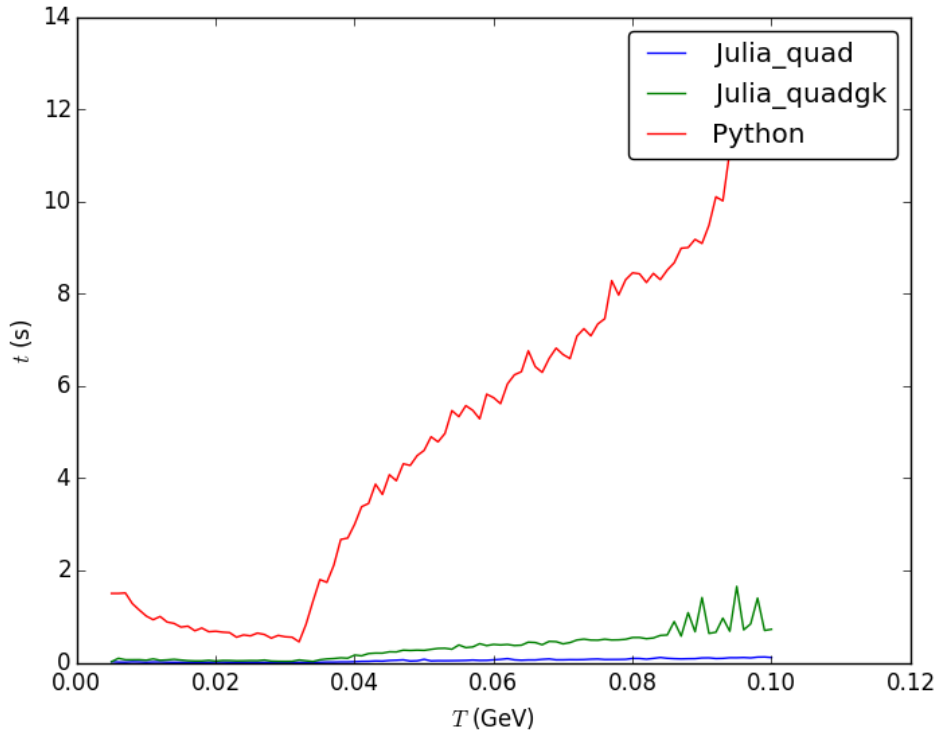
$$\int_0^{\infty} e^{-x} g(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w'_i g(x_i) \quad (46)$$

Esencijalno, ova metoda izabere n točaka koje su distribuirane u ovisnosti o kvadraturi (za Laguerre kvadraturu gušće su blizu nule), te onda računa vrijednosti funkcije u tim točkama pomnožene sa određenim težinama. Open source programski jezik *Julia*, koji je korišten prilikom računanja pokazao se kao jako spretno prilikom ovakvih računa, a integrali relativno

brzo konvergiraju u svoje prave vrijednosti. Trebalo je biti oprezan, doduše. Prilikom traženja nultočki funkcije $1 - \tilde{\lambda}(0, \bar{P}^2; T)$, na primjer, integral jako sporo konvergira za velike vrijednosti \bar{P}^2 [5] (odnosno treba uzeti dovoljno korijena za kvadraturu). Nule su tražene pomoću funkcije "fzero" iz paketa "Roots", i rješenja najbrže konvergiraju sa zadanom tačnošću za Steffensenovu metodu reda 2 (nije računata derivacija funkcije čije se nule traže). Metoda reda 8 je ponekad brža ali je za niske impulse u nekim slučajevima odbijala konvergirati.

5.2 Julia

Julia je novi programski jezik sa jezgrom koja nameće vrlo malo, i brzo rastućom zajednicom koja entuzijastično razvija knjižnice pisane u istom jeziku. Python, s druge strane ima bezbroj paketa koji su napisani u raznim drugim jezicima, dok je jezgra samog jezika sitna. Posljedica toga je da je nekad teško vršiti numeričke račune brzo, jer se tokom interpretiranja kompajliraju drugi jezici. Napravljena je stoga jednostavna usporedba brzine integriranja jednadžbi procjepa za raspon temperatura od 0 do 0.1 GeV u 3 slučaja. Prvi je vršen u Pythonu pomoću implementirane funkcije "quad" iz paketa "integrate" knjižnice "scipy", a druga dva u Juliji, jedna je rukom unesena metoda koja koristi Laguerre kvadraturu generiranu paketom "GaussQuadrature", a druga koristi funkciju "quadgk" iz same jezgre.



Slika 11: Mase mezona na konačnoj temperaturi

Rezultati su na slici (11) i vrlo su pristrani. Dok se na kritičnim mjestima u integralu (tamo gdje je derivacija najveća) Python mučio i po 15ak sekundi za datu temperaturu, rukom rađena kvadratura radila je u redovima veličine desetinske sekunde. Implementirana funkcija "quadgk" radila je nešto sporije, ali svejedno oko 10 puta brže. Za konačan integral, na datom rasponu od 0.1 GeV Juliji je u bržem slučaju trebalo svega 5.5 sekundi, u sporijem (zapisom jednostavnijem) 33.3 sekundi, dok je Pythonu trebalo sporih 7 minuta i 42 sekunde. Julia se pokazala kao nezaobilazan alat u numeričkim računima, što ova jednostavna analiza pokazuje.

Bibliografija

- [1] D. Blaschke, D. Horvatic, D. Klabucar, A. E. Radzhabov *Separable Dyson-Schwinger model at zero and finite T* 2007
- [2] D. Horvatic, D. Blaschke, D. Klabucar, O. Kaczmarek *Width of the QCD transition in a Polyakov-loop DSE model* 2010
- [3] D. Blaschke, G. Bureau, Yu. L. Kalinovsky, P. Maris, P. C. Tandy *Finite T meson correlations and quark deconfinement* 2000
- [4] P. C. Martin, J. Schwinger *Theory of Many-Particle Systems. I* 1959
- [5] M. Blank *Properties of quarks and mesons in the Dyson-Schwinger/Bethe-Salpeter approach* 2011
- [6] R. Williams *Schwinger–Dyson Equations In QED and QCD* 2007