Nasljeđivanje simetrija u gravitacijskim teorijama

Irena Barjašić
Mentor: doc.dr. sc. Ivica Smolić
Fizički odsjek, Prirodoslovno matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu
12. siječnja 2017.

Simetrija prostor-vremena generirana Killingovim poljem koje ostavlja metriku invarijantnom na translaciju ne povlači nužno invarijantnost polja unutar tog prostor vremena nakon iste translacije. U ovom seminaru bavimo se proučavanjem neminimalno vezanih skalarnih polja te uvjeta koje ista moraju ispuniti kako bi naslijedila simetriju prostor-vremena.

1 Uvod

1.1 Nasljeđivanje simetrija

Glatko vektorsko polje čiji lokalni difeomorfizam čuva geometrijske značajke prostor-vremena nazivamo simetrijom prostor-vremena. Kao geometrijske značajke podrazumijevamo tenzore prostor-vremena (metriku, tenzor energije i momenta) ili strukturu geodezika. Ako je geometrijska značajka u pitanju metrika, vektorsko polje nazivamo Killingovo te ono čini jednu od najvažnijih vrsta simetrija. Dakle, Liejeva derivacija metrike po Killingovom polju ξ^a iščezava:

$$\pounds_\xi g_{ab} = 0 \tag{1}$$

Za neko polje χ kažemo da je naslijedilo simetriju prostor-vremena ako njegova derivacija po tom isto Killingovom polju također iščezava:

$$\pounds_\xi \chi = 0 \tag{2}$$

Nasljeđivanje simetrije za određeno polje nije nužno te ovisi o prirodi polja i vrsti simetrije.
Promatramo li kao primjer polja elektromagnetsko, znamo [1] da za polje bez izvora, gdje vrijedi (1), imamo:

$$\pounds_\xi F_{ab} = \Psi * F_{ab} \tag{3}$$

U slučaju svjetlosnog elektromagnetskog polja ($F_{ab}F^{ab} = F_a b * F^{ab} = 0$) Ψ je konstanta, dok je za nulpolje s ponovljenim glavnim svjetlosnim smjerom k^a Ψ određen sa $\Psi_{,[a}\, k_{b]} = 0$. Možemo reći da je simetrija naslijeđena ako vrijedi $\Psi = 0$. Potrebno je napomenuti da jednadžba (2) vrijedi samo u 4 dimenzije jer je onda Hodgeov dual $*F_{ab}$ tenzor drugog reda $(4-2=2)$ kao i sam F_{ab} te mogu biti kolinearni. Za prostor-vrijeme u tri dimenzije pokazano je [2] da za širok spektar teorija elektromagnetsko polje nasljeđuje simetriju, no za $D > 4$ još ne postoje slični rezultati.

Nasljeđivanje simetrija skalarnih polja igra bitnu ulogu u "no-hair" teoremima crnih rupa. Pretpostavka da crne rupe nemaju kosu slikovito opisuje stacionarne konfiguracije konačnog stanja crnih rupa nakon gravitacijskog kolapsa materije; svi parametri osim mase, naboja i angularnog momenta same crne rupe nestaju iza horizonta te ih je nemoguće opaziti. Prilikom izvođenja samog dokaza [3] od skalarnog polja u igri traži se da naslijedi simetrije prostor-vremena, pa iznimke iz teorema lako nađemo kod polja koja ne ispunjavaju taj zahtjev. Poznati primjer je Wymanovo rješenje [4] , gdje realno skalarno polje s linearnom ovisnošću o vremenu ne nasljeđuje simetriju statičnog prostor-vremena, a nedavno je otkrivena [5] i kompleksna kosa na Kerrovim crnim rupama. Istraživanja su orijentirana i prema trodimenzionalnim crnim rupama, no zasad postoje samo perturbativni numerički rezultati koji sugeriraju nepostojanje kose [6].

1.2 Lagrangeova formulacija opće relativnosti

Iako je opća relativnost potpuno izražena Einsteinovom jednadžbom polja $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$, potreba za proučavanjem lagrangijana pojavljuje se svaki put kad od klasične teorije pokušamo napraviti kvantnu teoriju polja [7]. Lagrangijan je nužan u formulaciji preko integrala puta koji generalizira princip akcije iz klasične mehanike, te na putu prema kvantnoj gravitaciji igra važnu ulogu.

Kako bi započeli Lagrangeovu formulaciju, promotrimo tenzorska polja ψ na mnogostrukosti M, indekse u notaciji nećemo pisati. $S[\psi]$ je funkcional od ψ, preslikava konfiguracije polja s M u brojeve. Neka je ψ_λ glatka jednoparametarska obitelj konfiguracija polja počevši od ψ_0. Označimo $\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}|_{\lambda=0}$ sa $\delta\psi$ i pretpostavimo da $\frac{dS}{d\lambda}|_{\lambda=0} = 0$ postoji za sve takve obitelji. Uz to pretpostavimo postojanje glatkog tenzorskog polja χ koje je dual polju ψ tako da za sve obitelji imamo:

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \chi\delta\psi \tag{4}$$

χ nazivamo funkcionalna derivacija od S.

$$\chi = \frac{\delta S}{\delta\psi}_{\psi_0} \tag{5}$$

Ako pogledamo funkcional S oblika:

$$S[\psi] = \int_M \mathscr{L}[\psi] \tag{6}$$

gdje je L funkcija od ψ i konačnog broja njegovih derivacija:

$$\mathscr{L}|_x = \mathscr{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), ..., \nabla^k\psi(x)) \tag{7}$$

i pretpostavimo da je S funkcionalno diferencijabilna i da su konfiguracije polja ψ za koje je S ekstremalna upravo one koja su rješenja jednadžbe polja za ψ:

$$\frac{\delta S}{\delta\psi}_{\psi} = 0 \tag{8}$$

tada je S akcija, a $\mathscr{L}$ gustoća lagrangijana, čijim određivanjem dobivamo Lagrangeovu formulaciju teorije polja.

Analogno Lagrangeovoj formulaciji u klasičnoj mehanici, gdje je funkcional akcije S integral lagrangijana po putu te se varijacijama konačnih puteva između dviju točaka S ekstremizira, u teoriji polja promatramo kompaktnu regiju U na mnogostrukosti M na kojoj jednoparametarske obitelji ψ_λ imaju konstantnu vrijednost ψ na granici skupa ∂U .

Kao primjer uzmimo gustoću lagrangijana Einsteinove jednadžbe u prostoru s masenim poljem:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_G + \alpha_M\mathscr{L}_M \tag{9}$$

gdje se $\mathscr{L}_G$ odnosi na Einsteinovu gustoću lagrangijana, dok je $\mathscr{L}_M$ gustoća lagrangijana za maseno polje uz koju stoji α_M konstanta vezanja. Izraz za $\mathscr{L}_G$ glasi:

$$\mathscr{L}_G = \sqrt{-g}R \tag{10}$$

uz g kao determinantu metrike, a za $\mathscr{L}_M$ biramo neko maseno polje, npr. Klein-Gordonovo ili Maxwellovo. Uvrštavanjem u akciju (5) te variranjem prvo gravitacijskog dijela lagrangijana:

$$\frac{d\mathscr{L}_G}{d\lambda} = \sqrt{-g}(\delta R_{ab})g^{ab} + \sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + R\delta(\sqrt{-g}) \tag{11}$$

i uz već poznate izraze iz [7] za prvi i treći član:

$$g^{ab}\delta R_{ab} = \nabla^a(\nabla^b(\delta g_{ab}) - g^{cd}\nabla_a(\delta g_{cd})) \equiv \nabla^a v_a \tag{12}$$

$$\delta(-\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab} \tag{13}$$

konačno dobijemo varijaciju akcije:

$$\begin{aligned}\frac{dS_G}{d\lambda} = \int \frac{d\mathscr{L}_G}{d\lambda}e = \int \nabla^a v_a\sqrt{-g}e \\ + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right)\delta g^{ab}\sqrt{-g}e\end{aligned} \tag{14}$$

Prvi član s desne strane je integral divergencije po prirodnom elementu volumena pa će po Stokesovom teoremu iščeznuti ako je prva derivacija g^{ab} konstantna na rubu te od (13) dobivamo:

$$\frac{\delta S_G}{\delta g^{ab}} = \sqrt{-g}\left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right) \tag{15}$$

Preostaje nam varijacija masenog dijela akcije iz koje se računa tenzor momenta i energije:

$$\alpha_M\frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = -8\pi\sqrt{-g}T_{ab} \tag{16}$$

gdje su dodane odgovarajuće konstante zbog normalizacije. Zbrajanjem tih dvaju doprinosa dobije se Einsteinova jednadžba polja s konstantom vezanja $\alpha_M = 1$ u sustavu prirodnih jedinica:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi}{\alpha_M}T_{ab} \tag{17}$$

1.3 Neminimalno vezanje

Nakon upoznavanja s primjerom gustoće lagrangijana u kojem su gravitaciijski i maseni dio odvojeni, prirodno bi bilo proučiti i poopćenje u kojem ima miješanih članova. Opća relativnost, čiji je opis gravitacije u dobrom slaganju s dosadašnjim mjerenjima, ipak ostavlja mnoga pitanja neodgovorena te su problemi kvantizacije gravitacije, kozmološke inflacije i mnogi drugi izvan njenog dosega. U nedavno objavljenim radovima [8] tome je pristupljeno poopćenjem funkcionala akcije, tako da se doda član u kojem je funkcija Riccijevog skalara $H(R)$ neminimalno vezana sa skalarnim poljem:

$$\mathscr{L}\sqrt{-g} = \left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}\nabla^c\phi\nabla_c\phi - V(\phi) - H(R)f(\phi)\right]\sqrt{-g} \tag{18}$$

koje u ovom slučaju Klein-Gordonovo. Izbor za $H(R)$ je R i $f(\phi) = \frac{\xi}{2}\phi^2$. Skalarno polje u modelu kozmološke inflacije predstavlja "kvintesenciju" , oblik materije s negativnim tlakom koja bi uzrokovala ubrzano širenje svemira. Također, kod primjene kvantnih korekcija na neku klasičnu teoriju, neminimalno vezanje potrebno je da bi teorija bila renormalizabilna. Parametar ξ poprima vrijednost ovisno o teoriji gravitacije i skalarnom polju koje opisuje, a kad je riječ o GUT-teorijama ξ nije konstantan, već ovisi o parametru renormalizacijske grupe τ.

Dotaknemo li se ponovno teme "no hair" teorema, možemo naći članke [9] koji u novije vrijeme pokušavaju istražiti koji su uvjeti potrebni da skalarno polje iščezne oko crne rupe i u neminimalnom vezanju. Za kvartičnu samointerakciju polja Bekensteinov teorem je potvrđen za sve vrijednosti ξ, dok u slučaju bez samointerakcije postoji stabilna kosa oko crne rupe za određene ξ i Λ

2 Nasljeđivanje simetrije neminimalno vezanog skalarnog polja

Glavno pitanje na koje smo ovim seminarom pokušali dati odgovor je nasljeđuju li neminimalno vezana skalarna polja simetrije prostor-vremena u kojem obitavaju. Počnemo od općenitog oblika akcije:

$$S = S_g + S_\phi + S_{\phi g} = \int d^D x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}\mathscr{L}_g + \mathscr{L}_\phi + \mathscr{L}_{\phi g}\right) \tag{19}$$

za konstantu $\kappa = 8\pi G$ biramo $\kappa = 1$. Lagrangijane smo izabrali redom:

$$\mathscr{L}_g = R - 2\Lambda \tag{20}$$

kao gravitacijski, gdje se zasad ograničavamo na opću relativnost,

$$\mathscr{L}_\phi = X - V(\phi) \tag{21}$$

$$X = -\frac{1}{2}\nabla_c\phi\nabla^c\phi \tag{22}$$

kao lagrangijan Klein-Gordonovog skalarnog polja i

$$\mathscr{L}_{\phi g} = -f(\phi)R \tag{23}$$

kao miješani član. Akciju variramo po parametrima g^{ab} i ϕ , dio uz δg^{ab} čini gravitacijsku jednadžbu gibanja:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = 0 = \frac{1}{2\kappa}E_{ab} - \frac{1}{2}T_{ab} - f(\phi)G_{ab} \tag{24}$$

$$-2\kappa f(\phi)G_{ab} + E_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{25}$$

gdje su $E_{ab} = G_{ab} + \Lambda g_{ab}$ i $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$, a tenzor energije i impulsa:

$$\begin{aligned} T_{ab} &\equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\phi}{\delta g^{ab}} \\ &= \nabla_a\phi\nabla_b\phi + (X - V(\phi) + 2\Box f(\phi))g_{ab} - 2\nabla_a\nabla_b f(\phi) \end{aligned} \tag{26}$$

Derivacije funkcije $f(\phi)$ možemo dalje raspisati kao:

$$\begin{aligned} \nabla_a\nabla_b f(\phi) &= \nabla_a(f'(\phi)\nabla_b\phi) \\ &= f''(\phi)\nabla_a\phi\nabla_b\phi + f'(\phi)\nabla_a\nabla_b\phi \end{aligned}$$

$$\Box f(\phi) = -2Xf''(\phi) + f'(\phi)\Box\phi \tag{28}$$

što nam omogućuje kompaktniji zapis tenzora energije i impulsa:

$$\begin{aligned} T_{ab} =& (1 - 2f'')\nabla_a\phi\nabla_b\phi \\ &+ ((1 - 4f'')X - V + 2f'\Box\phi)g_{ab} - 2f'\nabla_a\nabla_b\phi \end{aligned} \tag{29}$$

Dio uz $\delta\phi$ daje Klein-Gordovonu jednadžbu gibanja:

$$\Box\phi = V'(\phi) + f'(\phi)R \tag{30}$$

Sad uzimamo Killingovo polje K^a za koje vrijedi $\pounds_K g_{ab} = 0$ te pokušavamo vidjeti povlači li to $\pounds_K \phi = 0$. Za polje K^a pretpostavljamo da vrijedi uvjet statičnosti $K \wedge dK = 0$, tj. da za vektorsko polje K^a postoji obitelj ploha na koju je ono ortogonalno u svim točkama. Još kažemo da je takvo polje ortogonalno-tranzitivno. Upotrijebimo jednakost iz [10]:

$$d\omega = *(K \wedge R(K)) \tag{31}$$

i definiciju tenzora rotacije $\omega = \frac{1}{2}K \wedge dK$ kako bismo vidjeli da statičnost povlači Riccijevu statičnosti $K \wedge R(K) = 0$. Raspišemo li:

$$K \wedge E(K) = K \wedge (R(K) - \frac{1}{2}Rg(K) + \Lambda g(K)) = 0 \tag{32}$$

ili u tenzorskom zapisu $E_{ab}K^b \sim K_a$. Budući da je polje K^a ortogonalno-tranzitivno, iz (32) vidimo da tenzor zakrivljenosti E_{ab} također pripada ortogonalno-tranzitivnoj klasi. Dakle, u daljnjem računu ograničili smo se na tenzore iz te klase, npr. zbroj Einsteinovog tenzora i kozmološkog člana, općenitu diferencijabilnu funkciju Riccijevog skalara f(R) ili Lovelockovo popćenje Einsteinovog tenzora na više dimenzije [11]. Iz istog razloga vrijedi i $G_{ab}K^b \sim K_a$. Možemo uvesti konstante proporcionalnosti λ_E i λ_G te djelovati Liejevom derivacijom na $E(K)_a$ i $G(K)_a$,dobit ćemo nulu zbog uvjeta ortogonalnosti:

$$\pounds_K E(K)_a = K_a \pounds_K \lambda_E = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pounds_K \lambda_E = 0 \tag{33}$$
$$\pounds_K G(K)_a = K_a \pounds_K \lambda_G = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pounds_K \lambda_G = 0 \tag{34}$$

Pomnožimo li (24) s $K^a(\nabla^b\phi)$ i promotrimo prvo faktor E_{ab} dobit ćemo:

$$K^a(\nabla^b\phi)E_{ab}K^a = \lambda_E K_b \nabla^b = \lambda_E \pounds_K \phi \equiv \lambda_E \dot{\phi} \tag{35}$$

Analogno pogledamo i za G_{ab}:

$$K^a(\nabla^b\phi)G_{ab}K^a = \lambda_G K_b \nabla^b\phi = \lambda_G \pounds_K \phi \equiv \lambda_G \dot{\phi} \tag{36}$$

Još nam preostaje rezultat za T_{ab} :

$$\begin{aligned} &K^a(\nabla^b\phi)T_{ab} = K^a(\nabla^b\phi)(\nabla_a\phi\nabla_b) \\ &\quad +(X - V(\phi) + 2\Box f(\phi))\dot{\phi} + 2K^a(\nabla^b\phi)\nabla_a\nabla_b f(\phi) \\ &K^a(\nabla^b\phi)T_{ab} = (-X - V(\phi) + 2f'(\phi)\Box\phi)\dot{\phi} \\ &\quad -2K^a(\nabla^b\phi)\nabla_a\nabla_b f(\phi) \end{aligned} \tag{37}$$

U prvom članu s desne strane uspjeli smo grupirati sve članove uz Liejevu derivaciju polja ϕ, no preostao nam je još drugi član kojeg sređujemo uz pomoć (26):

$$\begin{aligned} K^a(\nabla^b\phi)(\nabla_a\nabla_b f) &= -2Xf'\dot{\phi} + fK^a\nabla^b(\nabla_a\nabla_b\phi) \\ &= -2Xf''\dot{\phi} + \frac{1}{2}K^a\nabla_a(\nabla^b\phi\nabla_b\phi) \\ &= -2Xf'\dot{\phi} - f'K^a\nabla_a X \end{aligned} \tag{38}$$

Sad (36) možemo napisati kao zbroj člana s $\dot{\phi}$ i člana s $\dot{X}$:

$$K^a(\nabla^b\phi)T_{ab} = (-X - V(\phi) + 2f'(\phi)\Box\phi)\dot{\phi} + 2f'(\phi)\dot{X} \tag{39}$$

Sveukupno, djelovanjem $K^a(\nabla^b\phi)$ na (24) dobili smo:

$$(-2\kappa\lambda_G f + \lambda_E)\dot{\phi} = \kappa K^a(\nabla^b\phi)T_{ab} \tag{40}$$

Budući da nam je u cilju svesti (39) na umnožak neke zagrade i $\dot{\phi}$ jednak nuli, kako bismo mogli reći da je jedini uvjet uz koji se simetrija ne nasljeđuje jednakost te zagrade nuli, moramo prvo izraziti X iz traga tenzora momenta i energije:

$$\begin{aligned} T \equiv& g^{ab}T_{ab} = ((D-2) - 4(D-1)f'')X \\ &- DV + 2(D-1)f'\Box\phi \end{aligned} \tag{41}$$

Za sve izbore $f(\phi)$ osim $\frac{\phi^2}{12}$ i $D = 4$ na ovaj način možemo izlučiti X uz (29) kao:

$$X = \frac{\frac{1}{\kappa}g^{ab}E_{ab} - 2fg^{ab}G_{ab} + DV - 2(D-1)f'(V' + f'R)}{(D-2) - 4(D-1)f''} \tag{42}$$

Liejevu derivaciju od X možemo dobiti upotrebom *Mathematice* te je zbog dužine izraza ovdje ne navodimo, no iz nje se vidi da je iz (39) moguće izlučiti $\dot{\phi}$ koji množi zagrada. Jednadžba se onda grana u dva slučaja u kojima je jedan od faktora nužno nula. Slučaj u kojem je $\dot{\phi} = 0$ daje nam pozitivan odgovor na pitanje o nasljeđivanju simetrija, dok je slučaj gdje je zagrada jednaka nuli potrebno pomnije proučiti te vidjeti kakve fizikalne implikacije ima za različite izbore funkcije $f(\phi)$, potencijala $V(\phi)$ i tenzora zakrivljenosti E_{ab}, što ostavljamo za daljnje istraživanje.

3 Zaključak

Kao što smo vidjeli, nasljeđivanje simetrija prostor vremena igra važnu ulogu u konstituiranju brojnih teorema u gravitaciji i kozmologiji. Nakon upoznavanja s osnovnim matematičkim alatima korištenim u formulaciji problema o nasljeđivanju simetrija neminimalno vezanih polja napravljen je detaljan raspis. Uvedeno je Killingovo polje za koje su pretpostavljene posebne restrikcije statičnosti i Ricci statičnosti $K \wedge dK = 0$ i $K \wedge R(K) = 0$, u odnosu na koje su se promatrale simetrije, a za gravitacijsku teoriju odabran je poseban slučaj opće relativnosti. Na kraju su dobivena dva slučaja, prvi u kojem je $\pounds_K \phi = 0$ te je pretpostavka o nasljeđivanju simetrije potvrđena i drugi, u kojem je potrebno raspisivanjem dobivenog izraza u zagradi i uvrštavanjem određenih $f(\phi)$,$V(\phi)$ i E_{ab} vidjeti pod kojim uvjetima je jednak nuli te koje je njihovo fizikalno značenje. Idealan rezultat bi pokazao da niti jedan od tih uvjeta nije fizikalno ostvariv te da je simetrija potpuno naslijeđena, a ukoliko se ne pokaže da je tako, napravili bismo klasifikaciju tih uvjeta u kojima je simetrija narušena. Ipak, taj problem ostavljamo izvan granica ovog seminara kao otvoreno pitanje.

4 Zahvale

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Ivici Smoliću na trudu oko pronalaska adekvatne teme, vremenu uloženom za objašnjavanje problematike, strpljenju i pomoći oko izrade ovog seminara.

Literatura

[1] Stephani H, Kramer D, MacCallum M, Hoenselaers C, Herlt E: Exact Solutions of Einstein's Field Equations

[2] Cvitan M, Dominis Prester P, Smolić I 2016 Does three-dimensional electromagnetic field inherit the spacetime symmetries? *Class. Quantum Grav.* 33 077001

[3] Bekenstein J D 1972 Nonexistence of baryon number for black holes: II. *Phys. Rev.* D

[4] Wyman M 1981 Static spherically symmetric scalar fields in general relativity *Phys. Rev.* D 24 839-41

[5] Herdeiro C A R and Radu E 2014 Kerr black holes with scalar hair *Phys. Rev. Lett.* 112 221101

[6] Stotyn S, Mann R 2012 Another mass gap in the BTZ geometry?

[7] Wald R 1984 *General Relativity* (Chicago, IL: University of Chicago Press)

[8] Faraoni V 2000 Inflation and quintessence with nonminimal coupling *Phys. Rev.* D 62 023504

[9] Winstanley E 2005 Dressing a black hole with nonminimally coupled scalar field hair *Class. Quantum Grav.* 22 2233-2247

[10] Heusler M: Black Hole Uniqueness Theorems (Cambridge Lecture Notes in Physics)

[11] Smolić I 2017 Constraints on the symmetry noninheriting scalar black hole hair