

Put prema anyonima u ultrahladnim plinovima: analogija sa frakcijskim kvantnim Hallovim efektom

Matija Medvidović

19. siječnja 2017.

Samostalni seminar iz istraživanja u fizici
Mentor: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Sažetak

U ovom seminaru razmatramo općenita svojstva anyona - čestica frakcijske statistike koji nisu ni fermioni ni bozoni te pokušavamo modelirati sustav u kojem bi oni bili vidljivi. Ultrahladni plinovi su jedan takav sustav kojim lako možemo manipulirati u eksperimentalnom okruženju stoga proučavamo poznati Hofstadterov hamiltonijan za više čestica i prilagođen uvjetima u kojima u teoriji susrećemo anyonska pobuđenja. Numeričkim izračunima osnovnog stanja nismo pronašli višeznačnost valne funkcije koja bi ukazivala na anyone, ali smo uspjeli rekonstruirati poznata svojstva odabranog hamiltonijana.

1 Uvod

Neraspoznatljivost čestica fundamentalni je princip kvantne mehanike. U statističkoj fizici, na makroskopskoj razini, on je uveo faktor koje je riješio Gibbsov paradoks, a na mikroskopskoj regulira dopuštene višestručne valne funkcije. Tako raspoznajemo dva diskretna slučaja - fermione i bozone koji imaju drastično različita ponašanja.

Anyoni na prvi pogled samo predstavljaju zanimljiv teorijski pokušaj neprekidne interpolacije fermionskog i bozonskog ponašanja. No, naposljetku su nađeni u stvarnom fizikalnom sustavu - ispostavilo se da takva pobuđenja (frakcijskog naboja) igraju važnu ulogu u osnovnom stanju elektronske "tekućine" koja se pojavljuje pri kvantnom Hallovom efektu (QHE). Teorijski podlogu njihovom izučavanju u tom primjeru dao je R. Laughlin dok je K. Klitzing primio Nobelovu nagradu za povezana eksperimentalna opažanja.

Smanjenjem dimenzionalnosti sustava (pri QHE elektroni su zarobljeni u dvije dimenzije) topološka ograničenja onemogućuju slobodan obilazak čestica i mogući broj stanja koje doprinose općenitoj linearnoj kombinaciji se povećava. Iako su sve elementarne čestice strogo fermioni ili bozoni (s obzirom na spin-statistika teorem), još uvijek je otvoreno

pitanje u fizici, koja sve kvazičestična pobuđenja u sustavima niže dimenzionalnosti mogu pokazivati anyonsko ponašanje. Matematički, anyoni se dijele na abelove i ne-abelove. Devedesetih godina je naglo porastao interes za izučavanjem frakcijskih statistika obje vrste anyona s konačnim ciljem pronalaska ne-abelovih - oni se mogu upotrijebiti u kvantnim računalima. Ako uzmemo u obzir nedavni tehnološki napredak eksperimentalne metode preciznog krojenja sintetičkih potencijala u ultrahladnim plinovima, lako je shvatiti da je potraga za anyonima dobila novi način za nastavak.

Cilj ovog seminara je osmišljavanje jednostavnog sustava kojeg bismo mogli proučavati anyone u eksperimentalnom okruženju manipulacije ultrahladnim plinovima. Taj sustav uzimamo kao jednostavnu kvadratnu rešetku na kojoj vremenskom evolucijom upravlja poznati Hofstadterov hamiltonijan.

2 Osnovna svojstva anyona

2.1 Frakcijska statistika

Dobro je poznata činjenica u fizici da sve čestice moraju poštovati jednu od dvije statistike: bozonsku (Bose-Einstein) ili fermionsku (Fermi-Dirac).

To fundamentalno pravilo počinje od slavnog Paulijeveg principa isključenja za fermione i od onda svaka višestruka valna funkcija se podvrgava procesu simetrizacije ili antisimetrizacije. Općenito ćemo tada za fermione imati

$$\Psi_F(q_i, q_j) = -\Psi_F(q_j, q_i), \quad (1)$$

dok za bozone vrijedi

$$\Psi_B(q_i, q_j) = \Psi_B(q_j, q_i) \quad (2)$$

na zamjenu bilo koja dva skupa kvantnih brojeva q_i koji pripadaju i, j -toj čestici.

Međutim, početkom osamdesetih godina prošloga stoljeća, Frank Wilczek je predložio ([1], [2]) jednostavan sustav nabijene čestice i tanke zavojnice koji, kada ga promatramo kao kompozitni objekt, pokazuje kvantizaciju angularnog momenta u jedinicama koje nisu uobičajeni cjelobrojni i polucjelobrojni višekratnici \hbar već imaju ovisnost o toku kroz zavojnicu.

Po spin-statistika teoremu, taj slučaj ne bi smio biti moguć. Od ranije je bilo poznato da rezultati tog teorema ovise o dimenzionalnosti sustava - u dvije dimenzije su osim fermiona i bozona mogući i *anyoni*¹ koji imaju *frakcijsku statistiku*. U tom slučaju valna funkcija dobiva proizvoljnu fazu $\varphi \in (0, 2\pi)$ na zamjenu kvantnih brojeva dvije čestice:

$$\Psi_A(q_i, q_j) = e^{i\varphi} \Psi_A(q_j, q_i) \quad (3)$$

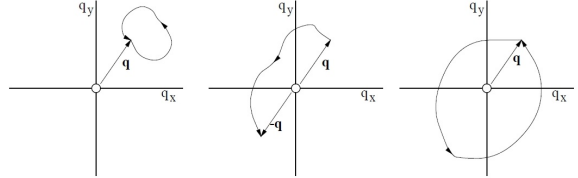
Matematičkim riječnikom, u dvije dimenzije moguće statistike su zadane *braid* grupom za razliku od jednostavnijeg slučaja permutacijske grupe u tri dimenzije. Općeniti Hilbertov prostor više čestica je tenzorskim produktom jednočestičnih stanja $\mathcal{H}^N = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ koji sadrži i fermionska i bozonska stanja. Uvjet (anti)simetričnosti stanja znatno smanjuje prostor i isključuje sva stanja koja nemaju dobro određenu svojstvenu vrijednost operatora permutacije čestica. Konkretno, za N čestica:

$$\begin{aligned} \Psi_F &\in \bigwedge_{j=0}^N \mathcal{H}_j \\ \Psi_B &\in S_N \bigotimes_{j=0}^N \mathcal{H}_j \end{aligned} \quad (4)$$

gdje je S operator simetrizacije. U tri dimenzije, niti jedno stanje koje ne ulazi u jedan od ova dva prostora nema fizikalnu ulogu.

2.2 Dimenzionalnost sustava

Posebnost dvodimenzionalnih sustava leži u tome da imamo veći broj topološki različitih puteva koje dvije čestice mogu pratiti pri zamjeni mjesta. Promatramo li položaj kao kvantni broj, zamjena čestica mora voditi na isti sustav zbog njihove nerazpoznatljivosti.



Slika 1: Shematski prikaz topološki različitih puteva u relativnim koordinatama pri zamjeni čestica u dvije dimenzije. Dijametralno suprotne točke poistovjećujemo zbog nerazpoznatljivosti čestica. Preuzeto iz [9].

Na slici (1) su prikazana 3 moguća načina zamjene dvije čestice. Općenito ih ima prebrojivo beskonačno zbog proizvoljnog broja obilaska ishodišta - nemamo treću dimenziju za neprekidno deformiranje svih tih puteva u manji broj klasa. Općenita valna funkcija (propagator) će tada biti zadana sa

$$G(\mathbf{q}_1, \tau, \mathbf{q}_2, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\varphi} \int \mathcal{D}q^{(n)} e^{-\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]} \quad (5)$$

gdje n označava spomenuti broj namotaja krivulje obilaska. Vidimo da smo zbog diskretnosti broja obilazaka (nužno cijeli broj) morali razdvojiti doprinose pojedinih klasa te da se ti doprinosi zbrajaju sa različitim fazama. Ta faza omogućuje anyonsku fazu česticama u dvije dimenzije. To dopušta i nekim stanjima koja nisu nužno simetrizirana ili antisimetrizirana u \mathcal{H}^N da igraju fizikalnu ulogu. Pod "klasa" mislimo na skup krivulja koje se neprekidno mogu deformirati jedna u drugu, element grupe homotopije.

3 Frakcijski kvantni Hallov efekt i Hofstadterov hamiltonijan

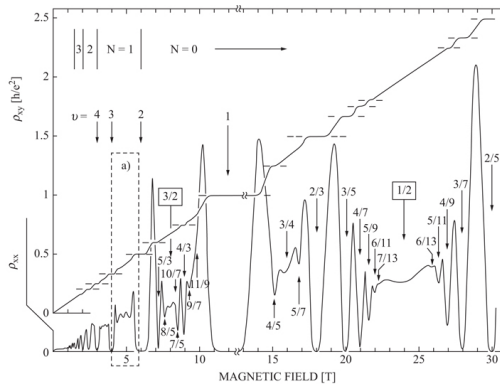
U ovom dijelu analiziramo bitna svojstva dva poznata fizikalna sustava i motiviramo rješavanje Hofstadterovog problema za više čestica. Taj problem i frakcijski QHE su oboje opisuju nabijene čestice u dvije dimenzije u okomitom magnetskom

¹Prefiks *any-* dolazi od iste engleske riječi koja odražava činjenicu da zamjena kvantnih brojeva dopušta *bilo koju* fazu.

polju samo u potonjem slučaju koordinate nisu kontinuirane već uzimamo da se čestice gibaju na rešetci.

3.1 Anyoni kao pobuđenja Laughlinovog osnovnog stanja

Do sada, jedino eksperimentalno opažanje anyonskih pobuđenja se dogodilo kod frakcijskog QHE. Fizikalni sustav o kojem se radi su elektroni zarobljeni u dvije dimenzije u konstantnom magnetskom polju okomitom na njihovu ravninu. gibanja. Mjerenja otpornosti ρ_{xy} dala su poznatu krivulju sa platoima na $\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}$ u ovisnosti o indeksu popunjenosti Landauovih energijskih razina (slika (2)).



Slika 2: Ovisnost Hallove otpornosti o magnetskom polju sa označenim popunjenostima ν .

Takozvani *cjelobrojni* QHE je pojava platoa onim vrijednostima jakosti magnetskog polja na kojim imamo u potpunosti popunjenih $\nu \in \mathbb{N}$ (makroskopski degeneriranih) Landauovih razina. Njihove energije su $E_n = \hbar\omega_c (n + 1/2)$ što je rezultat koji se može dobiti zanemarivanjem coulombske interakcije među elektronima (ω_c je ciklotronska frekvencija elektrona).

No, pojavu platoa na frakcijskim vrijednostima ν je potrebno teorijski objasniti uključivanjem coulombske interakcije. To je prvi napravio Laughlin ([3], [4], [5]) poznatim *Laughlinovim valnim funkcijama*. Za popunjenja $\nu = 1/m$ (odgovarajuće gustoće elektrona) te za neparne angularne momente $^2 m$, funkcija glasi:

$$\psi(\{z_i\}) = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \exp\left(-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}\right) \quad (6)$$

gdje su koordinatne ovisnosti izražene pomoću $z_j = x_j - iy_j$ te je uvedena pokrata prirodne jedinice duljine sustava $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$. Posebnost ovog rješenja problema nije samo u tome da poštuje Paulijev princip³ zbog produktnog faktora već u

tome da pokazuje 99% preklapanja sa numeričkim osnovnim stanjem za široku klasu međuelektronskih radijalnih interakcija oblika $V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ dok god su energijske skale interakcije puno manje od razlike između dvije Landauove razine, $\langle V \rangle \ll \hbar\omega_c$, što čini preskoke zanemarivo malo vjerojatnima. To je odraz robustnosti osnovnog stanja - kontinuiranom deformacijom potencijala ne možemo utjecati na diskretne topološke parametre koji postoje zbog dimenzionalnosti sustava.

Nama su zapravo od interesa posebne vrste pobuđenja Laughlinovog osnovnog stanja, takozvane *kvazišupljine*. U analogiji sa ranijom raspravom o klasama puteva u dvije dimenzije, vidimo da nam je potrebna neka vrsta prepreka da bi moguće krivulje obilaska elektrona razdvojili na više diskretnih klasa. Zato konstruiramo valnu funkciju M kvazišupljina na položaju $\eta_m = X_m - iY_m$ na način:

$$\phi(\{z_i\}, \{\eta_j\}) = \psi(\{z_i\}) \prod_{m=1}^M \prod_{n=1}^N (z_n - \eta_m) \quad (7)$$

zahtjevajući da vjerojatnost pronalaska elektrona na položajima η_m iščezava na najjednostavniji način. Stavimo li svih M kvazišupljina na isti položaj η , drugi faktor u ϕ postaje $\prod_n (z_n - \eta)^M$ i tada cijela valna funkcija šupljina opisuje nedostatak jednog elektrona na na poziciji η što znači da jedna šupljina nosi naboj $+e/M$. S druge strane, uzmemo li dvije od M šupljina i adijabatski im zamijenimo položaj, dobivena Berryjeva faza ([8]) će biti $e^{2\pi i/M}$ kao što je dobiveno u [7]. Dakle, kvazišupljine pokazuju anyonsko ponašanje.

3.2 Hofstadterov hamiltonijan

Problem koji sada promatramo je skup elektrona na kvadratnoj rešetci u okomitom magnetskom polju. Hamiltonijan je zadan sa:

$$H = -t \sum_{m,n} (e^{i\phi_1} b_{n-1,m}^\dagger b_{n,m} + e^{i\phi_2} b_{n,m-1}^\dagger b_{n,m} + \text{h.c.}) \quad (8)$$

u aproksimaciji čvrstog vezanja (dopuštamo preskoke samo na susjedna čvorišta rešetke). Hamiltonijan je zapisan u drugoj kvantizaciji gdje su b_{ij}^\dagger (b_{ij}) operatori stvaranja (poništenja) elektrona na čvorištu (i, j) u Fockovom prostoru. Konkretno komutacijske relacije koje nametnemo na te operatore određuju statistiku čestica.

Pretpostavljamo da spin ne igra ulogu jer je polje dovoljno jako da bi za okretanje projekcije

²Da bi ukupan Hamiltonijan uopće komutirao sa J_z , potrebno je odabrati simetrično baždarenje $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(y\hat{x} - x\hat{y})$.

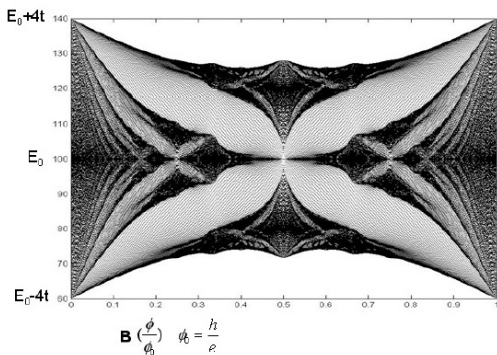
³Štoviše, ono ima nultočku m -tog reda umjesto samo jednostruku.

spina trebalo mnogo više energije nego zakretanje po rešetci: $t \ll \hbar\mu_B B$. Spomenuto magnetsko polje implementiramo u Hamiltonijan odabirom faza ϕ_i tako da čestica obilaskom jedne plakete ($a \times a$ jedinične ćelije) dobiva ispravnu Berryjevu fazu $e^{-ie\Phi/\hbar}$ poznatu iz Aharonov-Bohm (AB) efekta. To znači da fazu pri pomaku duž jedne stranice plakete moramo odabrati kao:

$$\phi_{1,2} = -\frac{e}{\hbar} \int_0^a dr_{1,2} A_{1,2}(x, y) \quad (9)$$

gdje ponovo odabiremo simetrično baždarenje. Ukupna faza ovisi o omjeru Φ/Φ_0 gdje je Φ_0 kvant magnetskog toka $\Phi_0 = h/e$, a $\Phi = Ba^2$ tok kroz jednu plaketu.

Već u jednočestičnom slučaju ovakav sustav pokazuje bogatu strukturu. Energijski spektar netrivialno ovisi o Φ/Φ_0 na način da za iracionalne vrijednosti tog parametra postaje Cantorov skup. Graf ovisnosti te energije o ξ predstavlja poznatog Hofstadterovog leptira iz [10] (slika (3)).



Slika 3: Hofstadterov leptir - ovisnost energijskog spektra Hofstadterovog hamiltonijana o magnetskom toku.

4 Hardcore bozoni na rešetci

Vidjevši anyonsko ponašanje kvazišupljina u frakcijskom Laughlinovom stanju i povukavši analogiju s Hofstadterovim hamiltonijanom, sada želimo izračunati višestruko osnovno stanje na istoj kvadratnoj rešetci u kojoj smo izuzeli jedno čvorište. Čestice ne mogu sa susjednih čvorišta prijeći tamo, efektivno smo prerezali poveznice. Time u sustavu uvodimo analogon kvazišupljine u Laughlinovom stanju.

Također, ovaj sustav smo odabrali za izračun jer je on lako ostvariv u sustavima sa ultrahladnim

⁴ $\sigma_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta} - 1$

⁵Za identificiranje svih elemenata baze u općenitijoj $L \times L$ rešetci s N čestica, bilo je potrebno provjeriti $\binom{L^2}{N}$ elemenata što predstavlja vrlo brzo povećanje potrebnog vremena za račune za velike rešetke.

plinovima. Pomoću lasera lako možemo konstruirati rešetku i ostvariti sintetički vektorski potencijal rotacijom sustava (pomoću Coriolisove sile). Također, konkretna svojstva atoma u ultrahladnom plinu spadaju u klasu *hardcore bozona*. To su uobičajeni bozoni koji pokazuju jaku kontaktnu odbornu interakciju koju modeliramo potencijalom oblika:

$$V = \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (10)$$

Umjesto standardnog tretmana Schrödingerove jednadžbe sa gornjim potencijalom, interakciju uključujemo u algebarska svojstva operatora stvaranja i poništenja na Fockovom prostoru. Fizikalna posljedica interakcije je da se dvije čestice ne mogu naći u istom čvorištu rešetke zato zahtjevamo $b_{ij}^\dagger{}^2 = b_{ij}^2 = 0$ od operatora stvaranja i poništenja - ne možemo dva puta stvoriti niti poništiti česticu na istom čvorištu jer je okupacijski broj mora biti 0 ili 1.

Što se tiče statistike čestica, iz gornjih zahtjeva vidimo da za isto čvorište mora vrijediti $\{b_{ij}, b_{ij}^\dagger\} = \mathbb{1}$ dok za različita čvorišta dodajemo standardni bozonski uvjet: $[b_{ij}, b_{kl}^\dagger] = 0$. Ta dva zahtjeva se zajedno mogu zapisati kao:

$$b_\alpha b_\beta^\dagger = \delta_{\alpha\beta} \mathbb{1} - \sigma_{\alpha\beta} b_\beta^\dagger b_\alpha \quad (11)$$

gdje smo parove indeksa označili grčkim indeksima. Simbol $\sigma_{\alpha\beta}$ je jednak 1 ako $\alpha = \beta$ ili -1 ako $\alpha \neq \beta$ ⁴. Zapisali smo hamiltonijan (8) u bazi:

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = b_{\alpha_1}^\dagger b_{\alpha_2}^\dagger \dots b_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle \quad (12)$$

i numerički izračunali valnu funkciju $\psi(\alpha)$ osnovnog stanja

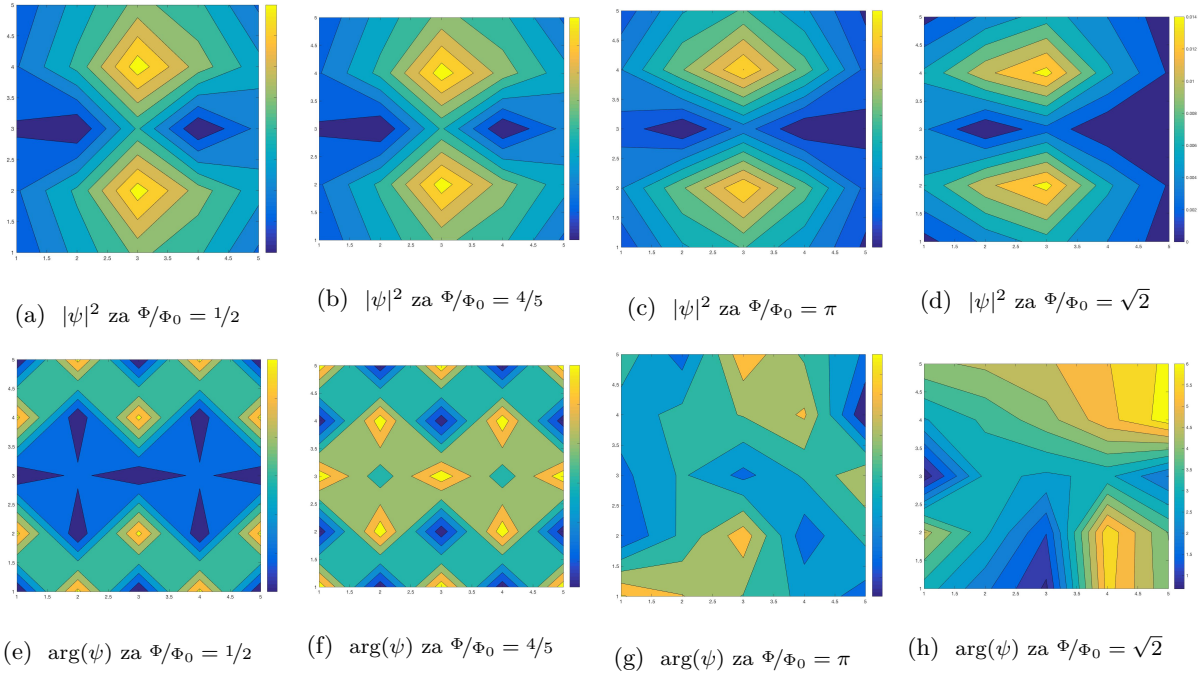
$$|\psi_0\rangle = \sum_{\text{svi } \alpha} \psi_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle \quad (13)$$

pomoću programskog paketa *Matlab*. Odabir konkretnog broja čestica N matematički znači to da dijagonaliziramo hamiltonijan u svojstvenom potprostoru operatora broja čestica $N = \sum_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha$ u ukupnom Fockovom prostoru.

Grafovi dobivenih valnih funkcija se mogu vidjeti na slici (4). Za proučavanje općenitih svojstava sustava ograničili smo se na 5×5 rešetku. Također, zbog korištenja slabijih računala i velikih vremenskih intervala koji su bili potrebni za svaki zasebni izračun, rešetke linearne dimenzije dulje od ≈ 8 nisu bile dostupne analizi.⁵

Sustav smo od početka konstruirali tako da bude diskretan analogon sustavu frakcijskog QHE očekujući podjelu stanja po različitim klasama puteva (klasama homotopije) kao i ranije. Takvo svojstvo sustava bi se očitovalo u diskontinuitetu faze valne funkcije na spojnici između fiksiranog elektrona i šupljine na slici (4) ukazujući na višeznačnost anyonske valne funkcije (rez). No, međutim, nismo uočili takvo ponašanje - faza se kontinuirano mijenja u konvencionalnom intervalu $[0, 2\pi)$.

S druge strane, faza valne funkcije ipak pokazuje zanimljivo ponašanje. Za racionalne vrijednosti Φ/Φ_0 pokazuje periodičku strukturu s periodom konstante rešetke i sve simetrije koje bismo *a priori* očekivali. No, za iracionalne vrijednosti Φ/Φ_0 , kada u jednočestičnom slučaju spektar poprima oblik Cantorovog skupa, faza poprima vrlo nepravilan oblik i ponaša se poput parametra uređenja. Usprkos tome, raspodjela vjerojatnosti u tim stanjima ostaje pravilnog oblika.



Slika 4: Numerički izračunate gustoće vjerojatnosti i faze valnih funkcija osnovnog stanja dva elektrona sa Hofstadterovim hamiltonijanom za različite vrijednosti Φ/Φ_0 na 5×5 rešetci. Svaka od rešetki ima izrezano čvorište na koordinatama $(2, 3)$ dok je jedan elektron fiksiran na $(4, 3)$.

5 Zaključak

Nakon što smo proučili najvažnije značajke anyona, pokušali smo ih rekonstruirati u sustavu kojime je lako manipulirati u laboratoriju. Metoda kreiranja periodičkog potencijala laserima za ultrahladne atome bi se mogla upotrijebiti za proučavanje anyonskih pobuđenja.

Konkretno, promatrali smo poznati Hofstadterov sustav sa dvije čestice i šupljinom u rešetci. Izračunavši numerički valnu funkciju osnovnog stanja, primjetili smo da nismo identificirali anyonsko ponašanje šupljina kao u slučaju kvazišupljina kod Laughlinovih valnih funkcija. Unatoč tome, mogućnost proučavanja anyonskih pobuđenja u ul-

trahladnim plinovima ostaje otvorena mogućnost u budućnosti za neke druge potencijale i vrste čestica. Također, ograničenje računalne snage nam je onemogućilo da donesemo općenitije zaključke za velike rešetke i Hofstadterov hamiltonijan. Optimizacija algoritama također može doprinjeti istraživanju višestrukih svojstava ovog sustava za više od dvije čestice i jedne šupljine.

6 Zahvale

Htio bih se zahvaliti prof. dr. sc. Hrvoju Buljanu na strpljenju, ukazivanju na trivijalne greške u računima i podukama iz kvantne fizike mnoštva čestica. Također, zahvalio bih se i Grguru Šimuniću na

vremenu posvećenom pregledavanju matematičkih računa i kôda koji su bili potrebni za izradu ovog seminara.

Reference

- [1] F. Wilczek, *Magnetic Flux, Angular Momentum and Statistics*; Phys. Rev. Lett. 48, 1144-1146 (1982)
- [2] F. Wilczek, *Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles*; Phys. Rev. Lett. 49, 957-959 (1982)
- [3] R. B. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*; Phys. Rev. B 23, 5632(R) (1981)
- [4] R. B. Laughlin, *Quantized motion of three two-dimensional electrons in a strong magnetic field*; Phys. Rev. B 27, 3383 (1982)
- [5] R. B. Laughlin, *Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*; Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983)
- [6] K. Klitzing, *Nobel Lecture: The Quantized Hall Effect* (1985)
- [7] D. Tong, *The Quantum Hall Effect*; (preprint) (2016)
- [8] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*; Proc. R. Soc. Lond. A 392, 45-57 (1984)
- [9] R. MacKenzie, *Path Integral Methods and Applications*; arXiv:quant-ph/0004090 (2016)
- [10] D. Hofstadter, *Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields*; Phys. Rev. B14, 2239 (1976)