Uloga topoloških svojstava konfiguracijskog prostora u višečestičim sustavima identičnih čestica

Grgur Šimunić
Mentor: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan
Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb
(Dated: 19. siječnja 2017.)

U ovom seminaru prikazane su osnovne tehnike za razmatranje topoloških svojstava fizikalnih sustava. Te tehnike su zatim primijenjene na sistem dviju raspoznatljivih čestica te sistem dviju neraspoznatljivih čestica kako bi se objasnila uloga topološke strukture konfiguracijskog prostora sustava u statistici koja opisuje višečestične sustave.

I. UVOD

Sve danas poznate čestice moguće je podijeliti u dvije skupine: fermione i bozone. Fermionska, odnosno bozonska priroda čestica u višečestičnim sustavima. Gledajući kvantnomehanički istovrsne čestice nije moguće razlikovati što dovodi do simetrizacija višečestičnih bozonskih valnih funkcija, odnosno antisimetrizacije višečestičnih fermionskih valnih funkcija. Pri tome bozonski sustavi slijede Bose-Einsteinovu statistiku, a fermionski sustavi Fermi-Diracovu statistiku.

Iako su sve čestice u prirodi ili fermioni ili bozoni, ograničavanjem nekih stupnjeva slobode, moguće je postići drugačije ponašanje. Tako npr. u dvije dimenzije može doći do anyonskog ponašanja čestica. U ovom slučaju prilikom zamjene dvije identične čestice, valna funkcija poprima proizvoljnu faznu razliku (kod bozona je ona jednaka 1, a kod fermiona -1).

Anyoni su prvi puta eksperimnetalno otkriveni u kvantnom Hallovom efektu te se danas provode istraživanja u kojima bi se otkrili i drugi, eksperimentalno ostvarivi sistemi u kojima dolazi do pojave anyona. Jedna mogućnost njihove realizacije bi bila u dvodimenzinalnim sistema kao što je slučaj kod kvantnog Hallovog efekta. Još jedna mogućnost bi bila u traženju interakcije među česticama u trodimnzionalnim sustavima gdje bi ta interakcija dovela do anyonskog ponašanja čestica.

U ovom seminaru ispitujemo topološka svojstva identičnih čestica (u sistemima s dvije čestice). Pri tome prvo dajemo pregled osnovnih matematičkih pojmova i rezultata koji su nam potrebni te zatim ih primijenjujemo na sistem dviju čestica. Pri tome odvojeno razmatramo slučaj raspoznatljivih čestica i neraspoznatljivih čestica.

II. KLASE HOMOTOPIJE

Neka je X glatka mnogostrukost te $a, b \in X$. Glatku funkciju $q : [0,1] \to X$, takvu da je $q(0) = a$ i $q(1) = b$ nazivamo putom u X. Nadalje, neka je $\mathcal{P}$ skup svih putova u X. Tada definiramo funkcije $s, t : \mathcal{P} \to X$ tako da je $s(q) = q(0)$ i $t(q) = q(1)$. Funkcija s nam daje početnu točku puta q, a funkcija t završnu točku puta q.

Neka su $q, q' \in \mathcal{P}$ dva puta u X s istim rubnim točkama, tj. $s(q) = s(q')$ i $t(q) = t(q')$. Kažemo da su putovi q i q' homotopni ako je jedan put moguće neprekidno deformirati u drugi, tj. ako postoji glatka funkcija $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ takva da je $F(t,0) = a$, $F(t,1) = b$, $F(0,t) = q(t)$ i $F(1,t) = q'(t)$. Homotopnost puteva pretstavlja relaciju ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}$ što znači da je skup $\mathcal{P}$ moguće podijeliti na klase ekvivalencije koje u ovom slučaju nazivamo klasama homotopije. Klasu homotopije kojoj pripada put q ćemo označavati s $[q]$. Budući su rubne točke svih puteva u jednoj klasi homotopije jednake, moguće je proširiti domenu funkcija s, t tako da djeluju na klase homotopije, tj. tako da je $s([q]) = s(q)$ i $t[q]) = t(q)$.

Neka je $x \in X$ te q_x konstantan put u X s vrijednosti u točki x. Drugim riječima, za sve $t \in [0,1]$ je $q_x(t) = x$. Tada ćemo za klasu homotopije $[q_x]$ koristiti oznaku $[x]$.

Neka su $q, q' \in \mathcal{P}$ dva puta u X takva da je $t(q) = s(q')$. Tada možemo definirati novi put $qq' \in \mathcal{P}$ na sljedeći način:

$$qq'(t) = q(2t)\theta\left(\frac{1}{2} - t\right) + q'(2t-1)\theta\left(t - \frac{q}{2}\right) \quad (1)$$

za sve $t \in [0,1]$. Pri tome je $s(qq') = s(q)$ i $t(qq') = t(q')$. Konstrukcija puta qq' iz puteva q i q' pretstavlja operaciju u skupu $\mathcal{P}$ koju ćemo nazivati množenjem puteva. To množenje nije komutativno niti je definirano između proizvoljna dva puta, ali je asocijativno. Ono također posjeduje i svojstvo inverznog elementa [4], tj. za svaki $q \in \mathcal{P}$ postoji $q^{-1} \in \mathcal{P}$ takav da je $(qq^{-1})(p) = s(q)$ te $(q^{-1}q)(p) = t(q)$ za sve $p \in [0,1]$. Nadalje, množenje puteva moguće je proširiti na množenje klasa homotopije tako da je $[q][q'] = [qq']$. Skup svih klasa homotopije s navedenim množenjem pretstavlja algebarsku strukturu koju nazivamo fundamentalnim grupoidom i označavamo s $\Pi(X,X)$.

Neka su $a,b \in X$. Skup $\Pi(X,a) = \{[q]\,|\,q\in\mathcal{P}, s(q)=t(q)=a\}$ zajedno s operacijom množenja klasa homotopije pretstavlja grupu koju nazivamo fundamentalnom grupom u točki a. Također definiramo i skup $\Pi(X,a,b) = \{[q]\,|\,q\in\mathcal{P}, s(q)=a, t(q)=b\}$. Množenje u ovom skupu nije definirano osim u slučaju $a=b$ ali tada ponovno dobivamo fundamentalnu grupu u točki a.

Fundamentalne grupe u različitim točkama od X nisu nezavisne ako su te točke povezane nekim putom. Neka su $a,b\in X$ te $q\in\mathcal{P}$ put takav da je $s(q)=a$ i $t(q)=b$. Ako je $[l]\in\Pi(X,a)$, tada je $[q^{-1}lq]\in\Pi(X,b)$. Na taj način $[q]$ inducira homomorfizam između fundamentalnih grupa $\Pi(X,a)$ i $\Pi(X,b)$:

$$(\forall[l],[k]\in\Pi(X,a))\ [q^{-1}lkq]=[q^{-1}lq][q^{-1}kq] \quad (2)$$

Analogno tome, $[q^{-1}]$ inducira homomorfizam između navedenih fundamentalnih grupa, ali u suprotnu stranu iz čega slijedi da su promatrani homorfizmi zapravo izomorfizmi. štoviše, izomorfizmi između fundamentalnih grupa $\Pi(X,a)$ i $\Pi(X,b)$ inducirani različitim klasama homotopije nisu nezavisni. Neka je $p\in\mathcal{P}$ takav da je $s(p)=a$ i $t(p)=b$. Tada za sve $[l]\in\Pi(X,a)$ vrijedi:

$$[p^{-1}lp]=[p^{-1}q][q^{-1}lq][q^{-1}p] \quad (3)$$

Budući je $[p^{-1}q]\in\Pi(X,b)$, posljednji izraz pretstavlja unutarnji izomorfizam u fundamentalnoj grupi $\Pi(X,b)$.

III. AMPLITUDA VJEROJATNOSTI

Neka je zadan kvantni sistem s konfiguracijskim prostorom X. Pri tome pretpostavljamo da je X povezan putevima. Ukoliko je X jednostavno povezan putevima, tada je amplituda vjerojatnosti prijelaza iz točke $\boldsymbol{a}$ u trenutku $t_{\boldsymbol{a}}$ u točku $\boldsymbol{b}$ u trenutku $t_{\boldsymbol{b}}$ dana izrazom:

$$K(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}})=\int\mathcal{D}\{\boldsymbol{x}(t)\}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\{\boldsymbol{x}(t)\}\right) \quad (4)$$

gdje je $\hbar$ reducirana Planckova konstanta, a $S\{\boldsymbol{x}(t)\}$ akcija sistema za putanju $\boldsymbol{x}(t)$.

Ukoliko konfiguracijski prostor X nije jednostavno povezan putevima, tj. ako u X postoji više od jedne klase homotopije, onda je amplituda vjerojatnosti jednaka ([1], [2]):

$$K(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}})=\sum_{[q]\in\Pi(X,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\tilde{\chi}([q])\tilde{K}^{[q]}(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}}) \quad (5)$$

gdje je $\tilde{\chi}$ za sada neodređena funkcija iz $\Pi(C,C)$ u $\mathbb{C}^n$, a $\tilde{K}^{[q]}$ parcijalna amplituda vjerojatnosti definirana kao integral po putevima ograničen na klasu homotopije $[q]$:

$$\tilde{K}^{[q]}(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}})= =\int\mathcal{D}\{\boldsymbol{x}(t)\,|\,[\boldsymbol{x}(t)]=[q]\}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\boldsymbol{x}(t))\right) \quad (6)$$

Primijetimo da smo ovdje koristili klasu homotopije $[\boldsymbol{x}(t)]$ putanje sistema, iako po ranije navedenoj definiciji to možemo napraviti samo za puteve ograničene na interval $[0,1]$. Stoga uvodimo reparametrizaciju putanje na sljedeći način:

$$q(t)=\ ((t_{\boldsymbol{b}}-t_{\boldsymbol{a}})t+t_{\boldsymbol{a}}) \quad (7)$$

pri čemu je $t\in[0,1]$. Tada je $[\boldsymbol{x}(t)]=[q]$.

Amplituda vjerojatnosti (5) prikazana je kao suma po fundamentalnom grupoidu. Tu sumu moguće je preoblikovati u sumu po fundamentalnoj grupi u nekoj točki $\boldsymbol{x}_0$. Neka je $\boldsymbol{a}\in X$ te $C:X\to\mathcal{P}$ funkcija takva da je $C(\boldsymbol{a})(0)=\boldsymbol{x}_0$ te $C(\boldsymbol{a})(1)=\boldsymbol{a}$. Sada je moguće uspostaviti vezu između fundamentalne grupe $\Pi(X,\boldsymbol{x}_0)$ u točki $\boldsymbol{x}_0$ i fundamentalnog grupoida. Naime, za točke $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in X$ definiramo funkciju $f_{\boldsymbol{ab}}:\Pi(X,\boldsymbol{x}_0)\to\Pi(X,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ takvu da je

$$f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha)=[C^{-1}(\boldsymbol{a})]\alpha[C(\boldsymbol{b})]$$

za sve $\alpha\in\Pi(X,\boldsymbol{x}_0)$.(8)Definiramo li i funkcije:

$$\chi(\alpha)=\tilde{\chi}(f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha)) \quad (9)$$
$$K^{\alpha}(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}})=\tilde{K}^{f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha)}(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}})\,, \quad (10)$$

izraz (5) postaje:

$$K(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}})=\sum_{\alpha\in\Pi(X,\boldsymbol{x}_0)}\chi(\alpha)K^{\alpha}(\boldsymbol{b},t_{\boldsymbol{b}};\boldsymbol{a},t_{\boldsymbol{a}}) \quad (11)$$

Funkcija f čuva grupnu operaciju fundamentalnog grupoida:

$$f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha)f_{\boldsymbol{bc}}(\beta)=f_{\boldsymbol{ac}}(\alpha\beta) \quad (12)$$

te stoga ona pretstavlja lokalni inverz homomorfizma $g:\Pi(X,X)\to\Pi(X,\boldsymbol{x}_0)$ za koji je:

$$g([q])=[C(s([q]))][q][C^{-1}(t([q]))] \quad (13)$$

te je stoga:

$$g(f_{\boldsymbol{ab}})(\alpha)=\alpha \quad (14)$$
$$f_{s([q])t([q])}(g([q]))=[q]. \quad (15)$$

Neka je $\boldsymbol{x}_c(t)$ klasična putanja sistema od točke $\boldsymbol{a}$ u trenutku $t_{\boldsymbol{a}}$ do točke $\boldsymbol{b}$ u trenutku $t_{\boldsymbol{b}}$. Ta klasična putanja određena je principom minimalne akcije, tj. to je ona putanja za koju akcija sistema:

$$S\{\boldsymbol{x}(t)\} = \int_{t_a}^{t_b} L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t)\ \mathrm{d}t \tag{16}$$

postaje ekstremalna, tj. $\delta S\{\boldsymbol{x}_c(t)\} = 0$. Ovaj uvjet se ne mijenja ako akciji S dodamo proizvoljnu funkciju $\zeta([\boldsymbol{x}(t)])$. Ta funkcija ζ nije u potpunosti određena te je povezana sa funkcijom $\tilde{\chi}$ u izrazu (5) za amplitudu vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} &\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(S\{\boldsymbol{x}(t)\} + \zeta([\boldsymbol{x}(t)])\right)\right) = \\ &\qquad \tilde{\chi}([\boldsymbol{x}(t)]) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\{\boldsymbol{x}(t)\}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Budući da ukupna amplituda vjerojatnosti mora poštivati Feynmannova pravila za kombiniranje amplituda, a posljednji faktor u izrazu (17) također poštuje ta pravila, isto mora vrijediti i za $\tilde{\chi}$. Stoga je:

$$\tilde{\chi}([q][p]) = \tilde{\chi}([q])\tilde{\chi}([p]) \tag{18}$$

što znači da je $\tilde{\chi}$ reprezentacija fundamentalnog grupoida, a iz toga slijedi da je χ reprezentacija fundamentalne grupe.

Kao što smo već ranije rekli, fundamentalne grupe u točkama $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ su izomorfne pri čemu su izomorfizmi inducirani putevima između tih točaka, a različiti izomorfizmi su povezani izrazom (3). Ako su fundamentalne grupe Abelove, tada za sve $l \in \Pi(X, \boldsymbol{a})$ vrijedi:

$$\begin{aligned} &\left[p^{-1}lp\right] = [p^{-1}q][q^{-1}lq][q^{-1}p] = \\ &\qquad [p^{-1}q][q^{-1}p][q^{-1}lq] = [q^{-1}lq]\,, \end{aligned} \tag{19}$$

gdje su $p, q \in \Pi(X, a, \boldsymbol{b})$. Stoga svi putevi induciraju isti izomorfizam između Abelovih fundamentalnih grupa. Isti zaključak vrijedi i ako je χ jednodimenzionalna reprezentacija fundamentalne grupe:

$$\begin{aligned} &\chi([p^{-1}lp]) = \chi([p^{-1}q])\chi([q^{-1}lq])\chi([q^{-1}p]) = \\ &\qquad \chi([p^{-1}q])\chi([q^{-1}p])\chi([q^{-1}lq]) = \chi([q^{-1}lq]) \end{aligned} \tag{20}$$

Štoviše, u ovom posljednjem slučaju vrijedi:

$$\begin{aligned} &\chi([q^{-1}lq]) = \tilde{\chi}([q^{-1}])\chi([l])\tilde{\chi}([q]) = \\ &\qquad \tilde{\chi}([q^{-1}])\tilde{\chi}([q])\chi([l]) = \chi([l]) \end{aligned} \tag{21}$$

što znači da je dovoljno izabrati reprezentaciju fundamentalne grupe samo u jednoj točki. U nastavku ćemo pretpostavljati da radimo isključivo s jednodimenzionalnim reprezentacijama.

Izaberimo jednu klasu homotopije $[p_0]$ između $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Tada svaku klasu homotopije $[q]$ između tih točaka možemo povezati s klasom homotopije iz fundamentalne grupe u točki $\boldsymbol{a}$ pomoću preslikavanja $[q] \mapsto [qp_0^{-1}]$. Tada je:

$$\tilde{\chi}([q]) = \chi([qp_0^{-1}])\tilde{\chi}([p_0]) \tag{22}$$

Na prvi pogled izgleda kao da za svaki par točaka $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ možemo izabrati reprezentaciju fundamentalnog grupoida biranjem vrijedosti $\tilde{\chi}([p_0])$. Ali to ipak nije slučaj zbog ograničenja koja se javljaju kao posljedica grupoidne strukture između različitih parova točaka. Stoga je potrebno koristiti drugačiji pristup. Biramo proizvoljnu točku $\boldsymbol{x}_0$ u konfiguracijskom prostoru. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}([q]) = \tilde{\chi}([C(\boldsymbol{a})^{-1}][C(\boldsymbol{a})][q][C(\boldsymbol{b})^{-1}][C(\boldsymbol{b})]) = \\ &\qquad \tilde{\chi}([C(\boldsymbol{a})^{-1}])\chi([C(\boldsymbol{a})qC(\boldsymbol{b})^{-1}])\tilde{\chi}([C(\boldsymbol{b})]) \end{aligned} \tag{23}$$

Dakle, dovoljno je izabrati vrijednost $\tilde{\chi}([C(\boldsymbol{x})])$ za sve $\boldsymbol{x} \in X$ za neke (proizvoljno) određene $\boldsymbol{x}_0$ i C.

Pogledajmo što će se dogoditi za neki drugi izbor funkcije C (bez da mijenjamo $\boldsymbol{x}_0$). Označimo tu novu funkciju s C'. Tada je:

$$\begin{aligned} &\chi([C'(\boldsymbol{a})qC'(\boldsymbol{b})^{-1}]) = \\ &\chi([C'(\boldsymbol{a})C(\boldsymbol{a})^{-1}])\chi([C(\boldsymbol{a})C'(\boldsymbol{a})^{-1}])\chi([C(\boldsymbol{a})qC(\boldsymbol{b})^{-1}]). \end{aligned} \tag{24}$$

Stoga postoji funkcija $\delta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ takva da je:

$$\tilde{\chi}'([q]) = \mathrm{e}^{i\delta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\tilde{\chi}([q]). \tag{25}$$

Dakle, izbor funkcije C odgovara izboru globalne faze u amplitudi vjerojatnosti.

IV. SUSTAV DVIJU RASPOZNATLJIVIH ČESTICA

Promatramo sustav dvije raspoznatljive čestice u prostoru $\mathbb{R}^2$. Konfiguracijski prostor ovog sustava je $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Ako je $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ gdje je $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \in \mathbb{R}^2$, tada $\boldsymbol{r}_1$ pretstavlja koordinate prve čestice, a $\boldsymbol{r}_2$ koordinate druge čestice. Umjesto ove parametrizacije, pogodnije je uvesti novu parametrizaciju konfiguracijskog prostora izraženu preko centra mase sustava:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m2} \tag{26}$$

i relativnog položaja čestica:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{27}$$

Pri tome su m_1 i m_2 mase čestica. Nadalje, pretpostavljamo da ne postoji interakcija među česticama ukoliko je $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$, dok za $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ postoji beskonačno jaka odbojna interakcija među česticama.

To znači da konfiguracijski prostor možemo ograničiti na $X = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\})$ gdje je prvi faktor u X prostor centra mase sustava, a drugi faktor prostor relativnog položaja. Budući je $\mathbb{R}^2$ jednostavno povezan putevima, dovoljno promatrati što se događa s relativnim položajem čestica. Amplituda vjerojatnosti za propagaciju relativnog položaja je tada jednaka:

$$\mathcal{A}\{\boldsymbol{r}(t)\} = \tilde{\chi}([\boldsymbol{r}(t)]) \int \mathcal{D}\boldsymbol{r}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\{\boldsymbol{r}(t)\}\right) \quad (28)$$

pri čemu je $\tilde{\chi}$ reprezentacija fundamentalnog grupoida prostora $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$. Zbog jednostavnosti, umjesto navedenog prostora možemo promatrati prostor $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Proizvoljna točka promatranog prostora tada ima oblik $re^{i\theta}$ gdje je $r \in \langle 0, \infty \rangle$ te $\theta \in [0, 2\pi\rangle$.

Neka je $x_0 = 1$. Fundamentalna grupa u točki x_0 se satoji od klasa homotopije zatvorenih puteva koji prolaze kroz x_0. Pri tome za svaki zatvoreni put q koji prolazi kroz x_0 je moguće odrediti broj $n(q) \in \mathbb{Z}$ koji pretstavlja broj obilazaka tog puta oko točke 0. Budući da nijedan put nije moguće neprekidno transformirati kroz točku 0, putevi s različitim brojem n se nalaze u različitim klasama homotopije. Dakle, fundamentalna grupa je izomorfna grupi $(\mathbb{Z}, +)$. Stoga kao reprezentaciju fundamentalne grupe biramo:

$$\chi([q]) = \mathrm{e}^{in([q])\phi} \quad (29)$$

za neki $\phi \in [0, 2\pi]$.

Sada trebamo izbarati reprezentaciju fundamentalnog grupoida. Definiramo funkciju $C(re^{i\theta})(t) = r^t \mathrm{e}^{it\theta}$ za $t \in [0, 1]$. Nadalje, biramo reprezentaciju $\tilde{\chi}$ preko njenog djelovanja na $C(re^{i\theta})$:

$$\tilde{\chi}([C(r\mathrm{e}^{i\theta})]) = \mathrm{e}^{i\phi\theta/(2\pi)}. \quad (30)$$

Promotrimo put q takav da je $s(q) = r\mathrm{e}^{i\omega}$ te $t(q) = -r\mathrm{e}^{i\omega}$. Iz (23) slijedi:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}([q]) =& \tilde{\chi}^{-1}([C(r\mathrm{e}^{i\omega})])\tilde{\chi}([C(-r\mathrm{e}^{i\omega})]) \\ & \chi([C(r\mathrm{e}^{i\omega})qC(-r\mathrm{e}^{i\omega})]) \end{aligned} \quad (31)$$

Iako faktori u ovom produktu ovise o izboru r i ω, ukupni rezultat ne ovisi te dobivamo $\tilde{\chi}([q]) = \mathrm{e}^{i\phi/2}$ što pretstavlja fazu u amplitudi vjerojatnosti koja dolazi od zamijene čestica u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Zamijenimo li čestice u suprotnom smjeru, dobili bi fazu $\mathrm{e}^{-i\phi/2}$.

Točna vrijednost parametra ϕ ovisi o vrsti čestica koje promatramo. U slučaju $\phi = 0$ faza koja dolazi od zamijene čestica je jednaka 1 i ne ovisi o smjeru u kojem zamijenjujemo čestice (bozonsko ponašanje). Drugi granični slučaj je $\phi = 2\pi$ što daje fazu -1 prilikom zamijene čestica, ponovno neovisno o smjeru kojim zamjenjujemo čestice (fermionsko ponašanje). Za sve ostale vrijednosti ϕ faza koju dobiva amplituda vjerojatnosti ovisi o smjeru kojim zamijenjujemo čestice (anyonsko ponašanje).

V. SUSTAV DVIJU NERASPOZNATLJIVIH ČESTICA

Promotrimo sada sistem dvije neraspoznatljive čestice u ravnini. Kao i prije, ponovno pretpostavljamo da ne postoji interakcija među česticama ukoliko je $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$, dok za $\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$ postoji beskonačno jaka odbojna interakcija među česticama. Za svaku amplitudu vjerojatnosti $\mathcal{A}$ u slučaju neraspoznatljivih čestica imamo dvije pripadne amplitude vjerojatnosti za analogni slučaj s raspoznatljivim česticama. U jednoj od tih amplituda dolazi do permutacije čestica, a u drugoj ne. Neka je $\mathcal{A}_1$ amplituda u kojoj ne dolazi do permutacije, a $\mathcal{A}_2$ amplituda u kojoj ne dolazi do permutacije. Ukupna amplituda je tada jednaka:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \pm \mathcal{A}_2 \quad (32)$$

gdje + i − označavaju bozone i fermione, respektivno. Ovaj izraz na prvi pogled dopušta isključivo bozonsko i fermionsko ponašanje. Ali amplitude $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ su dane izrazom (28) što znači da $\mathcal{A}_2$ dobiva dodatnu fazu $\phi/2$ u odnosu na $\mathcal{A}_1$ iz čega slijedi mogućnost anyonskog ponašanja. Štoviše, moguće je i da se fermioni u ovakvom dvodimenzionalnom sustavu ponašaju kao bozoni i obratno.

Na temelju analize dvodimenzionalnog sustava, moguće je zaključiti što će se dogoditi ako se čestice nalaze u n-dimenzionalnom prostoru za $n > 2$. Glavna razlika koja tada nastaje je drugačija fundamentalna grupa. Naime, tada je svaki zatvoreni put moguće neprekidno transformirati u točku što znači da je fundamentalna grupa jednaka trivijalnoj grupi (sadrži samo jedan element). Iz toga slijedi da ne dolazi do pojave relativne faze između amplituda $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ pa čestice koje su originalno fermioni (bozoni) se mogu ponašati jedino kao fermioni (bozoni).

VI. ZAKLJUČAK

U ovom seminaru proučena je uloga topološka svojstava konfiguracijskog prostora višečestičnih sustava u statistici koju slijede ti sustavi. Pokazano je da u trodimenzionalnim i višedimenzionalnim sustavima čestice slijede isključivo bozonsku, odnosno fermionsku statistiku. S druge strane, u dvodimenzionalnim sustavima, statistika koju slijede čestice može biti fermionska, bozonska ili anyonska te pri tome to ne ovisi o statistici koju bi slijedile te čestice u višedimenzionalnim sustavima (dok bi, za razliku od toga, dvije iste čestice poštivale istu statistiku u trodimenzionalnom i četverodimenzionalnom prostoru).

Nadalje, pojava anyona u dvodimnzionalnim sustavima je posljedica isključivo topoloških svojstava konfiguracijskog prostora promatranog sustava. To znači da ukoliko želimo dobiti anyone u trodimenzionalnim sustavima, interakcija između čestica mora biti takva da rastavi konfiguracijski prostor na nekoliko dijelova (sumu nekoliko mnogostrukosti) od kojih će barem neki biti dvodimenzionalni te neće biti jednostavno povezani.

[1] M. G. G. Laidlaw and C. DeWitt-Morette. Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles. Phys. Rev. D, 3(6):1375-1378, 1971. doi: 10.1103/PhysRevD.3. 1375.

[2] M. G. G. Laidlaw. Quantum Mechanics in Multiply Connected Spaces. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 1971.

[3] E. H. Spanier. Algebraic Topology. Springer-Verlag, 1981.

[4] P. J. Higgins. Notes on Categories and Groupoids. Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[5] L. S. Schulman. A path integral for spin. Phys. Rev., 176(5):15581569, 1968. doi: 10.1103/ PhysRev.176.1558.