

# Sintetički vektorski potencijal zavojnice za ultrahladne atome

Tomislav Jajtić

Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb  
18. siječnja 2018.

Zanima nas je li moguće u sustav ultrahladnih atomskih plinova, ograničenog na gibanje u dvije prostorne dimenzije (u xy ravnini), upisati vektorski potencijal zavojnice koristeći lasersku zraku koja se propagira u z-smjeru. Vektorski potencijal beskonačno dugačke i beskonačno tanke zavojnice kroz koju teče magnetski tok  $\Phi$  dan je izrazom  $\mathbf{A} = (\Phi/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ ; do na baždarnu invarijantnost. Pokazali smo da valna funkcija sustava ultrahladnih atomskih plinova dobiva geometrijsku fazu  $\sim \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{l}$  u adijabatskoj aproksimaciji, a onda, za sustav s dva nivoa, da laserski detuning  $\Delta$  mora biti konstantan, a Rabijeva frekvencija  $\kappa \sim e^{2im\varphi}$  da bi sintetički vektorski potencijal  $\mathcal{A}$  bio oblika  $\mathcal{A} = (\Sigma/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ ; istog oblika kao i vektorski potencijal zavojnice.

## I. UVOD

Beskončno dugačka i beskonačno tanka zavojnica magnetskog toka  $\Phi$  postavljena duž z-osi stvara vektorski potencijal

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{r}, \quad (1)$$

gdje je  $r$  udaljenost od z-osi. Za  $r \neq 0$ , magnetsko polje  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  je 0.

Kroz xy ravninu teče magnetski tok  $\Phi$  pa je magnetsko polje

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} \hat{z}, \quad (2)$$

da bi imali

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi. \quad (3)$$

Baždarnom transformacijom

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\lambda, \quad (4)$$

gdje je  $\lambda$  bilo koja skalarna funkcija, možemo promijeniti vektorski potencijal  $\mathbf{A}$ , a da nam pri tome magnetsko polje  $\mathbf{B}$  ostane isto jer je

$$\nabla \times (\nabla\lambda) = 0, \quad \forall \lambda. \quad (5)$$

Čestica naboja  $q$  koja se giba oko naše zavojnice po zatvorenoj krivulji  $\mathcal{C}$ , u prostoru gdje je magnetsko polje  $\mathbf{B} = 0$ , a vektorski potencijal  $\mathbf{A} \neq 0$ , dobiva Aharonov-Bohm<sup>[1]</sup> fazu

$$\Delta\phi = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} q\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (6)$$

koja je neovisna o izboru baždarenja (neovisna o izboru  $\lambda$ ).

Do sada ste možda primjetili da je centralna veličina koja se ovdje pojavljuje vektorski potencijal  $\mathbf{A}$  pa

bismo, očito, htjeli naći sustav koji nam daje potencijal istog oblika kao i onaj u jednadžbi (1).

Ideja ovdje je predložiti kvantni sustav koji će u dvije dimenzije (u xy ravnini) stvarati baždarno polje  $\mathcal{A}$  istog oblika kao  $\mathbf{A}$  u jd. (1). Taj sustav bit će ultrahladni atomi koje obasjavamo laserom.  $\mathcal{A}$  će biti posljedica interakcije atoma i laserske svjetlosti i zvat ćemo ga sintetičkim vektorskim potencijalom.

Da bismo odredili kakav to sustav točno treba biti, prvo ćemo u poglavlju II promotriti kvantni sustav koji ovisi o vanjskim parametrima koji evoluiraju adijabatski. Pokazat ćemo da se u takvim sustavima pojavljuju geometrijske faze, poput Aharonov-Bohm faze, u kojima se pojavljuje baždarno polje  $\mathcal{A}$  koje igra ulogu vektorskog potencijala pomnoženog s nabojem  $q\mathbf{A}$ .

U poglavlju III promotrit ćemo atome koji se sporo gibaju u monokromatskom laserskom polju i kod njih primijeniti ideju geometrijske faze.

U poglavlju IV pogledat ćemo atome s dva nivoa (ili s tri nivoa koji se mogu efektivno svesti na dva nivoa) i odrediti kako  $\mathcal{A}$  ovisi o laserskom detuningu  $\Delta$  i Rabijevoj frekvenciji  $\kappa$ .

U poglavlju V riješit ćemo valnu jednadžbu i proučit ćemo optičke vrtloge jer će nam oni trebati da odredimo kakva to laserska zraka treba biti da bismo dobili  $\mathcal{A}$  željenog oblika.

Poglavljia I-V bit će pregled već poznatih računa<sup>[2],[5],[6]</sup>, a iduća dva poglavljia, VI i VII bit će novi, originalni, rad gdje ćemo odrediti kakvi trebaju biti  $\Delta$  i  $\kappa$  da bi sintetički vektorski potencijal  $\mathcal{A}$  bio istog oblika kao i potencijal beskonačno dugačke i tanke zavojnice.

## II. GEOMETRIJSKE FAZE

Pogledajmo sustav čije stanje ovisi o vanjskim parametrima. Neka ti parametri, označimo ih s vektorom  $\boldsymbol{\lambda}$ ,

evoluiraju po zatvorenoj krivulji i neka je ta evolucija adijabatska, tj.  $\lambda$  evoluiraju sporo od vremena 0 do vremena  $T$  i isti su u 0 i  $T$ :

$$\lambda(0) \rightarrow \lambda(t) \rightarrow \lambda(T) = \lambda(0). \quad (7)$$

Prirodno je pretpostaviti da će onda i stanje promatranog sustava u  $T$  biti isto kao i stanje u 0, ali to ne mora biti tako. Na primjer, ravnina njihanja Foucaultovog njihala zakrenuta je za neki kut nakon 24 h (nakon jedne pune rotacije) koji ovisi o geografskoj širini na kojoj se njihalo nalazi. Slične geometrijske faze imat ćemo i u kvantnom slučaju (Berryjeva faza).

Zamislimo sada kvantni sustav čiji hamiltonijan ovisi o nekom parametru  $\lambda$ . Označimo s  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  svojstvena stanja hamiltonijana i s  $E_n(\lambda)$  pripadne energije:

$$\hat{H}(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle. \quad (8)$$

Pretpostavimo da je  $\{|\psi_n(\lambda)\rangle\}$  ortogonalna baza Hilbertovog prostora za svaki  $\lambda$  i pogledajmo evoluciju vektora stanja

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n[\lambda(t)]\rangle \quad (9)$$

kada  $\lambda$  sporo evoluiru u vremenu. Pretpostavimo da je sustav početno pripremljen u stanju  $|\psi_l\rangle$ :

$$c_l(0) = 1, \quad c_n(0) = 0, \quad \forall n \neq l, \quad (10)$$

i evolucija adijabatska. Evoluciju koeficijenta  $c_l$  dobivamo iz Schrödingerove jednadžbe:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{c}_l &= [E_l(t) - i\hbar \dot{\lambda} \cdot \langle \psi_l | \nabla \psi_l \rangle] c_l \\ &= [E_l - \dot{\lambda} \cdot \mathcal{A}_l(\lambda)] c_l. \end{aligned} \quad (11)$$

Član

$$\mathcal{A}_l(\lambda) = i\hbar \langle \psi_l | \nabla \psi_l \rangle \quad (12)$$

zovemo **Berryjevom vezom**<sup>[3]</sup> i ona će igrati ulogu vektorskog potencijala i zato ćemo  $\mathcal{A}$  još zvati i **sin-tetičkim vektorskim potencijalom**. Preciznije, u elektromagnetizmu, na mjestu  $\mathcal{A}$  stajao bi vektorski potencijal pomnožen s nabojem, tj.  $q\mathbf{A}$  pa  $\mathcal{A}$  igra ulogu  $q\mathbf{A}$ . Budući da se naš  $\mathcal{A}$  ne množi s nabojem u jednadžbama, možemo raditi i s neutralnim česticama.

Pogledajmo sada kako to točno dobijemo geometrijsku fazu. Pretpostavimo da parametar  $\lambda$  evoluiru po zatvorenoj krivulji  $\mathcal{C}$  u parametarskom prostoru tako da  $\lambda(T) = \lambda(0)$ . Integriranjem jedn. (11) dobivamo

$$c_l(T) = e^{i\Phi^{dyn.}(T)} e^{i\Phi^{geom.}(T)} c_l(0), \quad (13)$$

gdje smo uveli **dinamičku fazu**

$$\Phi^{dyn.}(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_l(t) dt \quad (14)$$

i **geometrijsku fazu**

$$\Phi^{geom.} = \frac{1}{\hbar} \int_0^T \dot{\lambda} \cdot \mathcal{A}_l(\lambda) dt = \frac{1}{\hbar} \oint \mathcal{A}_l(\lambda) \cdot d\lambda. \quad (15)$$

Dinamička faza je ista ona faza koja se pojavljuje u vremenski neovisnom problemu. Geometrijska faza, koju još zovemo **Berryjevom fazom**, ovisi samo o putanji parametra  $\lambda$ . Članovi  $\exp(i\Phi^{dyn.})$  i  $\exp(i\Phi^{geom.})$  baždarno su invarijantni; ne mijenjaju se ako svojstvena stanja  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  pomnožimo s proizvoljnim faznim faktorom<sup>[2]</sup>.

Ako se ograničimo na slučaj kada parametar  $\lambda$  evoluiru u dvodimenzionalnom (ili trodimenzionalnom prostoru), onda možemo uvesti **Berryjevu zakrivljenost** koja igra ulogu magnetskog polja:

$$\mathcal{B}_l = \nabla \times \mathcal{A}_l. \quad (16)$$

Berryjeva zakrivljenost je realno, baždarno invarijantno, vektorsko polje. Geometrijsku fazu možemo zapisati kao

$$\Phi^{geom.}(T) = \frac{1}{\hbar} \iint_S \mathcal{B}_l \cdot d^2S, \quad (17)$$

gdje je  $S$  površina definirana krivuljom  $C$ .

### III. ADIJABATSKA EVOLUCIJA OBUČENIH STANJA

Ideju geometrijske faze možemo primjeniti kod atoma koji se sporo gibaju (ultrahladni su;  $T \lesssim \mu K$ ) u monokromatskom laserskom polju. Postoje dva stupnja slobode. Jedan je gibanje centra mase atoma koje opisujemo operatorima položaja  $\hat{r}$  i impulsa  $\hat{p} = -i\hbar \nabla_r$ . Drugi je unutarnja dinamika atoma; prijelazi između elektronskih stanja inducirani laserom. Cijeli sustav opisujemo hamiltonijanom  $H_{tot}$ , a taj drugi, unutarnji, stupanj slobode opisujemo vremenski neovisnim hamiltonijanom  $\hat{H}_{int}(\mathbf{r})$ :

$$\hat{H}_{tot} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hat{H}_{int}(\hat{r}). \quad (18)$$

**Obučena stanja**  $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$  definiramo kao svojstvena stanja unutarnjeg hamiltonijana:

$$\hat{H}_{int}(\mathbf{r}) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle = E_n(\mathbf{r}) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle. \quad (19)$$

U svakoj točki  $\mathbf{r}$ , skup  $\{|\psi_n(\mathbf{r})\rangle\}$  čini bazu Hilbertovog prostora koji odgovara unutarnjim stupnjevima slobode pa ukupno stanje sustava razvijemo u toj bazi:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \phi_n(\mathbf{r}, t) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle. \quad (20)$$

Ako je sustav početno pripremljen u stanju  $|\psi_l\rangle$ , kao u jd. (10), onda uvrštavajući jd. (20) u Schrödingerovu jednadžbu,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{H}_{tot} \Psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2M} + \hat{H}_{int}(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (21)$$

dobivamo jednadžbu za amplitudu vjerojatnosti  $\psi_l$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_l(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_l(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_l(\mathbf{r}) \right] \psi_l(\mathbf{r}, t), \quad (22)$$

gdje je

$$\mathcal{A}_l(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_l | \nabla | \psi_l \rangle \quad (23)$$

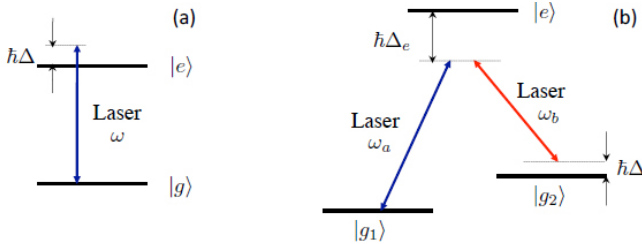
Berryjeva veza koja igra ulogu vektorskog potencijala;  $\nabla$  je gradijent u realnom koordinatnom prostoru,  $E_l(\mathbf{r})$  energija obučenog stanja, a

$$\mathcal{V}_l(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq l} |\langle \nabla \psi_l | \psi_n \rangle|^2 \quad (24)$$

dodatni skalarni potencijal. Nas zanima  $\mathcal{A}_l$  i izračunat ćemo ga za slučaj sustava s dva nivoa. Svi ostali sustavi mogu se svesti na taj.

#### IV. SUSTAV S DVA NIVOA

Pogledajmo sustav s dva nivoa kao na slici 1a. Kada je vrijeme života pobuđenog stanja puno duže od vremenskih skala na kojima se provodi eksperiment (npr. ako koristimo atome magnezija, stroncija ili iterbija), možemo zanemariti procese vezane uz spontanu emisiju fotona. Tada interakcija atoma i lasera ovisi samo o Rabijevoj frekvenciji  $\kappa$  i razlici frekvencija lasera i atomskog prijelaza koju zovemo detuning  $\Delta$ .



Slika 1: (a) Atom s dva nivoa. (b) Ramanov prijelaz između dva podnivoa osnovnog stanja atoma. Slika preuzeta iz [2].

Isti formalizam možemo primijeniti i za sustav kao na slici 1b s Ramanovim prijelazom između dva podnivoa osnovnog stanja atoma. Takav sustav imamo kod alkalij-skih metala i kod erbija i disprozija. Ako je detuning  $\Delta_e$  dovoljno velik, pobuđeno stanje  $|e\rangle$  možemo eliminirati iz jednadžbi i problem se svodi na sustav s dva nivoa u bazi  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$  s Ramanovim **detuningom**  $\Delta$  i **Rabijevom frekvencijom**

$$\kappa = \frac{\kappa_a \kappa_b^*}{2\Delta_e} \quad (25)$$

gdje su  $\kappa_j$  jednofotonske Rabijeve frekvencije za prijelaze  $g_j \leftrightarrow e$ .

U oba slučaja, unutarnji hamiltonijan  $\hat{H}_{int}$  možemo napisati kao  $2 \times 2$  matricu u bazi  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  ili bazi  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ :

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Definiramo poopćenu Rabijevu frekvenciju  $\Omega$ , **kut miješanja**  $\theta$  i **fazni kut**  $\phi$ :

$$\Omega = (\Delta^2 + |\kappa|^2)^{1/2}, \quad \cos \theta = \frac{\Delta}{\Omega}, \quad \kappa = |\kappa| e^{i\phi}. \quad (27)$$

Unutarnji hamiltonijan tada postaje

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Omega}{2} \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (28)$$

gdje je  $\mathbf{n}$  jedinični vektor određen sferičnim kutovima  $\theta$  i  $\phi$ , a  $\hat{\sigma}_j$  su Paulijeve matrice. Svojstvene vrijednosti ove matrice su  $\pm \hbar\Omega/2$ , a pripadna svojstvena stanja su

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Sada možemo izračunati Berryjevu vezu (u ulozi vektorskog potencijala) koristeći jd. (23), a onda i Berryjevu zakrivljenost (u ulozi magnetskog polja) koristeći jd. (16):

$$\mathcal{A}_\pm = \pm \frac{\hbar}{2} (\cos \theta - 1) \nabla \phi, \quad (30)$$

$$\mathcal{B}_\pm = \pm \frac{\hbar}{2} \nabla (\cos \theta) \times \nabla \phi. \quad (31)$$

Predznake  $\pm$  biramo ovisno o tome u kojem smo svojstvenom stanju pripremili sustav pa bez gubitka općenitosti možemo izabrati  $+$  i više ne moramo pisati  $\pm$  u jednadžbama.

Do ovdje razvijen matematički formalizam je manje-više ponovljen račun iz [2]. Dva su razloga za to; prvi je da provjerimo sam račun, a drugi je da naučimo odakle dolazi sintetički vektorski potencijal.

Sintetički vektorski potencijal posljedica je interakcije atoma i laserske svjetlosti.

Sada, u principu, možemo tražiti kakvi  $\Delta$  i  $\phi$  moraju biti da bi dobili  $\mathcal{A}$  koji je  $\sim \hat{\varphi}/r$ . Međutim, da odredimo kakav laser treba biti, trebamo naučiti što su to optički vrtlozi pa ćemo prvo to napraviti u idućem poglavlju.

#### V. LASERSKE ZRAKE S VRTLOZIMA

Promotrimo valnu jednadžbu

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{r}, z, t) = 0, \quad (32)$$

gdje je sada  $\mathbf{r} = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  vektor položaja u cilindričnom koordinatnom sustavu. Separacijom varijabli,

$$u(\mathbf{r}, z, t) = R(\mathbf{r}, z)e^{-i\omega t} \quad (33)$$

i uvrštavanjem u jd. (32) dobivamo jednadžbu za  $R(\mathbf{r}, z)$ :

$$(\nabla^2 - k^2)R(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (34)$$

gdje je  $k = \omega/c$  valni broj. Daljnjom separacijom,

$$R(\mathbf{r}, z) = U(\mathbf{r}, z)e^{ikz}, \quad (35)$$

i paraksijalnom aproksimacijom  $\partial^2 U/\partial z^2 \ll k\partial U/\partial z$  dobivamo paraksijalnu valnu jednadžbu

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) U(\mathbf{r}, z) = 0. \quad (36)$$

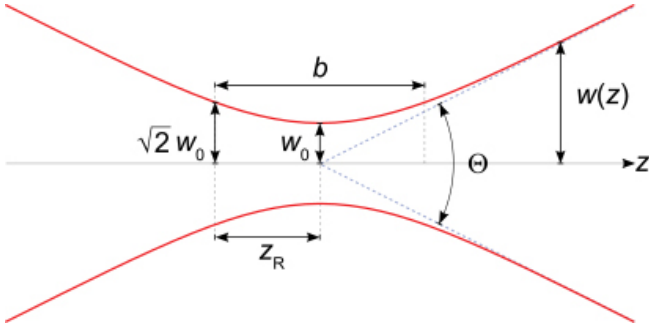
$U(\mathbf{r}, z)$  možemo dalje separirati:

$$U(\mathbf{r}, z) = Z(z)F(u, v)GB(r, q), \quad (37)$$

gdje su  $\boldsymbol{\rho} \equiv (u, v) = (x, y)/\chi(z)$  skalirane koordinate s faktorom skaliranja  $\chi(z)$  koji tek treba odrediti, a  $GB(r, q)$  je gausijan

$$GB(r, q) = \frac{q_0}{q_0 + z} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q(z)}\right), \quad (38)$$

s kompleksnim parametrom  $q = z + q_0$ . **Struk** zrake definiramo kao širinu zrake tamo gdje joj je intenzitet najjači, u  $z = 0$ ;  $w_0 = w(0)$ , kao na slici 2. Parametar



Slika 2: Laserska zraka i njezin struktur  $w_0$ .

$q(z=0) = q_0$  i struktur  $w_0$  su povezani;  $q_0 = i\pi w_0^2/\lambda$ ;  $\lambda$  je valna duljina laserske zrake.

Uvrštavajući jd. (37) u jd. (36) dobivamo jednadžbe za  $F(u, v)$ ,  $\chi(z)$  i  $Z(z)$ :

$$[\tilde{\nabla}^2 - i\boldsymbol{\rho} \cdot \tilde{\nabla} - \gamma - i]F = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\chi^2}{q^2} \right) = \frac{1}{kq^2}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{i\gamma - 1}{2k\chi^2}, \quad (41)$$

gdje je  $\tilde{\nabla} = (\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ , a  $\gamma$  je separacijska konstanta. Rješavanjem jd. (40) dobivamo parametar skaliranja:

$$\frac{1}{\chi^2(z)} = k \left( \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{q} \right), \quad (42)$$

gdje je  $\tilde{q} = z + \tilde{q}_0$ , a  $\tilde{q}_0$  je integracijska konstanta. Iz jd. (41) dobivamo

$$Z(z) = \left( \frac{\tilde{q}q_0}{q\tilde{q}_0} \right)^{i\gamma/2-1/2}, \quad (43)$$

$Z(0) = 1$ .  $F(\rho) = F(u, v)$  napišemo u obliku:

$$F(\rho) = G(\rho)e^{im\varphi}e^{i\rho^2/4}/\rho, \quad (44)$$

gdje su  $\rho = r/\chi(z)$ , a  $m$  cijeli broj i uvrstimo u jd. (39) da bismo, uz promjenu varijable  $\varrho = i\rho^2/2$ , dobili:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{4} + \frac{i\gamma/2}{\varrho} + \frac{1/4 - (m/2)^2}{\varrho^2} \right) G(\varrho) = 0. \quad (45)$$

Jd. (45) je kanonska forma Whittakerove diferencijalne jednadžbe<sup>[4]</sup> čija su rješenja dana Whittakerovim funkcijama  $M_{i\gamma/2, m/2}(\varrho)$ . Kada skupimo sve članove zajedno, rješenje paraksijalne valne jednadžbe je

$$U(\mathbf{r}, z) = \text{CiB}_\gamma^m(\mathbf{r}; q, \tilde{q}) = \left( \frac{\tilde{q}q_0}{q\tilde{q}_0} \right)^{i\gamma/2} \left( \frac{ir^2}{2\chi^2} \right)^{-1/2} \times M_{i\gamma/2, m/2} \left( \frac{ir^2}{2\chi^2} \right) e^{im\varphi} \times [GB(r, q)GB(r, \tilde{q})]^{1/2}. \quad (46)$$

Whittakerove funkcije  $M_{i\gamma/2, \mu}(\varrho)$  povezane su s konfluentnom hipergeometrijskom funkcijom  ${}_1F_1(a, b; x)$ <sup>[4]</sup> pa jd. (46) možemo napisati u obliku

$$\text{CiB}_\gamma^m(\mathbf{r}; q, \tilde{q}) = \left( \frac{\tilde{q}q_0}{q\tilde{q}_0} \right)^{i\gamma/2-1/2} \left( \frac{ir^2}{2\chi^2} \right)^{m/2} \times {}_1F_1 \left( \frac{1+m-i\gamma}{2}, m+1; \frac{ir^2}{2\chi^2} \right) \times GB(r, q)e^{im\varphi}. \quad (47)$$

**CiB** ovdje stoji za **circular beams**, u slobodnom prijevodu; zrake s vrtlozima, i ovime smo ponovili izvod iz [5]. Specijalan slučaj kada su konstante  $\gamma = -i(p+m+1)$  i  $\tilde{q}_0 = 0$  zovemo **hipergeometrijski gausovski modovi**, skraćeno, **HyGG** modovi, koji su detaljnije obrađeni u [6].

Rješenje u obliku jd. (47) vrlo je nezgodno zbog konfluentne hipergeometrijske funkcije koja se u njoj pojavljuje. Kao i uvijek, spašavaju nas svojstva specijalnih funkcija, kao npr. ovaj limes iz [4]:

$${}_1F_1(a, b; x) \sim x^{-a}, \text{ za } x \rightarrow \infty. \quad (48)$$

$a$  i  $b$  su  $-p/2$  i  $m+1$ , a  $x = ir^2/2\chi^2$ . Da bismo primjenili taj limes u jd. (47), dovoljno je pogledati član  $1/\chi^2$  koji je za HyGG ( $\tilde{q}_0 = 0$ ) jednak

$$\frac{1}{\chi^2} = k \frac{q_0}{(z + q_0)z}. \quad (49)$$

$1/\chi^2 \rightarrow \infty$  kada  $z \rightarrow 0$  ili kada  $z \rightarrow q_0$ , ali zanimljiv nam je samo prvi slučaj jer točno znamo gdje je to; u struku zrake ( $a$  i  $q_0$  je puno manji od dužine laserske zrake pa možemo uzeti  $q_0 \approx 0$  i opet se svodimo na prvi slučaj).

Tada se, za  $z \rightarrow 0$ , HyGG svodi na

$$\begin{aligned} \text{HyGG}_p^m(\rho, \varphi) &= \text{CiB}_{-i(p+m+1)}^m(\mathbf{r}; q_0, 0) \\ &= C_{pm} r^{|m|+p} e^{-\rho^2} e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (50)$$

gdje je  $C_{pm}$  konstanta koja se može odrediti normiranjem, ali to nam ovdje nije potrebno; bitno je jedino da je konstanta,  $\rho = r/w_0$ , a modove  $p = -|m|$  možemo generirati tako da fazu  $e^{im\varphi}$  dodamo na TEM<sub>00</sub> mod lasera. Takva laserska polja postoje i zovu se **optički vrtlozi**, a dobivaju se, na primjer, propuštanjem laserske zrake kroz masku koja je kompjuterski generirani hologram (CGH) kao u [6].

Električno polje takvog lasera koji se propagira u  $z$ -smjeru je; ne smijemo zaboraviti dio koji se tiče propagacije same zrake;

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{im\varphi} e^{ikz-i\omega t} \hat{\mathbf{x}}. \quad (51)$$

## VI. RABIJEVA FREKVENCIJA I DETUNING

Sada možemo odrediti kakav to laser treba biti, tj. kakav detuning  $\Delta$  i Rabijeva frekvencija  $\kappa$  moraju biti, tj. kakvi  $\cos\theta$  i  $\phi$  moraju biti da bi naš sintetički vektorski potencijal  $\mathcal{A}$  bio istog oblika kao i vektorski potencijal zavojnice  $\mathbf{A} \sim \hat{\varphi}/r$ .

Prilično je jednostavno pogoditi rješenje. Ako je  $\cos\theta$  konstantan, a  $\phi$  proporcionalna cilindričnoj koordinati  $\varphi$ , onda jd. (30) odmah daje  $\mathcal{A} \sim \hat{\varphi}/r$  i  $\mathcal{B} = 0$ , za  $r \neq 0$ ; točno kako i treba biti za beskonačnu zavojnicu. Budući da je Rabijeva frekvencija  $\sim \kappa_a \kappa_b^* \sim e^{2i\phi}$ , a  $\kappa_{a,b} \sim \mathbf{E}$ , električno polje  $\mathbf{E}$  mora biti oblika  $e^{im\varphi}$ , gdje je  $m$  cijeli broj.

Član oblika  $e^{im\varphi}$  imamo u jd. (51) pa možemo koristiti laser s električnim poljem

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{im\varphi} e^{ikz-i\omega t} \hat{\mathbf{x}}, \quad (52)$$

tj. laser koji stvara optičke vrtloge. Magnetsko polje je, naravno,  $\mathbf{B} = (1/c)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$ , polarizacija je linearna, laserska zraka je u struku široka  $w_0$ .

Ovdje je važno naglasiti da električno polje ima ovaj oblik samo u struku zrake (u  $z = 0$ , tj. u  $xy$  ravnini); tamo kamo zraku fokusiramo, tj. tamo gdje je njezin intenzitet najjači. Dakle, naše ultrahladne atome moramo staviti u struk zrake u  $xy$  ravninu da bi cijela stvar funkcionirala.

Svaka realna laserska zraka ima neku raspodjelu intenziteta u radijalnom smjeru pa član  $e^{-r^2/w_0^2}$  ne možemo izbjeći. Međutim, taj nam član neće stvarati probleme ako je laserska zraka dovoljno široka, tj.  $w_0$  dovoljno velika. Također, član  $e^{ikz-i\omega t}$  ne možemo izbjeći jer se laserska zraka mora nekako propagirati.  $kz$  dio nije problematičan jer ćemo ga se moći riješiti baždarnom transformacijom, a  $i\omega t$  dio nestane prilikom kompleksne konjugacije.

## VII. SINTETIČKI VEKTORSKI POTENCIJAL ZAVOJNICE ZA ULTRAHLADNE ATOME

Sustav s kojim radimo je onaj na slici 1b. Imamo dva lasera,  $\omega_a$  i  $\omega_b$ . Oba imaju polja istog oblika, ali se propagiraju u suprotnim smjerovima. Laserska zraka prvog lasera propagira se u  $+z$  smjeru i njezino električno polje ima oblik

$$\mathbf{E}_a = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{im\varphi} e^{ikz-i\omega t} \hat{\mathbf{x}}, \quad (53)$$

a laserska zraka drugog lasera propagira se u  $-z$  smjeru i njezino električno polje ima oblik

$$\mathbf{E}_b = E_0 e^{-r^2/w_0^2} e^{-im\varphi} e^{-ikz-i\omega t} \hat{\mathbf{x}}. \quad (54)$$

Rabijeva frekvencija je, koristeći jd. (25),

$$\kappa = \kappa_0 e^{2im\varphi + 2ikz} e^{-2r^2/w_0^2}, \quad (55)$$

tj. faza je

$$\phi = 2kz + 2m\varphi, \quad (56)$$

a gradijent koji se pojavljuje u  $\mathcal{A}$  u jd. (30) je

$$\nabla\phi = 2k\hat{\mathbf{z}} + 2m\frac{\hat{\varphi}}{r}. \quad (57)$$

Kut miješanja  $\cos\theta$  je, koristeći jd. (27),

$$\cos\theta = \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}}, \quad (58)$$

i konstantan je za konstantni detuning  $\Delta$  i veliku širinu struka  $w_0$ . Sintetički vektorski potencijal je tada

$$\mathcal{A}' = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}} - 1 \right] \left( 2m\frac{\hat{\varphi}}{r} + 2k\hat{\mathbf{z}} \right), \quad (59)$$

gdje smo uz  $\mathcal{A}'$  stavili crticu da bi nam iduća jednadžba ljepše izgledala jer ćemo baždarnom transformacijom  $\mathcal{A} = \mathcal{A}' - 2k\hat{\mathbf{z}}$  eliminirati konstantni član  $2k\hat{\mathbf{z}}$  koji

nam prilikom integriranja po zatvorenoj petlji u jd. (15) ionako daje 0. Dobivamo:

$$\mathcal{A} = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}} - 1 \right] 2m \frac{\hat{\phi}}{r} \quad (60)$$

Ako definiramo **sintetički magnetski tok**  $\Sigma$  kao

$$\Sigma = 2m\pi\hbar \left( \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \kappa_0^2 e^{-4r^2/w_0^2})^{1/2}} - 1 \right), \quad (61)$$

koji je približno konstantan za dovoljno širok struk, sintetički vektorski potencijal zavojnice za ultrahladne atome tada je

$$\mathcal{A} = \frac{\Sigma}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{r}, \quad (62)$$

a sintetičko magnetsko polje je  $\mathcal{B} = (\Sigma/2\pi)(\delta(r)/r)$  u potpunoj analogiji s vektorskim poljem beskonačne zavojnice  $\mathcal{A} = (\Phi/2\pi)(\hat{\phi}/r)$  i magnetskim poljem  $\mathcal{B} = (\Phi/2\pi)(\delta(r)/r)$ .

Dimenzija sintetičkog magnetskog toka  $\Sigma$  je  $Js$ , a običnog magnetskog toka  $\Phi$  je  $JsC^{-1}$ , gdje je  $C$  jedinica naboja Coulomb, tj. primjetimo da smo naboj u sintetičkom slučaju izgubili kao što smo i spomenuli već par puta u tekstu.

## VIII. ZAKLJUČAK

Beskonačna dugačka i beskonačno tanka zavojnica stvara vektorski potencijal  $\mathcal{A} = (\Phi/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ . Mi smo predložili kvantni sustav; ultrahladne atome, koji u interakciji s laserskom svjetlošću stvaraju polje istog oblika.

Prvo smo promotrili sustav koji ovisi o nekom vanjskom parametru  $\lambda$  koji se sporo mijenja (adijabatski). Uveli smo Berryjevu vezu  $\mathcal{A}_l = i\hbar \langle \psi_l | \nabla \psi_l \rangle$  koja igra ulogu vektorskog potencijala i našli smo geometrijsku fazu koju dobiva valna funkcija nakon jedne takve adijabatske promjene;  $\Phi^{geom.} = (1/\hbar) \oint \mathcal{A}_l \cdot d\lambda$ .

To smo primjenili na sustav s dva nivoa (formalno

dva, sustav zapravo ima 3 nivoa ali se matematički formalizam svodi na dva nivoa) i pokazali smo da je Berryjeva veza (sintetički vektorski potencijal) u tom slučaju jednak  $\mathcal{A} = (\hbar/2)(\cos\theta - 1)\nabla\phi$ , gdje su  $\cos\theta$  i  $\phi$  povezane s laserskim detuningom i Rabijevom frekvencijom.

Nakon toga, pokazali smo da jedno od rješenja paraksijalne valne jednadžbe ima oblik  $\sim \exp(-r^2/w_0 + im\phi - ikz - i\omega t)$  u struku laserske zrake. Rabijeva frekvencija tada ima fazu  $\phi \sim 2m\phi$ , a  $\cos\theta$  je konstantan ako je struk zrake dovoljno širok. To nam odmah daje sintetički vektorski potencijal  $\mathcal{A} = (\Sigma/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ , gdje je  $\Sigma$  sintetički magnetski tok. Sintetički vektorski potencijal je istog oblika kao vektorski potencijal beskonačne zavojnice  $\mathcal{A} = (\Phi/2\pi)(\hat{\phi}/r)$ .

Bitna razlika između sintetičkog i običnog vektorskog potencijala je da se u jednadžbama za sintetički vektorski potencijal nigdje ne pojavljuje naboj pa cijela stvar radi i s neutralnim česticama.

Naravno, postavlja se pitanje zašto baš zavojnica oko koje se giba (kvantna) nabijena čestica? Zato jer je takav kompozitni sustav beskonačne zavojnice plus nabijene čestice primjer kvazičestice koja se zove **anyon**<sup>[7]</sup> i koja se pojavljuje samo u dvodimenzionalnim sustavima. Anyoni su zanimljivi jer imaju necjelobroju statistiku. Budući da smo predložili sustav ultrahladnih atoma koje obasjavamo laserom koji daje isti vektorski potencijal kao i beskonačna zavojnica i geometrijske faze kao kad se nabijena čestica giba oko takve zavojnice, možda možemo proučavati anyone na jednom takvom sustavu.

## IX. ZAHVALE

Zahvaljujem Teni Dubček i Hrvoju Buljanu za neprocjenjivu pomoć prilikom izrade ovog seminara; za pomoć pri razumijevanju teorije, za guranje u pravom smjeru kad je zapinjalo i, naravno, za čitanje seminara i ukazivanje na sve pluseve koji su se, iz reda u red, slučajno pretvarali u minuse.

- 
- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in quantum theory*, Physical Review. 115: 485–491, 1959.
- [2] J. Dalibard, *Introduction to the physics of artificial gauge fields*, arXiv:1504.05520v1, 2015.
- [3] M.V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proceedings of the Royal Society A. 392 (1802): 45–57, 1984.
- [4] F.W.J. Olver et al., *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge, UK, Cambridge University Press,

- 2010.
- [5] Miguel A. Bandres and Julio C. Gutiérrez-Vega, *Circular beams*, Opt. Lett. 33, 177–179, 2008.
- [6] Ebrahim Karimi, Gianluigi Zito, Bruno Piccirillo, Lorenzo Marrucci, and Enrico Santamato, *Hypergeometric-Gaussian modes*, Opt. Lett. 32, 3053–3055, 2007.
- [7] F. Wilczek, *Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles*, Physical Review Letters. 49 (14): 957–959, 1982.