

# Funkcije strukture protona

Sebastian Horvat

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Kumerički

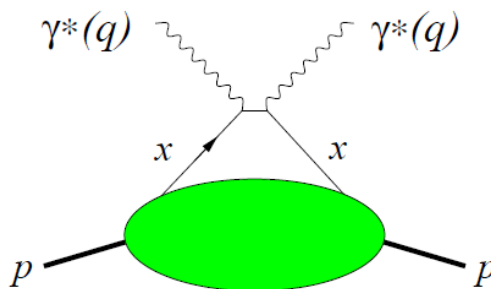
*Sveučilište u Zagrebu, PMF Fizički odsjek*

## Sažetak

Krenuvši od dubokog neelastičnog raspršenja i partonskih distribucijskih funkcija analizirane su funkcije strukture protona. Uvedene su generalizirane partonske distribucije te su objašnjena njihova svojstva. Nadalje, uvedeni su konformalni momenti, kao praktični alat za rješavanje jednadžbe evolucije koja se nameće radi renormalizacije. Izvedeni su inverzi konformalnih momenata u raznim režimima te je ukratko diskutirana njihova problematika.

## 1 Uvod

Veza strukture i svojstava hadrona je i dan danas velika nepoznanica u fizici. Fundamentalni problem leži u neperturbativnosti kvantne kromodinamike na niskim energijama koja dovodi do zatočenja kvarkova. Unatoč tome, mnoštvo toga se može zaključiti na temelju raznih procesa koji uključuju hadrone. Jedan takav proces je sudar elektrona i protona. Na niskim energijama elektron ne može "razlučiti" mikroskopsku strukturu protona te je zato dovoljno proton prikazati kao točkastu Diracovu česticu uz pripadne električne i magnetske form faktore koji opisuju njegovu raspodjelu naboja i struja. Nadalje, dovoljnim povećavanjem energije ulaznog elektrona, nastaje mogućnost da se proton raspadne na mezone, jetove, itd. Ukoliko na izlaznom kanalu mjerimo samo elektron, onda govorimo o duboko neelastičnom raspršenju (DIS). DIS je inkluzivni proces, budući da se sumira po svim fizikalno mogućim rezultatima procesa: to omogućava korištenje optičkog teorema (vidi npr.[1]), koji pokazuje da se u vodećem redu DIS svodi na *forward* proces  $\gamma^*p \rightarrow \gamma^*p$  (Slika 1), gdje \* označava virtualnost fotona.



Slika 1: DIS se u vodećem redu svodi na proces prikazan gornjim dijagramom. Preuzeto iz [2].

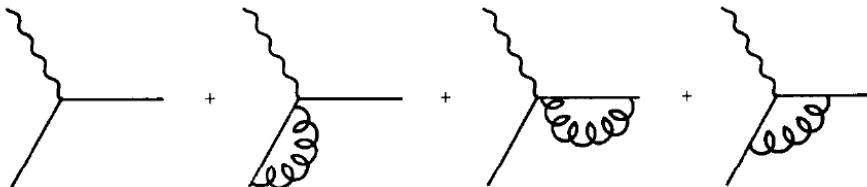
U Bjorkenovom limesu eksperimentalni rezultati ukazuju na to da se elektron raspršuje na točkastim Diracovim česticama, odnosno kvarkovima. Raspodjela longitudinalnog impulsa

raznih kvarkova u protonu dana je partonskim distribucijskim funkcijama  $f_q(x)$  (PDF). Izraz za udarni presjek je onda dan sa:

$$\frac{d\sigma_{ep}}{dx dQ^2} = \sum_q f_q(x) \left( \frac{d\hat{\sigma}_{eq}}{dx dQ^2} \right). \quad (1)$$

Dakle, proces se u odgovarajućem limesu faktorizira na perturbativni dio (sudar elektrona i kvarka) te na neperturbativni dio (PDF).

Bitno je napomenuti da interpretacija PDF-ova kao gustoće vjerojatnosti vrijedi samo u vodećem redu: u priču treba uvesti i sve moguće amplitude koje uključuju emisiju i apsorpciju gluona (Slika 2). Stoga PDF-ovi ovise i o skali; konkretna ovisnost dana je Altarelli-Parisi jednadžbom.



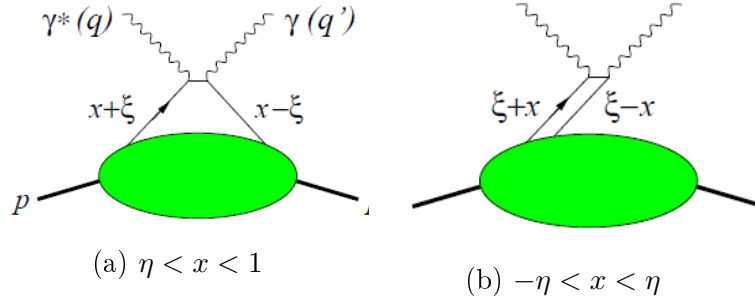
Slika 2: DIS dijagrami u redu  $O(\alpha_s)$ . Preuzeto iz [3].

## 2 Generalizirane partonske distribucije

U prethodnom odjeljku vidjeli smo kako iz eksperimenta pristupiti raspodjeli longitudinalnog impulsa partona u protonu pomoću PDF-ova. No, velik dio svojstava protona i dalje ostaje nepoznat: raspodjela transverznog impulsa, angularnog momenta, tlaka itd. Tim svojstvima moguće je pristupiti drugačijim hadronskim procesima, primjer čega je duboko virtualno Comptonovo raspršenje (DVCS) koje se svodi na proces  $\gamma^*p \rightarrow \gamma p$  (Slika 3). Razlika u odnosu na DIS je što ovdje postoji konačna izmjena impulsa između sudionika sudara (foton je na ulaznom kanalu virtualan, a na izlaznom realan) i radi se o ekskluzivnom procesu (mjere se svi produkti). Za opis neperturbativnog dijela takvih procesa, uvode se generalizirane partonske distribucije (GPD). GPD-ovi očito sadrže više informacija od PDF-ova te stoga ovise o raznim varijablama:

- $x = \frac{k^+ + k'^+}{2P^+}$ , gdje  $k$  i  $k'$  označavaju impulse emitiranog i apsorbiranog kvarka: radi se dakle o prosječnoj frakciji impulsa kvarkova
- $\eta = \frac{\Delta^+}{P^+}$ : izmjena impulsa;  $\eta = 0$  odgovara *forward* limesu
- $t = \Delta^2$ : Mandelstanova varijabla,

gdje je  $P = \frac{p+p'}{2}$  i  $\Delta = p - p'$ . Varijable su izražene preko *lightcone* komponenti četverovektora  $x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^3)$ .



Slika 3: DVCS dijagrami. Preuzeto iz [2].

GPD-ovi su definirani kao

$$F^q = \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP+z^-} \left\langle p' \left| \bar{q} \left( -\frac{1}{2}z \right) \gamma^+ q \left( \frac{1}{2}z \right) \right| p \right\rangle \Big|_{z^+=0, z=0}, \quad (2)$$

odnosno kao Fourierov transformat off-dijagonalnog matičnog elementa operatora koji stvara i poništava kvark na svjetlolikoj udaljenosti (pretpostavljamo da su kvarkovi bezmaseni); drugim riječima, GPD je proporcionalan amplitudi da proton pređe iz stanja impulsa  $p$  u stanje impulsa  $p'$  putem emisije i reapsorpcije kvarka (što se dobro slaže s dijagramom na Slici 3a). Slično, PDF-ovi se mogu definirati kao dijagonalni elementi gornjeg operatora (vidi [4]), što se ponovno slaže s intuicijom da se DIS svodi na *forward* proces (emitirani i apsorbirani kvark imaju jednake impulse). Treba napomenuti da definicija (2) vrijedi isključivo u baždarenju  $A^+ = 0$ ; u protivnom treba dodati Wilsonovu liniju koja čini izraz baždarno invarijantnim.

Ukoliko se nalazimo u kinematičkom režimu  $-\eta < x < \eta$ , onda GPD interpretiramo kao emisiju para kvark-antikvark bez naknadne apsorpcije (Slika 3b), dok ukoliko vrijedi  $-1 < x < -\eta$  govorimo o emisiji i apsorpciji antikvarka.

Uz DVCS postoje i drugi ekskluzivni procesi iz kojih je moguće ekstrapolirati GPD-ove: produkcija mezona  $\gamma^*p \rightarrow Mp$ , dvostruko virtualno Comptonovo raspršenje  $\gamma^*p \rightarrow e^+ep$ , itd. Konkretna ekstrapolacija je veoma komplicirana: naime, u vodećem redu potrebno je prosumirati amplitude mnoštva dijagrama izraženih preko konvolucija GPD-ova sa raznim Kernelima. U amplitudama se često javljaju izrazi poput:

$$\int_{-1}^1 dx f(x, \eta, t) \frac{1}{x - \eta + i\epsilon} = P \int_{-1}^1 dx f(x, \eta, t) \frac{1}{x - \eta} - i\pi f(\eta, \eta, t) \quad (3)$$

gdje je rastav na realni i imaginarni dio dobiven pomoću Sokhotski-Plemelj teorema. To ukazuje da *crossover* linija  $\eta = x$  ima najveći doprinos amplitudi te je s toga taj režim eksperimentalno najpristupačniji.

Kao primjer koristi GPD-ova za opis strukture protona navodimo tzv. Ji-jevo pravilo suma koje vodi korak bliže objašnjenju ukupnog spina protona preko angularnog momenta i spina njegovih konstituenata. Ji je pokazao u [5] da se prosječna vrijednost angularnog momenta pojedinog partona u protonu može izraziti kao:

$$\langle J_q^3 \rangle = \int_{-1}^1 dx x [H^q(x, \eta, 0) + E^q(x, \eta, 0)], \quad (4)$$

gdje su  $H^q(x, \eta, t)$  i  $E^q(x, \eta, t)$  definirani tako da vrijedi

$$F^q = \frac{1}{2P^+} \left[ H^q(x, \eta, t) \bar{u}(p') \gamma^+ u(p) + E^q(x, \eta, t) \bar{u}(p') \frac{i\sigma^{+\alpha} \Delta_\alpha}{2m} u(p) \right] \quad (5)$$

Takav rastav GPD-a moguć je zbog Lorentz invarijantnosti te je donekle analogan općenitom rastavu matičnih elemenata fermionskih struja na Diracove i Paulijeve form faktore.

## 2.1 Matematička svojstva

GPD-ovi u sebi sadrže PDF-ove:

$$H^q(x, 0, 0) = f^q(x), \quad (6)$$

i form faktore:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx H^q(x, \eta, t) &= F_1^q(t) \\ \int_{-1}^1 dx E^q(x, \eta, t) &= F_2^q(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Budući da je predznak od  $\eta$  jedino što određuje smjer procesa (odnosno što je emisija a što apsorpcija), invarijantnost na inverziju vremena implicira

$$F^q(x, -\eta, t) = F^q(x, \eta, t). \quad (8)$$

Nadalje, koristeći ekspanziju produkta operatora može se pokazati da GPD-ovi zadovoljavaju svojstvo polinomijalnosti (vidi npr.[6]):

$$\int_{-1}^1 dx x^n F^q(x, \eta, t) \sim \sum_{j=0}^n a_j \eta^j. \quad (9)$$

## 2.2 Evolucija

GPD-ove, kao i PDF-ove, treba korigirati perturbativnim korekcijama što dovodi do ovisnosti o skali, odnosno do ovisnosti o virtualnosti ulaznog fotona. U vodećem redu jednadžba evolucije glasi:

$$\mu \frac{d}{d\mu} F^q(x, \eta, \Delta^2, \mu^2) = -\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} \gamma^{(0)} \otimes F^q(x, \eta, \Delta^2, \mu^2), \quad (10)$$

dakle radi se o kompliciranoj konvoluciji GPD-a sa evolucijskim kernelom  $\gamma^{(0)}$ . Može se pokazati da je evolucijski kernel dijagonalan u bazi Gegenbauerovih polinoma: stoga, radi lakše provedbe evolucije, praktično je uvesti u priču konformalne momente.

### 3 Konformalni momenti

Konformalni momenti GPD-ova su definirani kao

$$\begin{aligned} F_n(\eta, t) &= \int_{-1}^1 dx c_n(x, \eta) F(x, \eta, t), \\ c_n(x, \eta) &= \eta^n \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(1+n)}{2^n \Gamma(\frac{3}{2}+n)} C_n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x}{\eta}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

gdje su  $C_j^{3/2}(x/\eta)$  Gegenbauerovi polinomi. Jednadžba evolucije za konformalne momente sada glasi:

$$\mu \frac{d}{d\mu} F_j^q(\eta, t, \mu^2) = -\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} \gamma_j^{(0)} F_j^q(\eta, t^2, \mu^2), \quad (12)$$

odnosno konvolucija u x-prostoru postaje obično množenje u j-prostoru što drastično olakšava rješavanje jednadžbe.

#### 3.1 Nalaženje inverza

Jednom kad se pređe u j-prostor te provede evolucija, potrebno je vratiti se u x-prostor, odnosno potrebno je naći inverz formule (11). Ukoliko uvedemo

$$p_n(x, \eta) = \eta^{-n-1} \theta(1 - |x/\eta|) \frac{2^n \Gamma(\frac{5}{2} + n)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(3 + n)} (1 - (x/\eta)^2) C_n^{\frac{3}{2}}(-x/\eta), \quad (13)$$

relacija ortogonalnosti Gegenbauerovih polinoma implicira

$$\int_{-1}^1 dx p_n(x, \eta) c_m(x, \eta) = (-1)^n \delta_{nm}. \quad (14)$$

GPD se onda može formalno izraziti preko njegovih momenata kao

$$F(x, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p_n(x, \eta) F_n(\eta, t). \quad (15)$$

Dana suma nažalost ne konvergira pa nije korisna u praksi što se vidi već i iz *forward* limesa  $\eta \rightarrow 0$

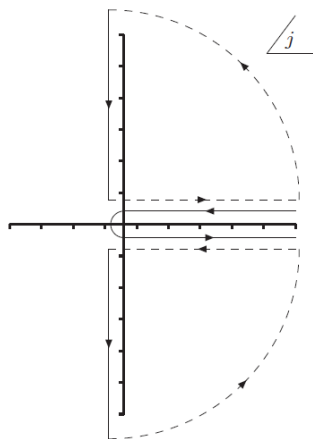
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x) F_n, \quad (16)$$

što pokazuje da se izraz za PDF-ove svodi na razvoj po derivacijama delta funkcija.

Jedno moguće rješenje ovog problema je analitičko produljenje konformalnih momenata na kompleksnu ravninu: indeks n promoviramo sa prirodnih na kompleksne brojeve. Uvodimo Sommerfield-Watson reprezentaciju

$$F(x, \eta, t) = \frac{1}{2i} \oint dj \frac{1}{\sin(\pi j)} p_j(x, \eta) F_j(\eta, t), \quad (17)$$

gdje je kontura integracije prikazana na Slici 4. Ukoliko su svi polovi funkcije  $p_j(x, \eta)F_j(\eta, t)$  s lijeve strane konture, jedini polovi koji doprinose integralu dolaze od nazivnika i nalaze se na  $j = n, n \in \mathbb{N}$ ; primjenom Cauchijevog teorema o reziduumu izraz se svodi na (15).



Slika 4: Kontura integracije Sommerfeld-Watson reprezentacije. Preuzeto iz [7].

Carlsonov teorem osigurava jedinstvenost analitičkog produljenja sa prirodnih na kompleksne brojeve ukoliko je funkcija asimptotski ograničena eksponencijalnom funkcijom (vidi [8]). To nije trivijalan zahtjev, no mi ćemo pretpostaviti da je on ispunjen za funkcije  $p_j(x, \eta)$  i  $F_j(\eta, t)$ . Također, pretpostavit ćemo da je opravdano zanemariti doprinos lukova konture (odnosno da funkcije trnu dovoljno brzo za  $|j| \rightarrow \infty$ ) što rezultira Mellin-Barnes integralom (za više detalja vidi [7]).

$$F(x, \eta, t) = \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dj \frac{1}{\sin(\pi j)} p_j(x, \eta) F_j(\eta, t). \quad (18)$$

Konstanta  $c$  mora biti odabrana tako da svi singulariteti z konformalnih momenata i Gegenbauerovih polinoma zadovoljavaju  $Re(z) < c$ . Polovi konformalnih momenata mogu se kvalitativno odrediti koristeći Reggeovu fenomenologiju ([9]) koja pretpostavlja da se polovi s najvećim realnim dijelom nalaze u točkama  $j = \alpha(t) - 1$ , dok se najdesniji pol funkcije  $p_j(x, \eta)$  nalazi na  $j = -5/2$  (što će se vidjeti u nadolazećim formulama); u obzir treba uzeti i evolucijski kernel koji sadrži pol na  $j = -1$ . Sve to zajedno govori da konstanta  $c$  mora biti odabrana tako da vrijedi  $c > \text{Max}(\alpha(t)-1, -1)$ , što često rezultira optimalnim odabirom  $-1 < c < 0$ .

Nadalje, analitičko produljenje Gegenbauerovih polinoma, odnosno  $p_j(x, \eta)$  prikazano je *Schläflf* integralom:

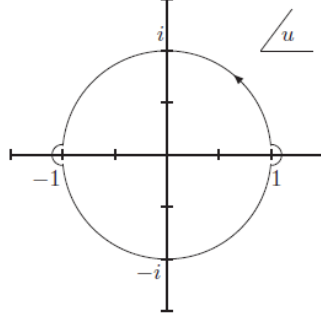
$$p_j(x, \eta) = -\frac{\Gamma(5/2 + j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2 + j)} \frac{1}{2i\pi} \oint_{-1}^1 du \frac{(u^2 - 1)^{j+1}}{(x + u\eta)^{j+1}}, \quad (19)$$

gdje se integracija provodi po jediničnoj kružnici uz zaobilaženje rezova na  $\pm 1$  (Slika 5). Va-

ljanost dane integralne reprezentacije može se provjeriti računom za  $j = n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
p_n(x, \eta) &= -\frac{\Gamma(5/2 + n)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2 + n)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{-1}^1 du \frac{(u^2 - 1)^{n+1}}{(x + u\eta)^{n+1}} \\
&= -\frac{\Gamma(5/2 + n)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2 + n)} \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{n!} \eta^{-n-1} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^{n+1} \Big|_{u=-x/\eta} \\
&= \frac{\Gamma(5/2 + n)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2 + n)} \frac{1}{n!} \eta^{-n-1} n! \frac{2^{n+1}}{2 + n} (1 - (x/\eta)^2) C_n^{3/2}(-x/\eta),
\end{aligned} \tag{20}$$

što se svodi na izraz (13). U prvoj jednakosti je ponovno korištena Cauchijeva formula, a u drugoj je iskorištena Rodriguesova formula za Gegenbauerove polinome. Izvrijednjavanje integrala (19) za općenite  $j, x$  i  $\eta$  je dosta komplicirano pa ćemo krenuti sa par specifičnih slučajeva.



Slika 5: Kontura integracije Schlaffli integrala . Preuzeto iz [7].

### 3.2 $\eta = x$

Kao što je već napomenuto, *crossover* linija  $\eta = x$  je najzanimljivija jer je eksperimentalno najpristupačnija. Izraz (18) se u tom kinematičkom režimu svodi na

$$p_j(x, \eta = x) = -\frac{\Gamma(5/2 + j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2 + j)} \frac{1}{2\pi i} x^{-j-1} \oint du (u - 1)^{j+1}, \tag{21}$$

Budući da nema nikakvih polova, kontura integracije se može slobodno spljoštiti i svesti na konturu koja ide tik iznad realne osi u jednom smjeru i tik ispod u drugom smjeru; rezultirajući integral nije jednak 0 zbog reza između -1 i 1 koji inducira razliku u fazi između gornjeg i donjeg integrala. Dakle,

$$\begin{aligned}
p_j(x, \eta = x) &= -\frac{\Gamma(5/2 + j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2 + j)} \frac{1}{2\pi i} x^{-j-1} (-)(e^{i\pi(j+1)} - e^{-i\pi(j+1)}) \int_{-1}^1 du (u - 1)^{j+1} \\
&= \frac{2^{j+2}\Gamma(5/2 + j)}{\Gamma(3/2)\Gamma(3 + j)} \frac{\sin[\pi(j + 1)]}{\pi} x^{-j-1},
\end{aligned} \tag{22}$$

što ubacivanjem u Mellin-Barnes integral i uključivanjem evolucijskog kernela daje

$$F(x, \eta = x, t, \mathcal{Q}^2) = \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dj \left(\frac{x}{2}\right)^{-j-1} \frac{\Gamma(5/2+j)}{\Gamma(3/2)\Gamma(3+j)} \exp \left\{ -\frac{\gamma_j^{(0)}}{2} \int_{\mathcal{Q}_0^2}^{\mathcal{Q}^2} \frac{d\mu \alpha_s(\mu)}{\mu} \frac{1}{2\pi} \right\} F_j(\eta = x, t, \mathcal{Q}_0^2). \quad (23)$$

Analitičko produljenje za  $p_j$  na *crossover* liniji može se alternativno dobiti putem funkcije izvodnice za Gegenbauerove polinome koja glasi:

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_j C_j^\alpha(x) t^j. \quad (24)$$

Za  $x=1$  i  $\alpha=3/2$  izraz se svodi na

$$\frac{1}{(1-t)^3} = \sum_j C_j^{3/2}(1) t^j, \quad (25)$$

što povlači

$$C_j^{3/2}(1) = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \frac{1}{(1-t)^3} = \frac{(j+1)(j+2)}{2}. \quad (26)$$

Ubacivanjem u definiciju (13) dolazimo do jednakog izraza dobivenog Schläffli integralom (što donekle "potvrđuje" jedinstvenost analitičkog produljenja Gegenbauerovih polinoma).

### 3.3 $\eta = 0$

U *forward* limesu GPD-ovi se svode na PDF-ove. Schläffli integral u tom režimu glasi

$$p_j(x, \eta = 0) = -\frac{\Gamma(5/2+j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2+j)} \frac{1}{2i\pi} x^{-j-1} \oint du (u^2-1)^{j+1}. \quad (27)$$

Analogno prethodnom slučaju, deformiramo konturu te svodimo izraz na integral po realnoj osi

$$p_j(x, \eta = 0) = \frac{\Gamma(5/2+j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2+j)} x^{-j-1} \frac{\sin[\pi(j+1)]}{\pi} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{j+1} dt. \quad (28)$$

Posljednji integral je jednak  $\beta(1/2, j+2)$ ; ubacivanjem u (18):

$$F(x, \eta = 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dj x^{-j-1} F_j(\eta = 0), \quad (29)$$

što je zapravo inverz Mellinovog transformata

$$F_j = \int_0^1 dx x^j F(x). \quad (30)$$

Time je pokazano da se konformalni momenti u *forward* limesu svode na Mellinove momente što je konzistentno s time da je operator evolucije u DIS-u dijagonalan u bazi tih momenata.



### 3.4 Općeniti $x$ i $\eta$

Ponovno smijemo deformirati konturu Schlaffli integrala u razliku integrala po realnoj osi. Za  $x < -\eta$  integral nema diskontinuitet (faze brojnika i nazivnika se krata) pa je razlika integrala jednaka nuli. Za  $-\eta < x < \eta$  diskontinuitet postoji samo na intervalu  $[-x/\eta, 1]$ , dok za  $x > \eta$  diskontinuitet postoji na cijelom intervalu  $[-1, 1]$ :

$$p_j(x, \eta) = \begin{cases} 0, & x < -\eta \\ \frac{\Gamma(5/2+j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2+j)} \frac{\sin(\pi[j+1])}{\pi} \int_{-x/\eta}^1 du \frac{(1-u^2)^{j+1}}{(x+u\eta)^{j+1}}, & -\eta < x < \eta \\ \frac{\Gamma(5/2+j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2+j)} \frac{\sin(\pi[j+1])}{\pi} \int_{-1}^1 du \frac{(1-u^2)^{j+1}}{(x+u\eta)^{j+1}}, & \eta < x. \end{cases} \quad (31)$$

Izraz je očito kontinuiran na  $\eta = x$  te predstavlja integralnu reprezentaciju hipergeometrijskih funkcija

$$p_j(x, \eta) = \theta(\eta - |x|)\eta^{-j-1}\mathcal{P}_j\left(\frac{x}{\eta}\right) + \theta(x - \eta)\eta^{-j-1}\mathcal{Q}_j\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j(x) &= \frac{2^{j+1}\Gamma(5/2+j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1+j)}(1+x) {}_2F_1\left(-j-1, j+2, 2; \frac{1+x}{2}\right), \\ \mathcal{Q}_j(x) &= -\frac{\sin(\pi j)}{\pi}x^{-j-1} {}_2F_1\left(\frac{(j+1)}{2}, \frac{(j+2)}{2}, \frac{5}{2}+j; \frac{1}{x^2}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Zajedno s evolucijskim kernelom, formula (32) može se nadalje uvrstiti u Mellin-Barnes integral i dobiti konačni izraz za inverz konformalnih momenata u općenitom kinematičkom režimu. No, u praksi treba detaljnije razmotriti jesu li pretpostavke ponašanja konformalnih momenata zadovoljene: npr. je li stvarno opravdano zanemariti integral po luku u integralu (17) te zadovoljavaju li konformalni momenti uvjete valjanosti Carlsonovog teorema.

## 4 Zaključak

Ukratko smo opisali funkcije strukture protona te procese iz kojih se one mogu ekstrapolirati. Fokusirali smo se na generalizirane partonske distribucije i naglasili njihovu korist i generalnost. Nadalje, uveli smo konformalne momente i usredotočili se na nalaženje načina koji bi nam omogućio rekonstrukciju GPD-a iz njegovih momenata u raznim kinematičkim režimima; dobiveni izrazi se oslanjaju na raznim matematičkim pretpostavkama koje bi trebalo detaljnije razmotriti. Idući instruktivni korak bio bi uzeti neki konkretan model GPD-a u  $x$ -prostoru (npr. *Radyushkin ansatz*, vidi [6]), transformirati ga u  $j$ -prostor, provesti evoluciju, vratiti ga nazad u  $x$ -prostor i usporediti sa GPD-om direktno evoluiranim u  $x$ -prostoru. Također, treba razmisliti i o isplativosti cijelog procesa: ukoliko je invertiranje konformalnih momenata kompleksnije od evolucije u  $x$ -prostoru, onda postupak nije koristan u praksi.

## Zahvale

Srdačno se zahvaljujem profesoru Krešimiru Kumeričkom na pruženoj pomoći i na vođenju kroz seminar.

## Literatura

- [1] Schwartz, Matthew D. Quantum field theory and the standard model. Cambridge University Press, 2014.
- [2] Diehl, Markus. "Generalized parton distributions." *Physics Reports* 388.2-4 (2003): 41-277.
- [3] Halzen, Francis, and Alan D. Martin. *Quark & Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [4] Soper, Davison E. "Basics of QCD perturbation theory." arXiv preprint hep-ph/9702203 (1997).
- [5] Ji, Xiangdong. "Gauge-invariant decomposition of nucleon spin." *Physical Review Letters* 78.4 (1997): 610.
- [6] Belitsky, Andrei V., and A. V. Radyushkin. "Unraveling hadron structure with generalized parton distributions." *Physics reports* 418.1-6 (2005): 1-387.
- [7] Mueller, Dieter, and A. Schäfer. "Complex conformal spin partial wave expansion of generalized parton distributions and distribution amplitudes." *Nuclear Physics B* 739.1-2 (2006): 1-59.
- [8] Barone, Vincenzo, and Enrico Predazzi. *High-energy particle diffraction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Müller, Dieter, Maxim V. Polyakov, and Kirill M. Semenov-Tian-Shansky. "Dual parametrization of generalized parton distributions in two equivalent representations." *Journal of High Energy Physics* 2015.3 (2015): 52.