

Produkcija gluona u sudarima teških jezgara

Anton Perkov*

Mentor: izv. prof. dr.sc. Davor Horvatić; Fizički odsjek,
Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Akademska godina 2018./2019.)

Na sudarivačima RHIC i LHC kod sudara teških iona se postižu dovoljno visoke energije na kojima je moguće istraživati bogatu fenomenologiju kvantne kromodinamike. Razmotrena je produkcija gluona korištenjem klasične Yang-Mills teorije polja. Uspoređeni su perturbativni rezultati slabo vezane teorije s onima iz simulacija QCDa na rešetci.

I. UVOD

I.1. Motivacija

Kvantna kromodinamika (QCD) je od svog začetka davala izvanredne rezultate u perturbativnom režimu. Moderna formulacija ju opisuje kao baždarnu teoriju nad $SU(3)$ grupom boja, a kako je teorija nelinearna (u Lagranžijanu se pojavljuju članovi $\propto A^4, A^2\partial A$ itd.), neperturbativno rješavanje je kompleksno i/ili ograničeno. Unatoč tome, u nekim je scenarijima moguće numerički opis konkretnih problema, npr. metodom QCD-a na rešetci (*lattice QCD* ili IQCD). Takav je slučaj s teorijskom analizom sudara teških jezgara koji se provode na modernim sudarivačima čestica, poput RHIC-a i LHC-a. ⁽³⁾

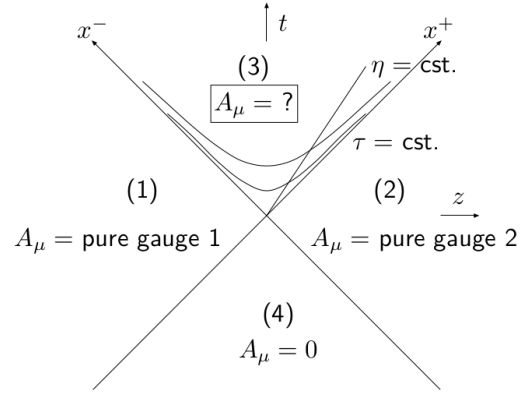
Sudari se mogu razdvojiti na četiri faze proučavanja, od kojih će se u ovom pregledu razmotriti prve dvije:

1. Početni uvjeti u $\tau = 0$ su dani nuklearnim valnim funkcijama na malom Bjorkenovom x i dinamikom partonskih sudara;
2. Postizanje termalne i kemijske ravnoteže u vremenu $\tau \lesssim \tau_0$;
3. Pobudena kvark-gluon plazma postoji u vremenu $\tau_0 \lesssim \tau \lesssim \tau_h$, kad dolazi do hadronizacije;
4. Nakon hadronizacije se čestice razvezuju i razilaze s mjesta sudara, te odlaze u detektore.

Kako su takvi sudari redom ultrarelativistički ($\sqrt{s} \approx 200\text{GeV}$), moguće je izvući nekoliko pretpostavki. Zbog Lorentzove kontrakcije jezgara duž pravca kretanja je sudar moguće analizirati u 2D ravnini, što će imati repokusije i na izbor baždarenja i modeliranje dinamike sustava, te nameće IQCD kao prirodan način rješavanja problema ⁽³⁾. U nastaloj kvark-gluon plazmi postoje nelinearni članovi u poljima. Vezanje je jako, što indicira na veliku gustoću stanja u transverzalnom prostoru, pa je moguće koristiti klasičnu Yang Mills teoriju polja, što pojednostavljuje numeričko rješavanje. ⁽²⁾

I.2. Postavke modela

Klasično bojno (gluonsko) polje moguće je dobiti rješavanjem jednadžbe gibanja



Slika 1. Svjetlosni stožac s označenim domenama i baždarnim poljima. Rubni uvjeti su postavljeni tako da je traženo polje A_μ u budućem svjetlosnom konusu (zona 3) glatko povezano s čisto baždarnim poljima u zonama 1 i 2 (kauzalno nepovezana područja). ⁽²⁾

$$[D_\mu, F_{\mu\nu}] = J_\mu, \quad (1)$$

gdje je $F_{\mu\nu} \propto [D_\mu, D_\nu]$ standardan tenzor jakosti gluonskog polja.

Takav pristup, naravno, ne daje egzaktne rezultate kakav bi dao kvantni pristup, ali dovoljno dobro opisuje eksperimente da opravda postupak. ⁽²⁾ U najmanju ruku, koristan je pri promatranju fenomenologije samih procesa i procjene vremenskih skala i drugih fizikalnih parametara sudara.

Račun je proveden u 3+1 prostoru Minkowskog ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$), te su korištene koordinate svjetlosnog stošca (*light-cone* ili LC koordinate), definirane sa

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \pm z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau e^{\pm\eta}, \quad (2)$$

gdje su τ i η vlastito vrijeme i rapiditet sustava. ⁽²⁾ Preostale dvije prostorne/impulsne koordinate, odnosno komponente polja su standardno označene latinskim indeksom: x^i, k^i, A^i , odnosno naglašavanjem njihove transverzalnosti u odnosu na LC koordinate sa x_T, k_T .

Iz ranijeg hidrodinamičkog McLerran-Venugopalan modela je poznato ⁽¹⁾ da je izvore polja u jezgri moguće tretirati kao nasumično raspoređene po Gaussovoj distribuciji, s korelacijskom funkcijom

* anton.perkov.hr@gmail.com

$$\langle \rho^a(\mathbf{x}_T) \rho^b(\mathbf{y}_T) \rangle = g^2 \mu^2 \delta^{ab} \delta^2(\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T), \quad (3)$$

Pokazano je ^(2,3) da je koristan parametar za opis problema visokorapiditetna gustoća gluona μ , dimenzije energije, te konstanta vezanja g , za koju je ovdje zbog jednostavnosti i ograničenog područja spektra koji se proučava uzeto da je fiksna i iznosi $g = 2$.

Kako se proučavaju sudari teških jezgara u ultrarelativističkoj granici (URL) srednjeg rapiditeta (dakle, dovoljno visoke energije da opravda URL aproksimaciju i dovoljno niske energije da konstanta vezanja g ne prelazi u perturbativni režim), prirodno je definirati struju kao zbroj doprinosa dviju jezgri (izvora polja $\rho_{(m)}$) koje su lokalizirane na svjetlosnom stošću:

$$J^\mu = \delta^{\mu+} \rho_{(1)}(\mathbf{x}_T) \delta(x^-) + \delta^{\mu-} \rho_{(2)}(\mathbf{x}_T) \delta(x^+). \quad (4)$$

Takav izbor struje kao zbroj doprinosa delta funkcija će kasnije voditi na invarijantnost početnih uvjeta na Lorentzov potisak (boost). To će kao posljedicu nositi mogućnost razdvajanja gluonskog polja na nezavisno vektorsko polje u transverzalnima smjerovima i pridruženog skalarnog polja.

Imajući u vidu sliku (1), jednostavno je zaključiti da zona 4 ($x^+ < 0, x^- < 0$) nije kauzalno povezana ni s jednom od jezgri, pa je ondje moguće odmah reći da je rješenje polje $A_\mu = 0$. Zone 1 ($x^+ < 0, x^- > 0$) i 2 ($x^+ > 0, x^- < 0$) su kauzalno povezane samo s jednom od jezgri, pa je ondje moguće kao rješenje pretpostaviti ⁽¹⁾ ansatz čisto transverzalnog baždarnog polja, tj. polje koje je baždarnim transformacijama povezano s nulom:

$$A_{(m)}^i = -\frac{i}{g} e^{i\Lambda_{(m)}} \partial^i e^{-i\Lambda_{(m)}}, \quad (5)$$

gdje je $\Lambda_{(m)}$ rješenje Poissonove jednadžbe u transverznoj ravnini: $\nabla_T^2 \Lambda_{(m)}(\mathbf{x}_T) = -g\rho_{(m)}(\mathbf{x}_T)$ (∇_T^2 je Laplasijan po transverzalnima koordinatama). $\Lambda_{(m)}$ je moguće promatrati i kao parametrizaciju kovarijantnog baždarnog polja jezgri; vrijedi $gA^+ = \delta(x^-)\Lambda_{(1)}$, $gA^- = \delta(x^+)\Lambda_{(2)}$. ⁽²⁾ U impulsnom prostoru Poissonova jednadžba postaje $\mathbf{k}_T^2 \Lambda(\mathbf{k}_T) = g\rho(\mathbf{k}_T)$. Uočljiv je problem s nultim modom (IR divergencijom), kojeg je moguće otkloniti zahtjevom bojne neutralnosti sustava: $\int \rho(\mathbf{x}_T) d^2\mathbf{x}_T = 0$, odnosno u impulsnom prostoru $\rho(\mathbf{k}_T = 0) = 0 = \Lambda(\mathbf{k}_T = 0)$, što zbog konačnosti jezgre (radijusa R_A) implicira da je prvi neiščezavajući doprinos na $|\mathbf{k}_T| \propto 1/R_A$. Korelator (3) u impulsnom prostoru glasi $\langle \rho(\mathbf{k}_T) \rho(\mathbf{p}_T) \rangle \propto g^2 \mu^2 \delta^2(\mathbf{k}_T + \mathbf{p}_T)$, što uz $\delta^2(\mathbf{k}_T) \propto R_A^2$ daje ovisnost Λ o bezdimenzionalnom faktoru: $\Lambda(\mathbf{x}_T) \propto \Lambda(\mathbf{k}_T)/R_A^2 \propto g^2 \mu R_A$.

Takav izbor omogućuje definiranje početnih uvjeta za polje na granici ciljane zone (zone 3, tj. $\tau = 0$ za $x^{+, -} > 0$) kao zbroj čisto baždarnih polja iz kauzalno nepovezanih zona 1 i 2: ⁽²⁾

$$A^i|_{\tau=0} = A_{(1)}^i + A_{(2)}^i, \quad (6)$$

$$A^\eta|_{\tau=0} = \frac{ig}{2} [A_{(1)}^i, A_{(2)}^i]. \quad (7)$$

Za fiksiranje preostale dvije komponente polja izabrano je temporalno Schwingerovo baždarenje ⁽¹⁾: $A_\tau = (x^+ A^- + x^- A^+) \tau \equiv 0$. Takav izbor povlači i raspis $A^\eta = x^+ A^- - x^- A^+$.

Cilj izučavanja dinamike ovog sustava je pronaći izraze za korelacijske funkcije polja, koje se prirodno pojavljuju u računu observabli.

II. FORMALIZAM

II.1. Jednadžbe baždarnog polja

Kako je sustav (1) s početnim uvjetima (6, 7) invarijantan na potisak u longitudinalnom smjeru, za očekivati je da je i rješenje invarijantno na potisak, odnosno da ne ovisi o rapiditetu η . To znači da i baždarno transformirana polja ne smiju ovisiti o rapiditetu, što je moguće postići tretiranjem rapiditetne komponente baždarnog polja (tj. A_η) kao nezavisnog skalarnog polja, odnosno definiranjem $A_\eta \equiv \phi$. Efektivno, problemu se dimenzionalnost s (3+1) smanjuje na (2+1).

Slijedeći recepte iz teorije baždarnog polja s pridruženim skalarom ⁽²⁾, definira se djelovanje:

$$S = \int d\eta d^2\mathbf{x}_T d\tau \tau \text{Tr} \left(\dot{A}_i \dot{A}_i - \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{\tau^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{\tau^2} [D_i, \phi] [D_i, \phi] \right), \quad (8)$$

gdje se trag pojavljuje jer su polja zapravo matrice u prostoru boja, $A_i = A_i^a t_a$, s normalizacijom Gell-Mannove reprezentacije $SU(3)$ dane s $\text{Tr}(t_a t_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$. Vlastito vrijeme ispred traga i u faktorima uz polja se pojavljuje kao posljedica koordinatne transformacije, tj. Jacobijana i faktora koji dolaze iz spuštanja indekasa članova djelovanja S reparametriziranim metrikom, koja u koordinatnom sustavu vlastitog vremena i rapiditeta glasi $ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 d\eta^2 - d\mathbf{x}_T^2$. Uz primjenu iste moguće je u jednom potezu naći i vezu među poljima u različitim koordinatnim sustavima koristeći poznato lančano pravilo. S druge strane, takva direktna vremenska ovisnost Lagranžijana ukazuje na temporalno širenje zone sudara jezgri, odnosno nastale (kvark-)gluonske plazme. ⁽²⁾

Definiranjem kanonski konjugiranih impulsa, tj. električnih polja

$$E^{ia} \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{A}_i^a} = \tau \dot{A}_i^a = -\tau \dot{A}^{ai} \quad (9)$$

$$\pi^a \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}^a} = \frac{1}{\tau} \dot{\phi}^a \quad (10)$$

se Legendreovom transformacijom Lagranžijana dobije Hamiltonijan, odnosno njegova gustoća:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 2\text{Tr}(E^i \dot{A}_i + \pi \dot{\phi}) - \mathcal{L} \\ &= \text{Tr} \left(\frac{1}{\tau} E^i E^i + \frac{\tau}{2} F_{ij} F^{ij} + \tau \pi^2 + \frac{1}{\tau} [D_i, \phi] [D_i, \phi] \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Prvi i treći član predstavljaju kinetičke stupnjeve slobode polja, analogno slučaju u elektrodinamici, dok drugi i četvrti član predstavljaju energiju uskladištenu u analogonu magnetskog polja, koje u ovom slučaju ima jednu jedinu okomitu komponentu.

Iz Hamiltonijana je na uobičajen način moguće izvući jednadžbe gibanja:

$$\dot{A}_i = \frac{1}{\tau} E^i \quad (12)$$

$$\dot{\phi} = \tau \pi \quad (13)$$

$$\dot{E}^i = \tau [D_k, F_{ki}] - \frac{ig}{\tau} [\phi, [D_i, \phi]] \quad (14)$$

$$\dot{\pi} = \frac{1}{\tau} [D_i, [D_i, \phi]]. \quad (15)$$

Početni uvjeti se jednostavno preslikaju iz poznatih informacija: kako je $E^i = \tau \dot{A}^i$, slijedi $E^i(\tau = 0, \mathbf{x}_T) = 0$. Nadalje, vrijedi $\phi = A_\eta = -\tau^2 A^\eta$, pa je $\phi(\tau = 0, \mathbf{x}_T) = 0$. Jednadžba (6) je direktan uvjet za $A_i(\tau = 0)$, a iz (7), kako je $\pi = \dot{\phi}/\tau = -2A^\eta - \tau \dot{A}^\eta$, slijedi $\pi(\tau = 0, \mathbf{x}_T) = -ig [A_{(1)}^i, A_{(2)}^i]$.

II.2. Produkcija gluona u limesu slabog polja

Slučaj slabog vezanja gluona je moguće riješiti aproksimativno, te dobiveni rezultat usporediti s numeričkim rješenjem. Za početak je, koristeći bezmasenu disperzijsku relaciju za gluone $\omega(\mathbf{k}_T) = |\mathbf{k}_T|$, moguće je zapisati Hamiltonijan kao integral preko impulsnih modova:

$$H = \int d^2\mathbf{k}_T n(\mathbf{k}_T) |\mathbf{k}_T|, \quad (16)$$

gdje je definiran diferencijalni multiplicitet gluona $n(\mathbf{k}_T)$ kao mjera raspodjele energije po modovima.

U slučaju slabog vezanja moguće je pretpostaviti ekvipartitiju energije analognu onoj u klasičnoj mehanici, tj. ravnomjernu raspodjelu energije u impulsne i koordinatne stupnjeve slobode. To povlači da se, u smislu vremenskog usrednjenja što je potencirano korištenjem \approx umjesto jednakosti, Hamiltonijan (11) može zapisati kao

$$\begin{aligned} H &\approx 2 \int d^2\mathbf{x}_T \text{Tr} \left[\frac{1}{\tau} E^i E^i + \tau \pi^2 \right] \\ &= 2 \int \frac{d^2\mathbf{k}_T}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{1}{\tau} E^i(\mathbf{k}_T) E^i(-\mathbf{k}_T) + \tau \pi(\mathbf{k}_T) \pi(-\mathbf{k}_T) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

gdje se suprotni predznaci u argumentima polja pojavljuju zbog svojstava Fourierove transformacije produkata. Usporedbom ta dva zapisa proizlazi izraz za multiplicitet:

$$n(\mathbf{k}_T) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{|\mathbf{k}_T|} \left[\frac{1}{\tau} E^i(\mathbf{k}_T) E^i(-\mathbf{k}_T) + \tau \pi(\mathbf{k}_T) \pi(-\mathbf{k}_T) \right]. \quad (18)$$

Za razliku od energije, ovakav multiplicitet nije baždarno invarijantna veličina, pa je potrebno fiksirati baždarenje u ravnini na Coulombovo, tj. $\partial_i A_i = 0$.

Razvojem početnih uvjeta do drugog reda po $\Lambda_{(m)}$ koristeći (5) i Coulombovo baždarenje dobije se

$$A_i(0, \mathbf{x}_T) = \frac{i}{2g} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla_T^2} \right) \left([\Lambda_{(1)}, \partial_j \Lambda_{(2)}] + [\Lambda_{(2)}, \partial_j \Lambda_{(1)}] \right), \quad (19)$$

$$\pi(0, \mathbf{x}_T) = \frac{i}{g} [\partial_i \Lambda_{(1)}, \partial_i \Lambda_{(2)}]. \quad (20)$$

Taj korak omogućuje kasnije korištenje korelatora (3) i vezanih zaključaka o dimenzionalnim faktorima u Λ u računu očekivane vrijednosti multipliciteta gluona.

Koristeći navedene rezultate se linearizacijom sustava (12)-(15) dobiju jednadžbe gibanja za polja u impulsnom prostoru:

$$\dot{E}^i = \partial_\tau (\tau \dot{A}_i) = \tau \nabla_T^2 A_i \quad (21)$$

$$\implies (\tau^2 \partial_\tau^2 + \tau \partial_\tau + \tau^2 \mathbf{k}_T^2) A_i(\tau, \mathbf{k}_T) = 0, \quad (22)$$

$$\dot{\pi} = \partial_\tau \left(\frac{1}{\tau} \dot{\phi} \right) = \frac{1}{\tau} \nabla_T^2 \phi \quad (23)$$

$$\implies (\tau^2 \partial_\tau^2 - \tau \partial_\tau + \tau^2 \mathbf{k}_T^2) \phi(\tau, \mathbf{k}_T) = 0. \quad (24)$$

Rješenja tih jednadžbi su Besselove funkcije:

$$A_i(\tau, \mathbf{k}_T) = A_i(0, \mathbf{k}_T) J_0(|\mathbf{k}_T| \tau), \quad (25)$$

$$\phi(\tau, \mathbf{k}_T) = \frac{\tau}{|\mathbf{k}_T|} \pi(0, \mathbf{k}_T) J_1(|\mathbf{k}_T| \tau). \quad (26)$$

Uz asimptotski razvoj Besselovih funkcija i uvrštavanjem tih rješenja u (18) dobije se veza očekivane vrijednosti multipliciteta i korelacijskih funkcija polja u početnom trenutku:

$$\begin{aligned} \langle n(\tau, \mathbf{k}_T) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{\pi \mathbf{k}_T^2} \left(\mathbf{k}_T^2 \sin^2(|\mathbf{k}_T| \tau - \pi/4) \times \right. \\ &\times \langle A_i^a(0, \mathbf{k}_T) A_i^a(0, -\mathbf{k}_T) \rangle + \sin^2(|\mathbf{k}_T| \tau - 3\pi/4) \times \\ &\times \langle \pi^a(0, \mathbf{k}_T) \pi^a(0, -\mathbf{k}_T) \rangle \left. \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Moguće je zamijeniti oscilatorne funkcije koje se pojavljuju njihovim usrednjenjem po vremenu, tj. s $1/2$, što je moguće usporediti s fizikalnim argumentom izmjene (11) u (17) kao efektivniju funkciju izvodnicu.⁽²⁾ Pri eksplicitnom računu korelatora pojavljuju se i divergentni integrali čiji se doprinosi dijelom dokrate, što nakon računa vodi na IR divergentan rezultat:

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{k}_T) \rangle &= \frac{\pi R_A^2}{(2\pi)^2} \frac{24g^6 \mu^4}{\mathbf{k}_T^2} \frac{1}{\pi} \times \\ &\times \int \frac{d^2\mathbf{p}_T}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2 (\mathbf{k}_T - \mathbf{p}_T)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Nad integralom se može provesti Pauli-Villars regularizacija (nakon Feynmanove parametrizacije)⁽⁴⁾ uz masu $m \propto g^2 \mu$ koja označava granicu perturbativnog režima⁽²⁾. To ne uklanja divergenciju, ali daje zatvorenu formu:

$$\langle n(\mathbf{k}_T) \rangle = \frac{\pi R_A^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\pi} \frac{N_c(N_c^2 - 1)g^6 \mu^4}{\mathbf{k}_T^4} \ln \frac{\mathbf{k}_T^2}{m^2}, \quad (29)$$

što sugerira da se multiplicitet može zapisati u obliku

$$\langle n(\mathbf{k}_T) \rangle = \frac{\pi R_A^2}{g^2} f(\mathbf{k}_T/g^2 \mu). \quad (30)$$

U načelu se tom metodom može dobiti ukupni multiplicitet stanja (po jedinici rapiditeta):

$$\frac{dN}{d\eta} = \int d^2 \mathbf{k}_T \langle n(\mathbf{k}_T) \rangle = \frac{\pi R_A^2}{g^2} (g^2 \mu)^2 f_N \quad (31)$$

uz

$$f_N \equiv \int d^2 \left(\frac{\mathbf{k}_T}{g^2 \mu} \right) f \left(\frac{\mathbf{k}_T}{g^2 \mu} \right), \quad (32)$$

što je zapravo konstanta za koju se iz numeričkog računa⁽¹⁾ vidi da je konačna, odnosno može se naslutiti da se divergentni doprinosi iz svih redova računa smetnje međusobno dokuju.

Na sličan način se može provesti račun za energiju po jedinici rapiditeta:

$$\frac{dE_T}{d\eta} = \int d^2 \mathbf{k}_T \langle n(\mathbf{k}_T) \rangle |\mathbf{k}_T| = \frac{\pi R_A^2}{g^2} (g^2 \mu)^3 f_E. \quad (33)$$

III. UVID U NUMERIČKI RAČUN

III.1. QCD na rešetci

Kod IQCD računa se u jednadžbama, uz prethodno uvedena polja, pojavljuje i matrica prijelaza $U_\mu(x) = e^{igaA_\mu(x)}$ koja povezuje dvije susjedne točke

na rešetci. Ideja je zapravo diskretna verzija Wilsonove linije, koja je originalno u teoriji polja uvedena kao nelokalni baždarno invarijantni operator.⁽³⁾

Za potrebe numeričkog računa se Hamiltonijan (11) u transverzalnoj ravnini može pretočiti u pogodniji oblik:

$$aH = \sum_{x_T} \left(\frac{g^2 a}{\tau} \text{Tr } E^i E^i + \frac{2N_c \tau}{g^2 a} \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } U_\perp \right) + \frac{\tau}{a} \text{Tr } \pi^2 + \frac{a}{\tau} \sum_i \text{Tr} \left(\phi - \tilde{\phi}_i \right)^2 \right), \quad (34)$$

gdje je a veličina ćelije na rešetci (veličina rešetke je $L^2 = N^2 a^2 = \pi R_A^2$), a transverzalna plaketa U_\perp definirana sa

$$U_\perp(x_T) = U_{x,y} = U_x(x_T) U_y(x_T + e_x) U_x^\dagger(x_T + e_y) U_y^\dagger(x_T) \quad (35)$$

i predstavlja paralelni transport polja po zatvorenoj petlji duž jediničnih smjerova e_x, e_y , srodno Wilsonovoj petlji u kontinuiranom slučaju. Pojavljuje se i paralelno transportirano skalarno polje

$$\tilde{\phi}_i(x_T) \equiv U_i(x_T) \phi(x_T + e_i) U_i^\dagger(x_T). \quad (36)$$

Iz Hamiltonijana se, definiranjem algebre Poissonovih zagrada među poljima, dobiju jednadžbe gibanja:⁽³⁾

$$\dot{U}_i = \frac{ig^2}{\tau} E^i U_i \quad (\text{nema sume po } i), \quad (37)$$

$$\dot{\phi} = \tau \pi, \quad (38)$$

$$\dot{E}^x = \frac{i\tau}{2g^2} (U_{x,y} + U_x, -y - h.c.) - \text{trag} \quad (39)$$

$$+ \frac{i}{\tau} [\tilde{\phi}_x, \phi], \quad (40)$$

$$\dot{E}^y = \frac{i\tau}{2g^2} (U_{y,x} + U_y, -x - h.c.) - \text{trag} \quad (41)$$

$$+ \frac{i}{\tau} [\tilde{\phi}_y, \phi], \quad (42)$$

$$\dot{\pi} = \frac{1}{\tau} \sum_i (\tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_{-i} - 2\phi). \quad (43)$$

Početni uvjeti na rešetci glase⁽²⁾

$$0 = \text{Tr} \left[t_a \left((U_i^{(1)} + U_i^{(2)}) (1 + U_i^\dagger) - h.c. \right) \right], \quad (44)$$

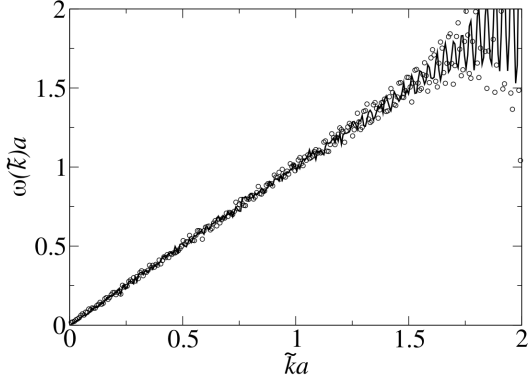
$$E^i = 0, \quad (45)$$

$$\phi = 0, \quad (46)$$

$$\pi(x_T) = \frac{-i}{4g} \sum_i \left[(U_i(x_T) - 1) (U_i^{\dagger(2)}(x_T) - U_i^{\dagger(1)}(x_T)) \right. \quad (47)$$

$$\left. + (U_i^\dagger(x_T - e_i) - 1) (U_i^{(2)}(x_T - e_i) - U_i^{(1)}(x_T - e_i)) - h.c. \right], \quad (48)$$

gdje su $U_i^{1,2}$ matrice prijelaza s čisto baždarnim poljima iz zoni 1 i 2. Moguće je puštanjem limesa $a \rightarrow 0$ povratiti početne uvjete u kontinuumu.



Slika 2. Funkcije (57). Kružići su disperzija dobivena iz E^i i A_i , a puna linija disperzija dobivena iz π i ϕ .

III.2. Multiplicitet u IQCD

Analogija nad slobodnim skalarnim poljem ⁽¹⁾ pokazuje kako iz korelatora polja dobiti informaciju o disperzijskoj relaciji. Hamiltonijan je dan s

$$H = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \pi^2(x) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2(x) + m^2 \phi^2 \right] \quad (49)$$

$$= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{2} |\pi(k)|^2 + \frac{1}{2} \omega^2(k) |\phi(k)|^2 \right] \quad (50)$$

$$= \int d^D k \omega(k) n(k), \quad (51)$$

gdje je $\omega^2(k) = k^2 + m^2$. Kao i za (17) je moguće pretpostaviti ravnomjernu distribuciju energije po vremenski usrednjenim stupnjevima slobode:

$$\frac{1}{2} \overline{|\pi(k)|^2} = \frac{1}{2} \overline{\omega^2(k) |\phi(k)|^2}, \quad (52)$$

pa je jednostavno identificirati

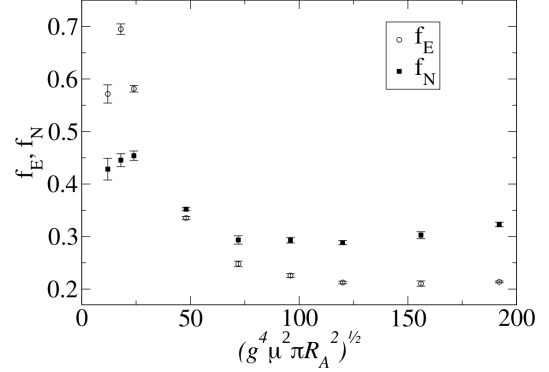
$$\overline{|\pi(k)|^2} = \omega(k) n(k), \quad \overline{|\phi(k)|^2} = \frac{n(k)}{\omega(k)}, \quad (53)$$

i iz toga definirati

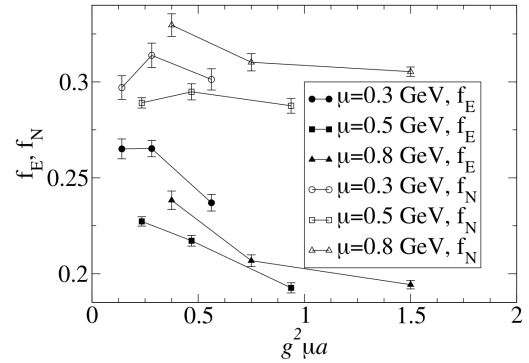
$$\omega(k) = \sqrt{\frac{\overline{|\pi(k)|^2}}{\overline{|\phi(k)|^2}}}. \quad (54)$$

Kako je (18) izveden uz pretpostavku disperzijske relacije slobodnog polja, pitanje je kako na rešetci definirati multiplicitet interagirajuće teorije usporedivog oblika. Ispostavlja se ⁽¹⁾ da se zadovoljavajući rezultati mogu postići i korištenjem slobodne disperzijske relacije u (53), tj.

$$n(k_T) = \frac{2}{N^2} \frac{1}{\tilde{k}} \left[\frac{g^2}{2\tau} E_i^a(k_T) E_i^a(-k_T) + \frac{\tau}{2} \pi^a(k_T) \pi^a(-k_T) \right] \quad (55)$$



Slika 3. Ovisnost konstanti f_E i f_N o bezdimenzionalnom parametru $\sqrt{g^4 \mu^2 \pi R_A^2}$ na 256^2 rešetci.



Slika 4. Ovisnost f_E i f_N o veličini ćelije uz konstantan C . Kontinuirani slučaj ($a \rightarrow 0$) dobije se ekstrapolacijom grafova do $g^2 \mu a = 0$ osi.

uz slobodnu (bezmasenu) disperziju na rešetci:

$$\tilde{k}^2 = \frac{4}{a^2} \left[\sin^2 \frac{ak_x}{2} + \sin^2 \frac{ak_y}{2} \right]. \quad (56)$$

IV. REZULTATI

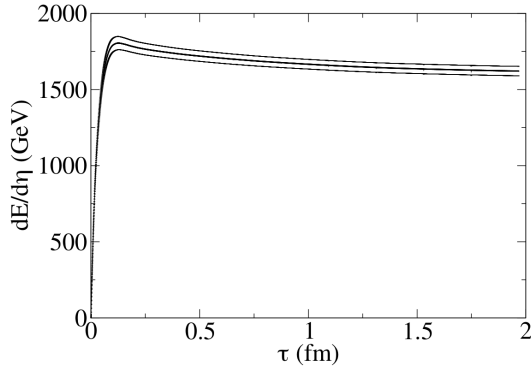
Opravdanje gornjeg pristupa može se dobiti provjerom reproduciraju li grafovi

$$\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\langle E_i^a(k_T) E_i^a(-k_T) \rangle}{\langle A_i^a(k_T) A_i^a(-k_T) \rangle}}; \quad \tau \sqrt{\frac{\langle \pi^a(k_T) \pi^a(-k_T) \rangle}{\langle \phi^a(k_T) \phi^a(-k_T) \rangle}} \quad (57)$$

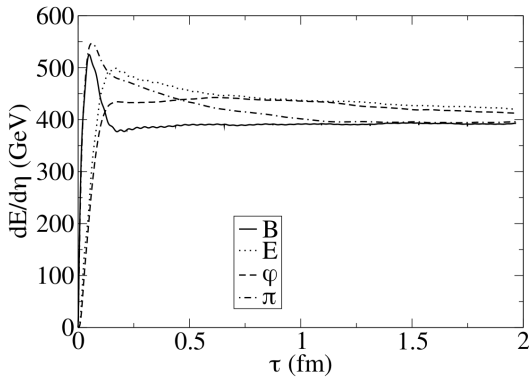
slobodnu bezmasenu disperziju $\omega(\tilde{k}) \approx \tilde{k}$, što je prikazano na slici (2).

Tokom numeričkih računa su kao fiksni parametri uzeti $g = 2$ i $\pi R_A^2 = 148 \text{fm}^2$.

Iz perspektive numeričkog računa, relacije (31) i (33) su definicije veličina f_N i f_E , pa je stoga moguće proučiti ovisnost o bezdimenzionalnoj veličini



Slika 5. Ukupna energija po jedinici rapiditeta kao funkcija vremena za $\mu = 0.5$ GeV. Tri krivulje predstavljaju procjenu greške, iz 5 putanja na 512^2 rešetki.



Slika 6. Raspodjela energije iz procesa sa slike (5) po komponentama polja.

$\sqrt{g^4 \mu^2 \pi R_A^2} \equiv C$ (slika (3)) i o veličini ćelije a (slika (4)).

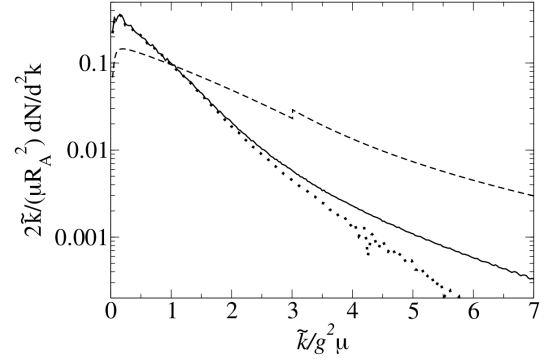
Za $C \lesssim 50$, f_N i f_E pokazuju jaku ovisnost o parametru, što je pak indicacija ovisnosti o IR cutoffu ugrađenom u teoriju. Za $C \gg$, tj. u limesu jakih polja, funkcije su slabo ovisne o parametru jer dinamiku remete nelinearnosti IR modova.

Slike (5) i (6) prikazuju ukupnu energiju te raspodjelu energije po komponentama polja u ovisnosti o vremenu. Vidljiva je saturacija i opravdanost pretpostavke približno ravnomjerne raspodjele energije.

Ovi rezultati se uglavnom slažu s rezultatima prijašnjih autora, što je vidljivo na slici (7). Diskrepancija koja se javlja je posljedica razlike u normalizaciji, iako to nije odmah očito zbog logaritamske skale na ordinati.

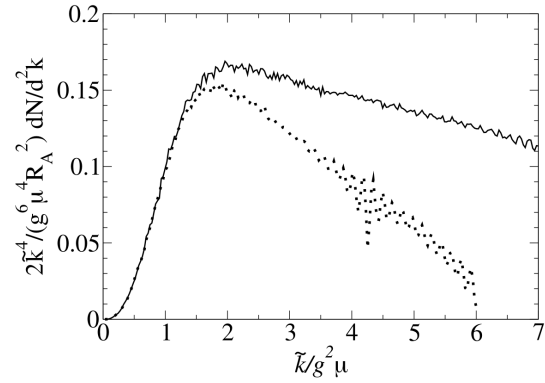
Jednadžba (29) predstavlja multiplicitet gluona u granici slabih polja, pa je za očekivati da će se poklapati s numeričkim rezultatom za $k_T \gg$. Takvo je ponašanje uočljivo na slici (8). Za vrijednosti $k_T \gtrsim 2g^2\mu$ se može primjetiti prijelaz na režim slabih polja, odnosno $1/k_T^4 \times$ logaritamski faktori, iako je uočljivo da u toj zoni dominiraju i efekti konačnosti rešetke zbog razilaženja rezultata različitih veličina rešetke.

Slika (9) ukazuje na to da numerički rezultat odstupa od analitičkog za veliki C , te mu se približava za $C \lesssim 10$. To pak znači da je aproksimacija sla-



Slika 7. Odnos $\frac{2\tilde{k}}{\mu R_A^2} \frac{dN}{d^2k_T}$ naspram $\tilde{k}/g^2\mu$ za $C = 120$.

Puna crta je rezultat za 512^2 rešetku, točke za 256^2 i crtkana za rad ranijeg autora ⁽¹⁾. Skaliranjem vertikalne osi s 2 i horizontalne s 1/2 crtkana i puna crta se skoro potpuno poklope, što je indicacija razlike u normalizaciji.



Slika 8. Ovisnost $\frac{2\tilde{k}^4}{g^4 \mu^4 R_A^2} \frac{dN}{d^2k_T}$ o $\tilde{k}/g^2\mu$ iz istih simulacija kao slika (7). Točkasta crta je rezultat 256^2 , a puna 512^2 rešetke.

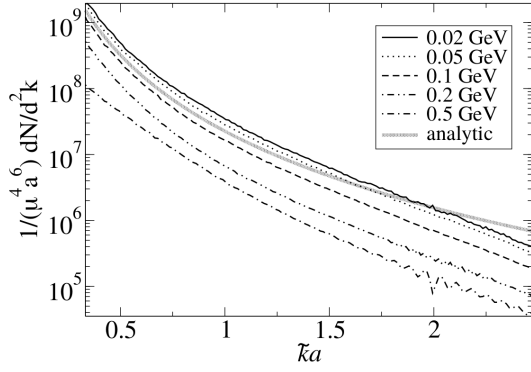
bog polja loša pretpostavka za kvantitativna slaganja s klasičnim modelom. To je i bilo za očekivati: glavna motivacija za proučavanje klasičnog modela leži upravo u situaciji kad su polja jaka.

Korelacijske funkcije s fiksnim vremenom koje se koriste u (55) ovise o baždarenju, što je velika prepreka u definiciji multipliciteta unutar klasičnog modela. Slika (ref10) prikazuje taj problem na primjeru korelatora $\langle E_i^a(k_T) E_i^a(-k_T) \rangle$. Analogno s elektrodinamikom, taj je korelator ograničen uvjetom da integral

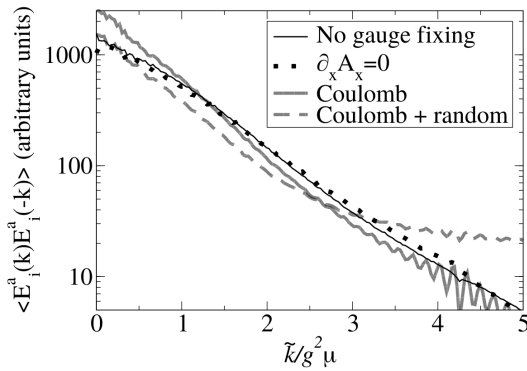
$$\int d^2k_T E_i^a(k_T) E_i^a(-k_T) \quad (58)$$

mora biti baždarno invarijantan, jer je proporcionalan energiji.

Multiplicitet se iz (55) računa evoluiranjem polja iz zadanih početnih uvjeta. Iz toga se dobije korelator bez fiksnog baždarenja. Za ostale krivulje je prije računanja korelatora potrebno fiksirati baždarenje polja: parcijalnim Coulombom, $\partial_x A_x = 0$; Coulombom, $\partial_i A_i = 0$; te posebnim slučajem gdje nakon Coulombovog baždarenja slijedi nezavisna baždarna transformacija na svakom čvorištu rešetke. Prirodna poslje-



Slika 9. Ovisnost $\frac{1}{\mu^4 a^6} \frac{dN}{d^2k}$ o $\tilde{k}a$ za $C = 240\mu/\text{GeV}$, s različitim vrijednostima μ , i usporedba s analitičkim rezultatom (29)



Slika 10. Korelator $\langle E_i^a(k_T)E_i^a(-k_T) \rangle$ u različitim baždarenjima

dica toga je veća amplituda polja, pa time i korelatora, na višim impulsima. ⁽¹⁾

Kao provjeru opravdanosti pretpostavke o velikom okupacijskom broju gluona, slika (11) prikazuje gustoću transverzalnog faznog prostora $f(k_T) = \frac{1}{2(N_C^2-1)} \frac{(2\pi)^2}{\pi R_A^2} \frac{dN}{d^2k_T}$, uz otklonjenu spinsku i bojnu degeneraciju. Kako je gustoća reda veličine 1 samo za podskup impulsa manjih od $\sim g^2\mu$, vidljivo je da je pretpostavka o velikoj gustoći faznog prostora samo marginalno ispunjena.

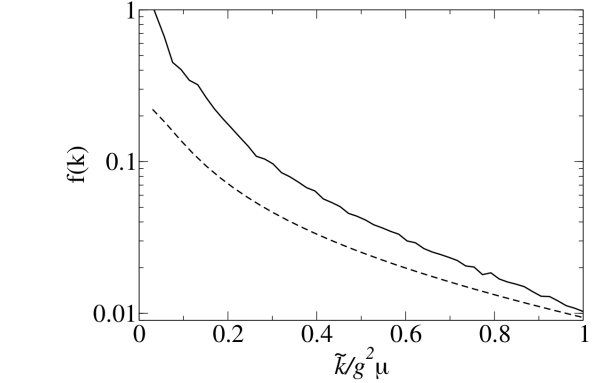
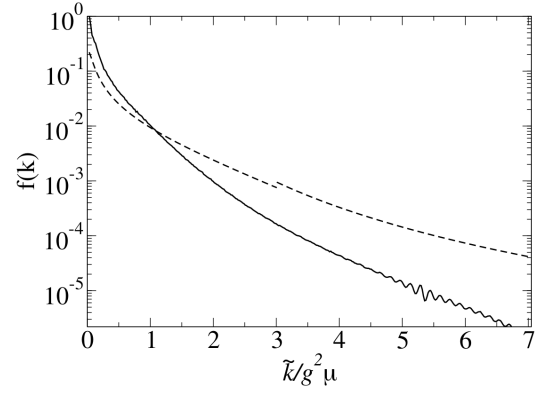
Preostalo je još povezati rezultate računa s mjerljivim veličinama. ⁽¹⁾ Zbog očuvanja entropije prilikom adijabatskog širenja zone sudara, za očekivati je da je ukupni multiplicitet (nabijen i neutralan) približno sačuvan i iznosi

$$\frac{dN_i}{d\eta} \approx \frac{dN_f}{d\eta} \approx 1000. \quad (59)$$

Izmjerena konačna energija iznosi

$$\frac{dE_f}{d\eta} \approx 600 \text{ GeV}, \quad (60)$$

a zbog adijabatskog širenja i drugih čimbenika je početna energija veća; u literaturi ⁽¹⁾ je uspostavljena gornja granica:



Slika 11. Gustoća dvodimenzionalnog faznog prostora $f(k_T) = \frac{1}{2(N_C^2-1)} \frac{(2\pi)^2}{\pi R_A^2} \frac{dN}{d^2k_T}$ u ovisnosti o $\tilde{k}/g^2\mu$ za $C = 120$. Puna linija je dobiveni rezultat, isprekidana linija je usporedba s ranijim rezultatima ⁽¹⁾.

$$\frac{dE_i}{d\eta} \lesssim 1.76 \text{ GeV} \frac{dN}{d\eta}. \quad (61)$$

Iz rezultata ove numeričke simulacije slijedi da se za $\mu = 0.48$ (vrijednost koja daje dobar multiplicitet), dobije $dE_i/d\eta = 1.5 \text{ GeV} dN_i/d\eta$.

V. ZAKLJUČAK

Objašnjene su osnove modeliranja sudara teških jezgara preko kromodinamike kao klasične teorije polja. Ključan argument za račun u klasičnoj kromodinamici je bila observacija da je jakost polja i gustoća transverzalnog faznog prostora tijekom sudara veoma velika.

Iz kinematike procesa su, uz pomoć dimenzionalne analize, istaknuti parametri i relacije korisni za daljnju konstrukciju teorije, uključujući početne uvjete.

Predstavljena je akcija klasične kromodinamike, iz koje su izvedeni Hamiltonijan i jednadžbe gibanja, te su podešeni početni uvjeti. Aproximativno je dobio izraz za diferencijalni multiplicitet gluona u granici slabog polja izražen preko korelatora polja u fiksnom vremenskom trenutku.

Zanimljivo je primjetiti da se u (29) pojava logaritamskog faktora može pripisati regularizaciji, dok faktor $1/|\mathbf{k}_T|^4$ dolazi od klasičnosti teorije kao kromodinamička verzija Rayleigh-Jeans katastrofe, koja nije u

ovom slučaju ultraljubičasta, već infracrvena. Kako se ta divergencija javlja u diferencijalnom multiplicitetu, a ne u gustoći energije, nije toliko alarmantna kao njen EM pandan, nego opisuje prijelaz u vezani režim, odnosno fiziku zatočenja i hadronizaciju.

Numerički je dobivena disperzijska relacija gluona, multiplicitet stanja, te ukupna energija po rapiditetu

(i energija svake komponente polja) i ukupni multiplicitet u vremenu. Iz tih je rezultata procjenjena i gornja granica na inicijalnu energiju polja u procesu.

Dodatna točnost bi se mogla postići varijacijom konstante vezanja po energiji koristeći renormalizacijske jednačbe, npr. JIMWLK renormalizacijsku shemu ⁽¹⁾.

¹ Lappi, T. "Production of gluons in the classical field model for heavy ion collisions." *Physical Review C* 67.5 (2003): 054903.

² T. Lappi, arXiv:hep-ph/0409087, (2004) University of Helsinki

³ Krasnitz, A.; Venugopalan R. "Non-perturbative com-

putation of gluon mini-jet production in nuclear collisions at very high energies." *Nuclear Physics B* 557.1-2 (1999): 237-270.

⁴ Peskin, M.E., Schroeder, D., *An Introduction to Quantum Field Theory* (1995), Addison-Wesley Publishing Company