Gauge invarijantnost i modulacijska nestabilnost u nelinearnim fotoničkim sustavima s umjetnim magnetskim poljima

David Prelogović
Mentor: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Sveučilište u Zagrebu, PMF Fizički odsjek

Sažetak

U ovom seminaru bavimo se modulacijskom nestabilnošću homogenog rješenja nelinearne Schrödingerove jednadžbe, koja opisuje određene fotoničke sustave s umjetnim magnetskim poljima. Analitičko rješenje tražimo u dva različita baždarenja: simetričnom i Landauovom te poopćujemo naše razmatranje modulacijske nestabilnosti na generalnu baždarnu transformaciju.

1 Uvod

Kvantni sustavi mnoštva čestica u svojoj kompleksnosti pokazuju mnoštvo nevjerojatnih kolektivnih fenomena, kao što su npr. supravodljivost, frakcijski kvantni Hallov efekt, Bose-Einsteinov kondenzat. No složenost takvih sustava ograničava analitičko nalaženje i proučavanje novih fenomena, dok je numeričko rješavanje čak i u današnje doba moguće samo za mali broj čestica. Jedan od mogućih pristupa promatranju takvih sustava leži u kvantnim simulatorima - fizikalnim realizacijama koje u potpunosti simuliraju neki problem od našeg interesa. [4]

Ultrahladni plinovi i fotonički sustavi (kristali) iznimno su prilagodljivi te su kao takvi idealni simulatori određenih kvantnih sistema, a od nedavno su pronađeni načini da se u njima imitiraju i efekti magnetskog polja, gdje je moguće fiksirati konkretan vektorski potencijal $\mathbf{A}$. [2, 3] Kako je proučavanje kvantnih fenomena u prisustvu magnetskog polja vrlo živo i široko područje istraživanja, velik je i interes za realizacijom sustava s umjetnim magnetskim poljima.

U ovom seminaru bavit ćemo se specifičnim fotoničkim sistemima koje možemo opisati dvodimenzionalnom nelinearnom Schrödingerovom jednadžbom:

$$i\hbar\,\partial_t \Psi = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\,\nabla - \mathbf{A}\right)^2 \Psi + V(\mathbf{r})\,\Psi + \eta\,|\Psi|^2\,\Psi\,, \tag{1}$$

gdje je $\mathbf{r} = (x, y)$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$, a $\mathbf{A}$ umjetni (efektivni) vektorski potencijal. U fotonici dimenzija vremena zapravo predstavlja prostornu koordinatu z, koja leži u smjeru propagacije svjetlosti kroz fotonički kristal. Funkcija Ψ nije prava valna funkcija već neki parametar uređenja ovisan o konkretnoj fizikalnoj realizaciji, budući da jednadžba (1) nije Schrödingerova jednadžba u pravom smislu riječi. U našem konkretnom slučaju, funkcija Ψ biti će kombinacija električnog i magnetskog polja i stoga sama po sebi opservabla. Iz tog razloga zanimljivo je da će, iako opservabilna veličina, ovisiti o efektivnom baždarenju $\mathbf{A}$ (vidi Dodatak A). To na prvu može izgledati neobično, no odgovor je upravo u tome što se ne radi o pravoj valnoj funkciji.

Parametar η mjeri nam jačinu nelinearnosti. Kod fotoničkih sustava ona se javlja kroz promjenu indeksa loma u $x - y$ ravnini kristala kroz kojeg prolazi svjetlost, dok recimo u ultrahladnim plinovima bozona takav član dobivamo uključivanjem točkaste interakcije među atomima - koja vrijedi u aproksimaciji rijetkih plinova, gdje će parametar η biti jačina takve interakcije (za izvod vidi literaturu [1, 6]).

1.1 Modulacijska nestabilnost

Kada analiziramo neki sustav, osim nalaženja samog njegovog rješenja, odnosno nekog svojstvenog stanja, često će nas zanimati i ponašanje takvog rješenja u smislu njegove stabilnosti. Ukoliko na njega nametnemo neki mali bijeli šum, hoće li on u vremenu eksponencijalno rasti i uništiti početno rješenje? Hoće li to vrijediti za cijeli spektar šuma ili samo neki određeni prozor frekvencija?

Na ta pitanja odgovara metoda modulacijske nestabilnosti. Postupak je idejno vrlo jednostavan: na neko svojstveno stanje Ψ_0 koje zadovoljava jednadžbu sustava (npr. (1)), nadodamo mali šum $\Psi_0(1+\delta)$ te zapišemo jednadžbu zanemarujući članove $\mathcal{O}(\delta^2)$. Rješavanjem takve jednadžbe šuma možemo vidjeti hoće li za neke početne uvjete šum eksponencijalno rasti, što bi značilo da je za takvu vrstu šuma svojstveno stanje Ψ_0 nestabilno.

Do sada se problem modulacijske nestabilnosti uglavnom promatrao na nelinearnim sustavima bez magnetskog polja. Naš zadatak u ovom seminaru je pokušati razmotriti problem na slučaju s magnetskim poljem te pogledati postoji li utjecaj baždarenja na modulacijsku nestabilnost nekog svojstvenog stanja. U iduća dva poglavlja provodimo postupak modulacijske nestabilnosti za konkretno rješenje jednadžbe (1) u dva različita baždarenja, dok u zadnjem poglavlju generaliziramo rezultat na slučaj proizvoljne baždarne transformacije nekog svojstvenog rješenja jednadžbe.

2 Rješavanje jednadžbe u simetričnom baždarenju

Zamislimo dvodimenzionalni sustav koji evoluira prema nelinearnoj jednadžbi (1) te na njega djeluje magnetsko polje $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}$. U takvom postavu, zgodan izbor vektorskog potencijala je

$$\mathbf{A}_S = \frac{B}{2}\left(x\,\hat{\mathbf{y}} - y\,\hat{\mathbf{x}}\right)\,, \tag{2}$$

gdje kažemo da se radi o simetričnom baždarenju. Također, lako je provjeriti $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_S$. Uz pretpostavku vremenske ovisnosti $\Psi = \exp(-i\frac{E}{\hbar}t)\,\psi$, jednadžba (1) glasi:

$$E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + i\frac{\hbar B}{2m}(x\partial_y - y\partial_x) + \frac{B^2}{8m}\left(x^2+y^2\right) + V + \eta|\psi|^2\right]\psi\,. \tag{3}$$

Kako bismo uopće započeli promatranje modulacijske nestabilnosti, potrebno je naći neko svojstveno stanje gornje jednadžbe. Generalno radi se o vrlo zahtjevnom problemu, uz ograničeni broj metoda za njegovo rješavanje (npr. numerika ili račun smetnje za mali η su neki od mogućih pristupa). No lako je primijetiti da ako uz simetrično baždarenje u našem sustavu namjestimo potencijal $V = -\frac{B^2}{8m}\left(x^2+y^2\right)$, jedno od svojstvenih stanja problema biti će homogena funkcija u prostoru $\psi = \sqrt{I_0}$, gdje proizvoljnim izborom globalne faze biramo da je I_0 pozitivni realni broj. U tom slučaju dobivamo: $E = \eta I_0$, odnosno

$$\Psi = \sqrt{I_0}\,\exp\left(-i\frac{\eta I_0}{\hbar}t\right)\,.$$

2.1 Modulacijska nestabilnost homogenog rješenja

Jednom kada smo pronašli svojstveno rješenje, namećemo mali šum i tražimo njegovu evoluciju u vremenu. Pretpostavljajući za valnu funkciju

$$\Psi = \sqrt{I_0}\,\exp\left(-i\frac{\eta I_0}{\hbar}t\right)\,\left(1+\delta(\mathbf{r},t)\right),$$

i uvrštavanjem u nelinearnu Schrödingerovu jednadžbu (1) dobivamo:

$$i\hbar\,\partial_t\delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta + i\frac{\hbar B}{2m}\,\partial_\phi\delta + \eta I_0(\delta+\delta^*)\,, \tag{4}$$

gdje smo se prebacili u polarni sustav (r,ϕ), gdje je $\partial_\phi = x\partial_y - y\partial_x$. Također, jednadžbu smo linearizirali po šumu iskoristivši $(1+\delta)^2(1+\delta)^* \approx 1 + 2\delta + \delta^*$. Kompleksnim konjugiranjem gornje jednadžbe i zbrajanjem (oduzimanjem) s prvotnom, jednadžbu možemo prikazati kao sustav dvije vezane diferencijalne jednadžbe:

$$i\hbar\,\partial_t b = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 a + i\frac{\hbar B}{2m}\,\partial_\phi b + 2\eta I_0 a\,, \tag{5}$$

$$i\hbar\,\partial_t a = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 b + i\frac{\hbar B}{2m}\,\partial_\phi a\,, \tag{6}$$

uz korištenje pokrata $a = \delta + \delta^*$ i $b = \delta - \delta^*$. Komplikacija da moramo rješavati sustav dvije diferencijalne jednadžbe krije se u tome da početna jednadžba šuma (4) sadrži u sebi δ^*, pa moramo posebno promatrati realni, posebno imaginarni dio šuma.

Sustav rješavamo Fourierovim transformatom u polarnom sustavu, gdje vrijedi:

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(\mathbf{k},t)\, e^{-i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} e^{-in\phi} \int_0^{\infty} \tilde{f}_n(\rho,t) J_n(\rho r)\rho d\rho\,. \tag{7}$$

J_n je Besselova funkcija prve vrste te zadovoljava Besselovu jednadžbu

$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0\,.$$

Funkcija J_n vrlo je prikladna ovom problemu, naime lako je vidjeti:

$$\nabla^2 \left(e^{-in\phi} J_n(\rho r)\right) = \frac{1}{r^2}\left[r^2\,\partial_r^2 + r\,\partial_r + \partial_\phi^2\right] e^{-in\phi} J_n(\rho r) = -\rho^2 e^{-in\phi} J_n(\rho r)\,. \tag{8}$$

Konačno, primjenjujući dani transformat na a i b, dobivamo:

$$i\hbar\,\partial_t \tilde{b}_n = \frac{\hbar^2\rho^2}{2m}\tilde{a}_n + \frac{\hbar B}{2m} n \tilde{b}_n + 2\eta I_0 \tilde{a}_n\,, \tag{9}$$

$$i\hbar\,\partial_t \tilde{a}_n = \frac{\hbar^2\rho^2}{2m}\tilde{b}_n + \frac{\hbar B}{2m} n \tilde{a}_n\,. \tag{10}$$

Sada je dobiveni sustav jednadžbi lako razdvojiti te rješavanjem pripadnih diferencijalnih jednadžbi po vremenu dobivamo:

$$\tilde{a}_n = e^{-i\frac{B}{2m}nt}\left(\tilde{a}_{n1}\, e^{-i\tilde{\omega}t} + \tilde{a}_{n2}\, e^{+i\tilde{\omega}t}\right)\,, \tag{11}$$

$$\tilde{b}_n = S\, e^{-i\frac{B}{2m}nt}\left(\tilde{a}_{n1}\, e^{-i\tilde{\omega}t} - \tilde{a}_{n2}\, e^{+i\tilde{\omega}t}\right)\,, \tag{12}$$

gdje su $\tilde{a}_{n1,2}$ funkcije varijable ρ te

$$S = \sqrt{1 + \frac{4\eta I_0 m}{\hbar^2\rho^2}}\,, \qquad \tilde{\omega} = \frac{\hbar\rho^2}{2m} S\,. \tag{13}$$

Dakle, općenito rješenje jednadžbe šuma (4) za $\delta = 1/2(a+b)$:

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\phi+\pi/2)} e^{-i\frac{B}{2m}nt} \int_0^{\infty} J_n(\rho r)\rho d\rho \left[\tilde{a}_{n1}(1+S)e^{-i\tilde{\omega}t} + \tilde{a}_{n2}(1-S)e^{+i\tilde{\omega}t}\right]\,, \tag{14}$$

uz uvjete:

$$\begin{cases} \begin{aligned} \tilde{a}^*_{-n1} &= (-1)^n\,\tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}^*_{-n2} &= (-1)^n\,\tilde{a}_{n2} \end{aligned} & \text{za } i\tilde{\omega} \in \mathbb{R}\,, \\ \\ \tilde{a}^*_{-n1} = (-1)^n\,\tilde{a}_{n2} & \text{za } \tilde{\omega} \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{15}$$

koje dobivamo ubacivanjem konačnog rješenja za šum (14) u početnu jednadžbu, a potrebni su jer smo u postupku raspetljavanja sustav jednadžbi (9, 10) derivirali po vremenu.

2.2 Diskusija i prikaz rješenja

Konačno rješenje (14) u sebi ima eksponencijalnu ovisnost u vremenu kao $\exp(\pm i\tilde{\omega}(\rho)\, t)$. Odnosno, ukoliko je frekvencija $\tilde{\omega}(\rho)$ imaginarna, šum eksponencijalno raste (i istovremeno djelomično trne) u vremenu. Iz izraza (13) lako je vidjeti da će se to desiti isključivo za $\eta < 0$ i $\rho < \rho_c$, gdje je

$$\rho_c = \sqrt{-\frac{4\eta I_0 m}{\hbar^2}}\,. \tag{16}$$

Kada bismo sada proveli identičan postupak za slučaj bez magnetskog polja i potencijala ($\mathbf{A} = \mathbf{c}$, $V = 0$, kada ponovo imamo homogenu valnu funkciju $\psi = \sqrt{I_0}$ kao svojstveno stanje jednadžbe), dobili bismo identičnu rješenje za šum, do na fazu $\exp(-i\frac{B}{2m}nt)$. Dakle, u ovom specifičnom izboru baždarenja i potencijala, homogeno rješenje pokazuje jednaku modulacijsku nestabilnost kao i u slučaju bez magnetskog polja, a jedini utjecaj magnetskog polja u odnosu na slučaj bez njega je u promjeni faze šuma.

Iako generalno želimo da šum bude spektar svih frekvencija (bijeli), kako bismo prikazali dobiveno rješenje, namećemo početni uvjet jednog ravnog vala:

$$\delta(t=0) = \epsilon \exp(-i\,\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})\,.$$

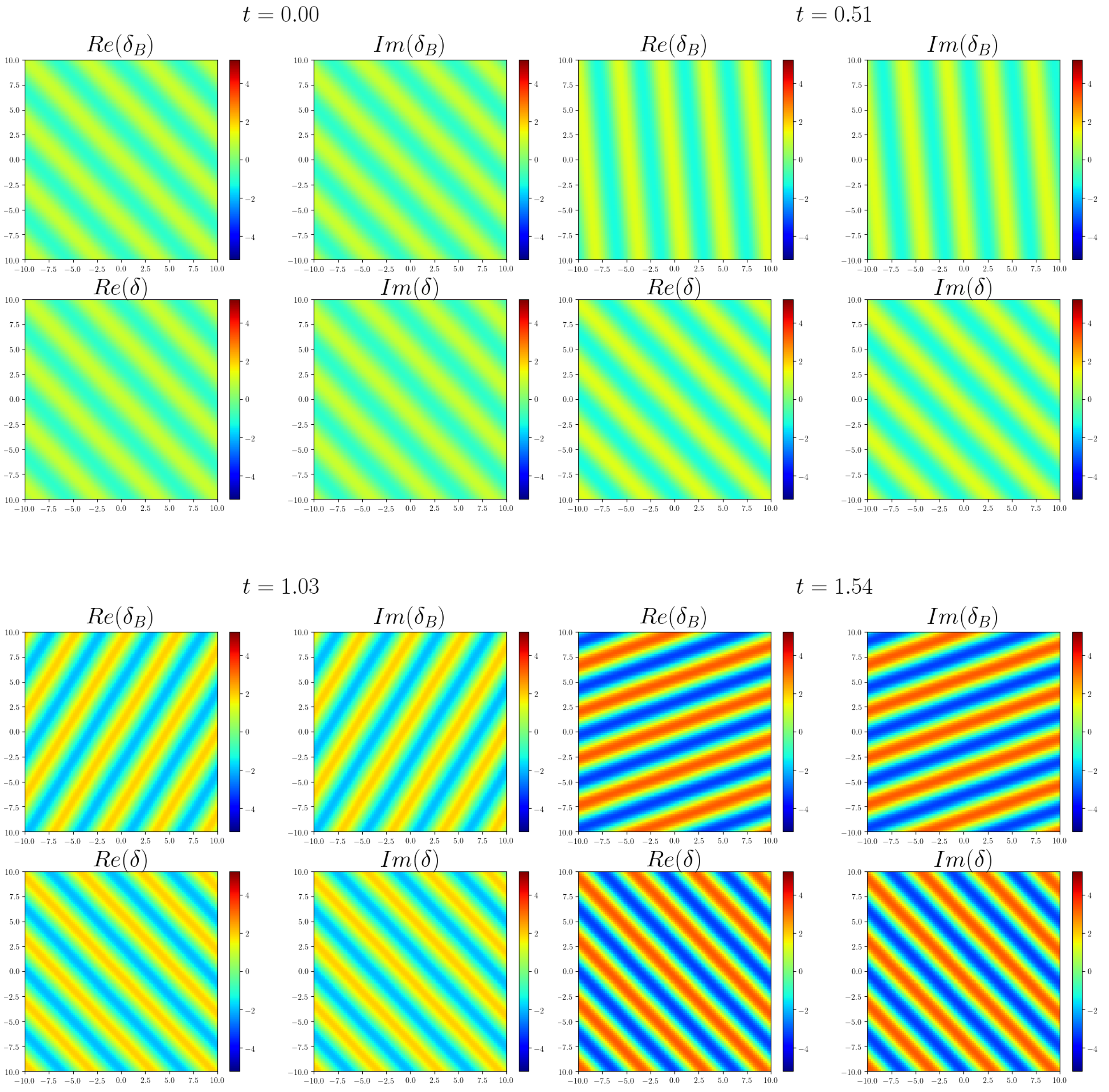
Ravni val raspisujemo po Besselovim funkcijama i uvrštavanjem u općenito rješenje (14), uz zadovoljavanje uvjeta (15) za evoluciju šuma dobivamo:

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon}{4S_0}\Big\{ & e^{-i\tilde{\omega}_0 t}\left[(S_0+1)^2 e^{-i\,\mathbf{k}_0\cdot\tilde{\mathbf{r}}} + (S_0^2-1)e^{+i\,\mathbf{k}_0\cdot\tilde{\mathbf{r}}}\right] \\ & -e^{+i\tilde{\omega}_0 t}\left[(S_0-1)^2 e^{-i\,\mathbf{k}_0\cdot\tilde{\mathbf{r}}} + (S_0^2-1)e^{+i\,\mathbf{k}_0\cdot\tilde{\mathbf{r}}}\right]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{17}$$

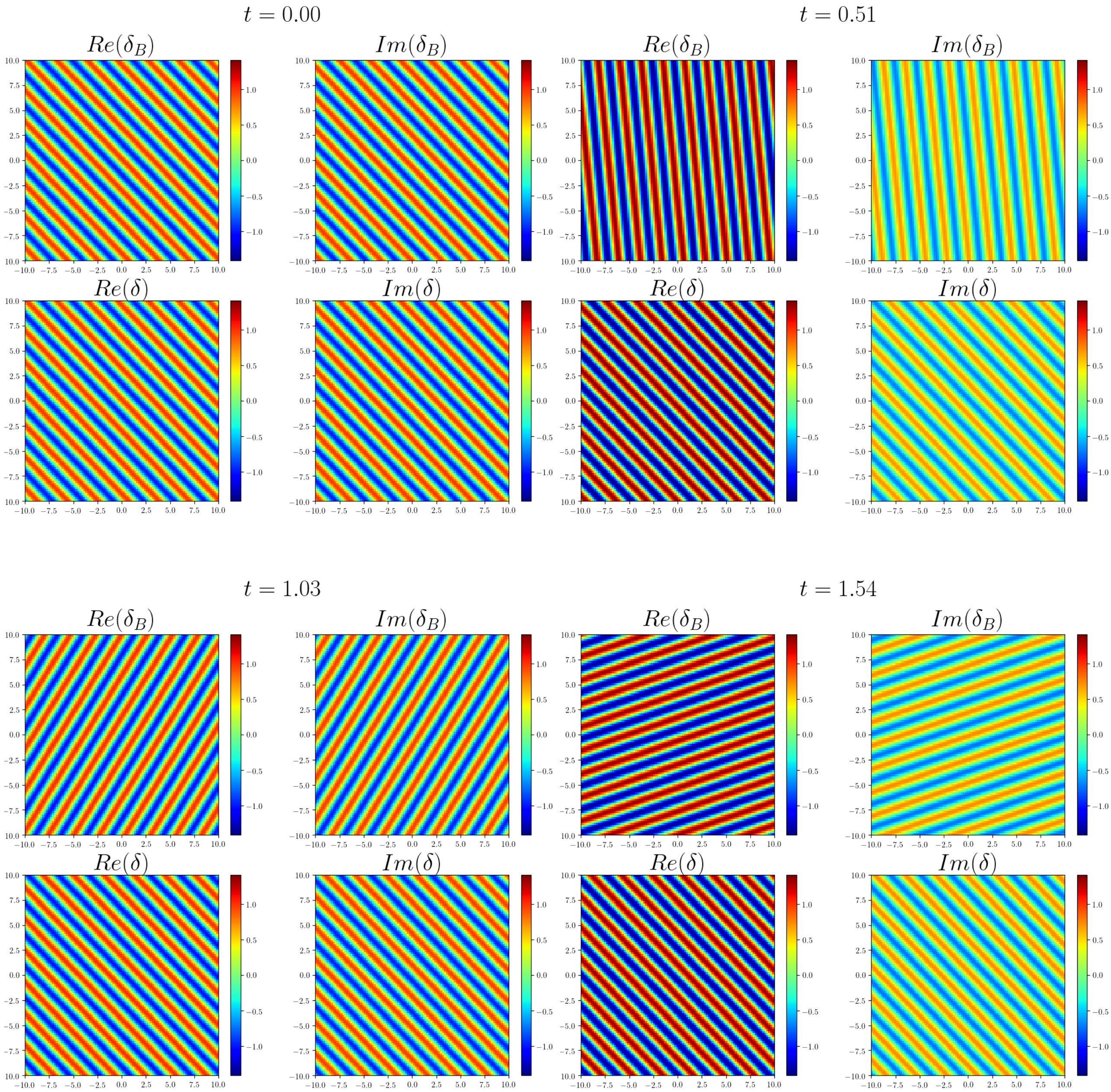
gdje smo koristili pokrate:

$$S_0 = \sqrt{1 + \frac{4\eta I_0 m}{\hbar^2\,\mathbf{k}_0^2}}\,, \quad \tilde{\omega}_0 = \frac{\hbar\,\mathbf{k}_0^2}{2m}S_0\,, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\cos\frac{B}{2m}t + \hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{r}\sin\frac{B}{2m}t\,.$$

Za slučaj kada promatramo sustav bez magnetskog polja i potencijala, rješenje dobivamo iz (17) zamjenom $\tilde{\mathbf{r}} \to \mathbf{r}$. Realni i imaginarni dio šuma prikazani su za divergentni i oscilatorni početni uvjet, u četiri vremenska trenutka na slikama 1 i 2. Možemo jasno vidjeti rotaciju globalne faze uvjetovanu magnetskim poljem. Treba napomenuti da dobiveno rješenje vrijedi samo u režimu $|\delta| \ll 1$, kada su izbačeni nelinearni članovi zanemarivi.



Slika 1: Prikaz šuma za divergentni početni uvjet u četiri vremenska trenutka. δ_B je šum s magnetskim poljem, a δ bez magnetskog polja.
$m = \hbar = -\eta = I_0 = \epsilon = 1$, $B = \sqrt{7}$, $(k_{0x}, k_{0y}) = (1, 1)$



Slika 2: Prikaz šuma za oscilatorni početni uvjet u četiri vremenska trenutka. δ_B je šum s magnetskim poljem, a δ bez magnetskog polja.
$m = \hbar = -\eta = I_0 = \epsilon = 1$, $B = \sqrt{7}$, $(k_{0x}, k_{0y}) = (2, 2)$

3 Rješavanje jednadžbe u Landauovom baždarenju

Pokušajmo sada napraviti račun modulacijske nestabilnosti uz isti potencijal

$$V = -\frac{B^2}{8m}\left(x^2 + y^2\right) ,$$

no promatrajući jednadžbu u Landauovom baždarenju

$$\mathbf{A}_L = Bx\,\hat{\mathbf{y}} .$$

Uz pretpostavku $\Psi = \exp(-i\frac{E}{\hbar}t)\,\psi$, uvrštavanjem u jednadžbu (1), dobivamo:

$$E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + i\frac{\hbar B}{m}x\partial_y + \frac{B^2}{8m}\left(3x^2 - y^2\right) + \eta|\psi|^2\right]\psi . \tag{18}$$

Iskoristimo li sada baždarnu transformaciju valne funkcije (vidi Dodatak A) i činjenicu da se Landauovo baždarenje može prikazati kao:

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_S + \nabla\left(\frac{B}{2}xy\right) ,$$

ekvivalent homogenog rješenja u ovom baždarenju je

$$\psi = \sqrt{I_0}\,\exp\left(i\frac{B}{2\hbar}xy\right) . \tag{19}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (18) lako se provjeri da se stvarno i radi o svojstvenom stanju.

Ukoliko sada za ukupnu valnu funkciju uzmemo

$$\Psi = \sqrt{I_0}\exp\left(-i\frac{\eta I_0}{\hbar}t\right)\exp\left(i\frac{B}{2\hbar}xy\right)(1+\delta) ,$$

uvrštavanjem u nelinearnu Schrödingerovu jednadžbu dobivamo jednadžbu šuma jednaku izrazu (4), odnosno jednadžbi šuma u simetričnom baždarenju! Dakle, promjena baždarenja u ovom slučaju nije dovela do nove jednadžbe i račun modulacijske nestabilnosti, kao i svi zaključci, ekvivalentni su prošlom slučaju.

4 Generalizacija invarijantnosti jednadžbe šuma

Prirodno je pitanje može li se prethodni rezultat generalizirati na bilo koju baždarnu transformaciju. Uzmemo li neku svojstvenu valnu funkciju $\Psi = \exp(-i\frac{E}{\hbar}t)\,\psi_0$, koja zadovoljava početnu nelinearnu Schrödingerovu jednadžbu te nametnemo mali šum kao i prije: $\Psi \to \Psi(1+\delta)$, za općenitu (lineariziranu) jednadžbu šuma dobivamo:

$$i\hbar\,\partial_t\delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta + i\frac{\hbar}{m}\left(\mathbf{A} + i\hbar\frac{\nabla\psi_0}{\psi_0}\right)\cdot\nabla\delta + \eta\,|\psi_0|^2\,(\delta + \delta^*) . \tag{20}$$

I zaista, lako je vidjeti da ako sada nametnemo baždarnu transformaciju

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi\,, \qquad \psi_0 \to \psi_0\, e^{i\chi/\hbar}\,,$$

jednadžba (20) se neće promijeniti. Dakle, iako će ukupna svojstvena valna funkcija promjenom baždarenja dobiti standardnu fazu (22), jednadžba šuma ostati će (čak i s uključenim nelinearnostima) invarijantna na takvu transformaciju. Stoga zaključujemo da modulacijska nestabilnost neće ovisiti o baždarenju, već samo o konkretnom svojstvenom stanju ψ_0 koje zadovoljava početnu nelinearnu jednadžbu za odabrani $\mathbf{A}$! Dakako, to ne znači da magnetsko polje nema utjecaj na šum, odnosno na stabilnost svojstvenog stanja.

Zanimljivo je uočiti da jednadžba šuma (20) ne ovisi eksplicitno o potencijalu (kao ni ostalim multiplikativnim faktorima $\alpha(\mathbf{r}) \cdot \psi_0$) već samo implicitno preko stanja ψ_0, koje zadovoljava početnu jednadžbu.

Zaključak

Analitičko rješenje jednadžbe šuma za homogenu valnu funkciju (14) služi kao jednostavan primjer utjecaja magnetskog polja u ovakvoj vrsti fotoničkih sustava, a dobiveni efekt rotacije faze trebao bi biti opservabilan. Također, rješenje može poslužiti kao test numeričkim pokušajima rješavanja jednadžbe (1), na kojima se i u ovom trenu već radi. Što se stabilnosti tiče, u konkretnom razmatranom slučaju ispalo je da će ponašanje rješenja biti jednako kao i u već od prije poznatom rezultatu za homogenu valnu funkciju bez magnetskog polja. Puno zanimljiviji utjecaj magnetskog polja trebao bi se vidjeti na nekim drugim rješenjima početne nelinearne Schrödingerove jednadžbe, kao što je npr. solitonsko rješenje koje postoji kada nemamo magnetskog polja, a trebalo bi se javljati i u našem slučaju.

Konačno, generalni zaključak invarijatnosti šuma na baždarnu transformaciju, osim konceptualne važnosti, olakšava pristup ovom problemu jer pogodnim izborom baždarenja možemo pojednostaviti naš račun.

Zahvale

Zahvalio bih se profesoru Hrvoju Buljanu za mentorstvo u ovom seminaru, što me upoznao s ovim problemom i mnogim sugestijama pomogao u ispravnom pogledu na prepreke koje su se pojavile putem. Uz to, veliko hvala i Karlu Lelasu, na zajedničkom radu na problemu, za pomoć u računima, ispravcima, objašnjavanjima i idejama.

A Baždarna transformacija valne funkcije

Promjena baždarenja svodi se na dodavanje gradijenta skalarne funkcije vektorskom potencijalu:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi\,. \tag{21}$$

Ako pretpostavimo da se promjenom baždarenja valna funkcija iz (1) promjeni kao $\Psi' = \Psi e^{i\alpha}$, gdje je $\alpha(\mathbf{r})$ neka skalarna funkcija, tada za operator impulsa možemo pisati:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} - \mathbf{A}')\,\Psi' &= (-i\hbar\,\nabla - \mathbf{A} - \nabla\chi)\,e^{i\alpha}\,\Psi \\
&= e^{i\alpha}(-i\hbar\,\nabla - \mathbf{A} - \nabla\chi + \hbar\,\nabla\alpha)\,\Psi \\
&= e^{i\alpha}(-i\hbar\,\nabla - \mathbf{A})\,\Psi\,,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem redu pretpostavili $\alpha = \chi/\hbar$. Budući da su ostali članovi jednadžbe (1) invarijantni na dodavanje proizvoljne faze, slijedi da je baždarna transformacija valne funkcije jednaka:

$$\Psi' = \exp\left(i\,\frac{\chi}{\hbar}\right)\,\Psi\,. \tag{22}$$

Literatura

[1] Bao, W. (2007). The Nonlinear Schrödinger Equation and Applications in Bose-Einstein Condensation and Plasma Physics. *Dynamics in Models of Coarsening, Coagulation, Condensation and Quantization*.

[2] Dalibard, J., Gerbier, F., Juzeliūnas, G., and Öhberg, P. (2011). Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, 83:1523–1543.

[3] Dubček, T. (2017). *Synthetic Magnetism in Quantum Gases and Photonic Lattices*. PhD thesis, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet.

[4] Feynman, R. P. (1982). Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6):467–488.

[5] Griffiths, D. (1995). *Introduction of Quantum Mechanics*. Prentice Hall, Inc.

[6] Pethick, C. J. and Smith, H. (2008). *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, second edition.

[7] Stegeman, G. I. and Segev, M. (1999). Optical spatial solitons and their interactions: universality and diversity. *Science*, 286(5444):1518–1523.

[8] Zakharov, V. E. and Ostrovsky, L. A. (2009). Modulation instability: The beginning. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 238:540–548.