

Perturbativni račun partonskih distribucija ovisnih o poprečnom impulsu

Boris Šarić

*Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet sveučilišta
u Zagrebu, Bijenička 32*

Mentor: izv. prof. dr. sc. Sanjin Benić
(Datum: 19. siječnja 2025.)

U ovom seminaru proučavane su partonske distribucijske funkcije ovisne o poprečnom impulsu aktivnih partona (TMD-ovi). To su neperturbativni objekti koji opisuju strukturu protona (ili hadrona općenito) no njihovi repovi, koji odgovaraju režimu visokog poprečnog impulsa, mogu se računati perturbativno. Ovdje je taj račun proveden u Feynmanovom baždarenju za distribuciju koja odgovara nepolariziranom kvarku u nepolariziranom protonu.

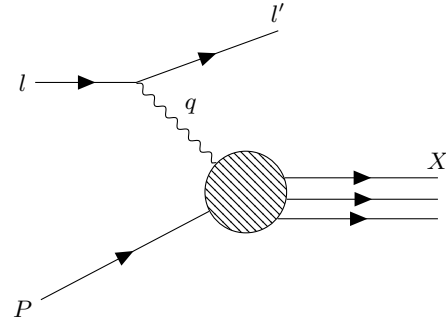
I. UVOD

Nukleoni, odnosno protoni i neutroni, osnovni su gradivni blokovi atomskih jezgara i izgrađuju gotovo svu vidljivu materiju u svemiru. Za razliku od atoma koje vezanima drži elektromagnetska sila, nukleone vezanima drži jaka nuklearna sila. Kao što joj ime sugerira, ona je mnogo jača od elektromagnetske sile. Kvantna teorija polja koja opisuje jaku silu je kvantna kromodinamika (QCD). Kvarkovi su elementarni fermioni koji interagiraju jakom silom izmjenom baždarnih bozona - gluona. Kvarkovi kao slobodne čestice ne postoje, tj. nisu nikada detektirani. To je tako zbog hipoteze zatočenja koja kaže da sve slobodne čestice u prirodi moraju biti neutralne boje pa su kvarkovi stoga zarobljeni u hadronima. Hadroni se dijele na mezone i barione. U najjednostavnijoj slici, mezoni su izgrađeni od kvarka i anti-kvarka, dok su barioni izgrađeni od tri valentna kvarka. Proton je najlakši barion. U QCD-u proton je relativističko vezano stanje kvarkova i gluona koji se kolektivno nazivaju partoni. Zbog jakosti sile koja partone drži na okupu, struktura protona je dinamična i netrivialna.

QCD ima još jedno fundamentalno svojstvo, a to je asimptotska sloboda, odnosno činjenica da konstanta vezanja slabi s energijom. To je potpuno drugačije ponašanje u odnosu na kvantnu elektrodinamiku, u kojoj konstanta vezanja, tj. električni naboj raste s energijom. Upravo nam asimptotska sloboda omogućava formuliranje teorema o faktorizaciji, koji povezuju kvarkove i gluone iz QCD-a s hadronima detektiranim u eksperimentu pa u konačnici s fundamentalnim distribucijskim funkcijama koje u sebi sadrže informacije o bogatoj strukturi nukleona [1].

Glavni dio seminara sadržan je u sljedećem poglavlju. U potpoglavlju II A bit će uveden proces dubokog neelastičnog raspršenja kao metoda proučavanja strukture protona. Potom će u potpoglavlju II B biti uveden partonski model te diskutirane njegove pretpostavke, ali i ograničenja. U II C bit će objašnjen proces semi-inkluzivnog dubokog neelastičnog raspršenja. To je proces sličan dubokom neelastičnom raspršenju, uz dodatak da se u konačnom stanju osim raspršenog elektrona detektira i ha-

dron (ili jet). Bit će objašnjeno i zašto nam takav proces daje više informacija o 3D strukturi protona nego obično duboko neelastično raspršenje. Diskutirat ćemo i račun pripadnog udarnog presjeka. U potpoglavlju II D uvest ćemo partonske distribucije koje ovise o poprečnom impulsu ili skraćeno TMD-ove. Bit će diskutirano kako dolazi do nastanka poprečnog impulsa u konačnom stanju i kako se perturbativno računaju repovi TMD-ova. Konačno, u II E taj će račun biti proveden za distribuciju nepolariziranog kvarka u nepolariziranom protonu.



Slika 1: Dijagramatski prikaz dubokog neelastičnog raspršenja.

II. STRUKTURA NUKLEONA

A. Duboko neelastično raspršenje

Elektroni, kao najlakši leptoni, zbog svoje točkaste strukture predstavljaju odličnu probu za sondiranje protona. Elastičnim $e^-(l) + h(P) \rightarrow e^-(l') + h(P')$ sudarima može se dobiti dobra informacija o raspodjeli naboja unutar protona, no ne i o detaljima njegove podstrukture. Informacije o tome dobivaju se iz mnogo energičnijeg procesa, u kojem elektron ima dovoljno energije da razbije proton. Takav proces naziva se duboko neelastično raspršenje (DIS [2]). U eksperimentima se mjeri impuls raspršenog elektrona l' te se uz poznavanje početnog impulsa elektrona l i impulsa protona P , može

odrediti kinematika procesa. Impuls izmijenjenog fotona tada je $q = l - l'$. Režim dubokog neelastičnog raspršenja vrijedit će pri $Q \equiv \sqrt{-q^2} \gg 1/R$, gdje je $R = 0.84 \text{ fm}$ radijus protona [3]. Kinematiku u potpunosti opisuju dvije varijable, a najčešće se biraju Q^2 i Bjorkenov x , definiran kao

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \quad (1)$$

s vrijednostima u intervalu $0 \leq x \leq 1$. U partonskom modelu Bjorkenov x odgovara udjelu impulsa protona kojeg nosi aktivni parton. Ponekad se koristi i varijabla

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot l} \quad (2)$$

koja u sustavu mirovanja protona odgovara udjelu izgubljene energije leptona. Proces je dijagramatski prikazan

na slici 1, s koje očitavamo amplitudu interakcije

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(l', s') \gamma^\mu u(l, s) \frac{1}{q^2} \langle X | j_\mu | P, S \rangle. \quad (3)$$

Kvadrat amplitude ulazi u udarni presjek, koji je u sustavu mirovanja protona oblika [4]

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (4)$$

$L_{\mu\nu}$ je leptonski tenzor i on sadrži informaciju o polarizaciji elektrona, a dan je s

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{l' \gamma_\mu l \gamma_\nu\}. \quad (5)$$

$W^{\mu\nu}$ je hadronski tenzor definiran kao [4]

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(P, q; S) &= \frac{4\pi^3}{M} \sum_X \delta^{(4)}(p_X - P - q) \langle P, S | j^\mu(0) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | P, S \rangle \\ &= \frac{4\pi^3}{M} \sum_X \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{-i(p_X - P - q) \cdot z} \langle P, S | j^\mu(0) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | P, S \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi M} \int d^4 z e^{iq \cdot z} \langle P, S | j^\mu(z) j^\nu(0) | P, S \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

gdje S označava spin protonske mete. Uz zahtjeve Lorentz invarijantnosti, invarijantnosti na transformacije pariteta i inverzije vremena te očuvanje struje $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$, odnosno $q_\mu J^\mu = 0$ u impulsnom prostoru, hadronski tenzor može se parametrizirati preko strukturnih funkcija. One ovise samo o invarijantama sistema $P \cdot q$ i Q^2 i svaka od njih je koeficijentna funkcija uz jednu Lorentzovu strukturu (detaljnije u npr. [5]).

U eksperimentima dubokog neelastičnog raspršenja opaženo je da su strukturne funkcije za fiksirani x neovisne o Q^2 (dakako za velike Q^2). Taj fenomen naziva se Bjorkenovo skaliranje i u okviru partonskog modela govori da se elektron raspršuje na jednom partonu. Valja napomenuti da postoji blago logaritamsko odstupanje od Bjorkenovog skaliranja. Uzmimo li se u obzir QCD korekcije, to odstupanje se vrlo dobro predviđa i opisuju ga DGLAP jednadžbe.

B. Partonski model

U partonskom modelu pretpostavlja se da je proton izgrađen od gotovo slobodnih čestica - partona te da se raspršenje upadnog elektrona odvija samo na jednom partonu. Kada se partonski model poveže s QCD-jem, oni će odgovarati kvarkovima i gluonima. Pretpostavku da

je udarni presjek dominiran jednočestičnim raspršenjem opravdava činjenica da je prenešeni impuls u interakciji reda $Q \gg 1/R$ dok je efektivna veličina tvrdog sudara $\mathcal{O}(1/Q) \ll R$. Doprinos raspršenja na dvije ili više čestica stoga opada kao $1/QR$ [1].

Model je formuliran u sustavu gdje proton ima vrlo visoku energiju $E_P \gg M$. Pretpostavljamo da se giba po z osi u pozitivnom smjeru, dok se elektron giba u negativnom smjeru. Ako je p impuls partona, a P protona, onda su u sustavu mirovanja protona komponente vektora p reda veličine M ili manje. Primjenom velikog potiska, dolazimo u sustav u kojem proton ima vrlo visoku energiju. U njemu su impulsi $p^\mu = (p^+, p^-, \mathbf{p}_T)$ i $P^\mu = (P^+, M^2/(2P^+), \mathbf{0}_T)$. p^+ je najveća komponenta, reda veličine Q dok su preostale komponente reda veličine M^2/Q i M . Koristit ćemo koordinate na svjetlosnom stošcu, definirane kao $k^\pm = (k^0 \pm k^z)/\sqrt{2}$ (detaljnije u dodatku A). Nadalje, pretpostavljamo da parton koji sudjeluje u raspršenju nosi udio ukupnog impulsa protona x tako da vrijedi $p^+ = xP^+$. Proton u to raspršenje ulazi kao skup partona, od kojih svaki nosi udio impulsa x . Vjerojatnost da i -ti parton nosi udio impulsa između x i $x + dx$ je $f(x) dx$, gdje je $f(x)$ partonska distribucijska funkcija (PDF). Ona ima interpretaciju gustoće partona. Fizikalno opravdanje PDF-ova je da se impuls protona raspodijeli po partonima u vremenu $\sim \Lambda_{QCD}^{-1} \sim M^{-1}$,

gdje je M masa protona. To vrijeme je mnogo duže od vremena tvrde interakcije s fotonom Q^{-1} . Razdvajanje tih dviju skala omogućava nam tretiranje partonskih valnih funkcija kao da su dekoherentne što vodi na probablističku interpretaciju [6]. Formalan dokaz toga sadržan je u teoremu o faktorizaciji.

Udarni presjek je u faktoriziranom obliku

$$\begin{aligned} E' \frac{d\sigma_{ep \rightarrow eX}}{d^3l'} &= \sum_i \int dx f_{i/p}(x) E' \frac{d\hat{\sigma}_{ei \rightarrow eX}}{d^3l'} \\ &= \sum_i f_{i/p} \otimes \hat{\sigma}, \end{aligned} \quad (7)$$

gdje se sumira po svim partonima. $\hat{\sigma}$ je jednočestični udarni presjek, a $\otimes$ predstavlja konvoluciju u udjelu impulsa x .

PDF-ovi nose neperturbativnu informaciju o građi protona i ne ovise o procesu, tj. univerzalni su. U ovakvom (naivnom) partonskom modelu zanemaruje se poprečni impuls partona koji je tipično reda veličine $p_T \sim 1/R \ll Q$ i tvrda proba nije osjetljiva na fiziku na toj skali. Transverzarno gibanje partona bitno je za 3D sliku protona pa je pitanje kako doći do te informacije. Odgovor se krije u procesima čije su opservable osjetljive na dvije energetske skale, tvrdu i meku. Pod osjetljivošću na tvrdu energetska skalu $Q_1 \gg \Lambda_{QCD} \sim 1/R$ misli se na to da je u procesu ostvaren veliki transfer impulsa kako bi proba uspješno "pogodila" parton. S druge strane, pod osjetljivošću na meku, ali dobro mjerljivu skalu $Q_2 \ll Q_1$ misli se na to da opservabla daje uvid u fine detalje neperturbativne protonske podstrukture. Primjeri takvih opservabli su udarni presjeci semi-inkluzivnog dubokog elastičnog raspršenja ili skraćeno SIDIS-a[7] te proces Drell-Yana.

C. Semi-inkluzivno duboko neelastično raspršenje

SIDIS je proces gotovo identičan DIS-u, samo što se u konačnom stanju detektira još jedan hadron (ili jet) impulsa P_h , koji je nastao od aktivnog partona. Uz standardne varijable x i y , udarni presjek ovisit će još o poprečnom impulsu $\mathbf{p}_{hT}$ te varijabli

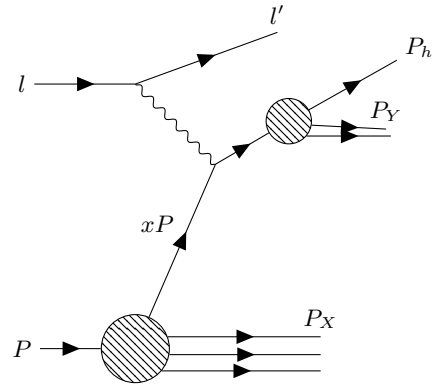
$$z = \frac{P \cdot P_h}{P \cdot q}. \quad (8)$$

Koristi se koordinatni sustav u kojem su upadni proton i virtualni foton kolinearni. Njihovi impulsi definiraju os z . Odstupanje od kolinearnosti procesa određeno je vektorom

$$q_T^\mu = q^\mu + (1-r)xP^\mu - P_h^\mu/z, \quad (9)$$

gdje je $r = q_T^2/Q^2$.

Hadronski tenzor za ovaj proces ne može biti zapisan kao matrični element struje (10) jer je u tom izvodu korištena činjenica da stanja $|X\rangle$, koja odgovaraju svim nedetektiranim hadronima, čine potpuni skup. U SIDIS-u taj skup više neće biti potpun jer je jedan od hadrona u



Slika 2: Dijagramatski prikaz SIDIS procesa gdje je P impuls upadnog protona, a P_h impuls detektiranog hadrona. P_X i P_Y označavaju impulse preostalih, nedetektiranih hadrona.

konačnom stanju detektiran.

Takav proces tretira se na način da pretpostavimo da je moguće faktorizirati kratkodosežnu fiziku, odnosno tvrdi dio procesa i dugodosežnu fiziku, tj. meki dio procesa. Tvrdi dio odnosi se na interakciju s fotonom i on može biti tretiran perturbativno. Mekki dio odnosi se na samu strukturu protona i on je s tvrdim dijelom povezan jednom ili više partonskih linija. Što je više linija između ta dva dijela, to su doprinosi većeg "twista". Pojam "twist" odnosi se na razvoj u $1/Q$ i vodeći doprinosi imaju twist 2. QCD korekcije vodećem redu partonskog modela unijet će divergencije u tvrdi dio procesa i da bi faktorizacija bila uspješna, potrebno ih je nekako sakriti u partonske distribucije. U dokazima faktorizacijskih teorema potrebno je pokazati da je partonske distribucije moguće definirati neperturbativno na način da se divergencije dokidaju u svakom redu računa smetnje. To znači da moraju biti definirane upravo tako da sve opservable budu konačne [4].

Može se pokazati [4] da je hadronski tenzor u vodećem redu dan s

$$2MW^{\mu\nu} = \int d^4p d^4k \delta^{(4)}(p+q-k) \text{Tr}\{\Phi(p)\gamma^\mu \Delta(k)\gamma^\nu\}, \quad (10)$$

gdje su kvark-kvark korelacijske funkcije definirane kao

$$\Phi_{ij}(p) = \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{ip\cdot\xi} \langle P, S | \bar{\psi}_j(0) \psi_i(\xi) | P, S \rangle \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(k) &= \sum_X \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot\xi} \langle 0 | \psi_i(\xi) | P_h, S_h; X \rangle \\ &\quad \times \langle P_h, S_h; X | \bar{\psi}_j(0) | P, S \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

To su neperturbativni objekti koji nose informacije o podstrukтури protona. $\Phi(p)$ opisuje kako je kvark impulsa p raspodijeljen unutar protona impulsa P i spina S , dok $\Delta(k)$ opisuje kako se kvark impulsa k fragmentira u hadron impulsa P_h i spina S_h .

Koordinatni sustav odabran je tako da su P i P_h kolinearni u z -smjeru. U tom sustavu korelatori koji ulaze u hadronski tenzor su (11) i (12) integrirani po p^- i k^+

$$\Phi_{ij}(x, p_T) = \int dp^- \Phi_{ij}(p) \quad (13)$$

$$\Delta_{ij}(z, k_T) = \int dk^+ \Delta_{ij}(k). \quad (14)$$

U jednadžbi (10) u obzir je uzet samo vodeći doprinos u kojem nema izmjene gluona između tvrdog i mekog dijela. Postoje još i članovi interferencije, gdje doprinose umnošci amplituda bez izmjene gluona i amplituda s izmjenom jednog gluona. Oni će izgrađivati doprinose višeg twista hadronskom tenzoru, ali u isto vrijeme doprinijeti i vodećem članu izgradnjom Wilsonove linije (dodatak B). To su objekti koje je potrebno uključiti u uključiti u definicije korelatora kako bi bile baždarno invarijantne. Korelatori (11) i (12) sadrže matrice elemente bilokalnih operatora u lokalnoj teoriji polja pa zbog toga neće

biti baždarno invarijantni. Wilsonova linija igra ulogu spojnice te dvije točke i otklanja taj problem. Baždarno invarijantne definicije stoga su

$$\Phi_{ij}(x, p_T) = \int \frac{d\xi^- d\xi_T^2}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot \tilde{\xi}} \langle P | \bar{\psi}_j(0) \mathcal{W}_{[0, \tilde{\xi}]} \psi_i(\tilde{\xi}) | P \rangle \quad (15)$$

$$\Delta_{ij}(z, k_T) = \sum_X \int \frac{d\xi^+ d\xi_T^2}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot \xi'} \langle 0 | \mathcal{W}_{[0, \xi']} \psi_i(\xi') | P_h, S_h; X \rangle \times \langle P_h, S_h; X | \bar{\psi}_j(0) | 0 \rangle \quad (16)$$

Korištene su oznake $\tilde{\xi} = [\xi^-, 0, \xi_T]$ i $\xi' = [0, \xi^+, \xi_T]$. Wilsonova linija u (15) ide u smjeru n_- dok je linija u (16) u smjeru n_+ . U daljnjem računu bit će bitan samo korelator $\Phi(x, p_T)$ čija najopćenitija parametrizacija sadrži matrice strukture pomnožene skalarnim funkcijama, slično kao što je parametriziran hadronski tenzor u DIS-u. Te funkcije odgovaraju partonskim distribucijama koje ovise o poprečnom impulsu ili skraćeno TMD-ovima [8]. Korelator je parametriziran kao

$$\Phi(x, p_T) = \frac{1}{2} \left\{ f_1 \not{p}_+ + f_{1T}^\perp \frac{S_T \rho \epsilon_T^{\rho\sigma} p_{T\sigma}}{M} \not{p}_+ + g_{1L} S_L \gamma_5 \not{p}_+ - g_{1T} \frac{S_T \cdot p_T}{M} \gamma_5 \not{p}_+ + h_1 \frac{\gamma_5 [\not{p}_T, \not{p}_+]}{2} - h_{1T}^\perp \frac{S_T \rho p_T^{(\rho} p_T^{\sigma)} \gamma_5 [\gamma_\sigma, \not{p}_+]}{M^2} \frac{1}{2} \right. \\ \left. + h_{1L}^\perp S_L \frac{\gamma_5 [\not{p}_T, \not{p}_+]}{2M} + h_1^\perp \frac{i[\not{p}_T, \not{p}_+]}{2M} \right\} + \{ \dots \}. \quad (17)$$

Ovih 8 članova sadrži 8 partonskih distribucija koje odgovaraju doprinosu twista 2, dok izraz $\{ \dots \}$ predstavlja doprinose višeg twista. Oni su irelevantni za daljnje razmatranje. U jednadžbi (17) ϵ_T je antisimetrični tenzor dan relacijom

$$\epsilon_T^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} n_{+\rho} n_{-\sigma}, \quad (18)$$

dok oble zagrade označavaju oduzimanje traga u dvije transverzalne dimenzije:

$$p_T^{(\rho} p_T^{\sigma)} = p_T^\rho p_T^\sigma - \frac{1}{2} (p_T \cdot p_T) g_T^{\rho\sigma}. \quad (19)$$

$g_T^{\rho\sigma}$ je transverzalna metrika. Udarci presjek može se opet zapisati kao produkt leptonskog i hadronskog tenzora

$$\frac{d\sigma}{dx dy dz d^2 \mathbf{q}_T} = \frac{\pi \alpha^2}{2Q^4} y z L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (20)$$

U partonskom modelu to postaje

$$E E_h' \frac{d\sigma_{ep \rightarrow e' hX}}{d^3 l' d^3 P_h} = \hat{\sigma}_{eq \rightarrow e' q'} \otimes f_1 \tilde{\otimes} D_{h/q'}. \quad (21)$$

$f_1(x, k_T)$ je TMD verzija kolinearne distribucije $f(x)$, $D_{h/q'}$ je kvarkovska fragmentacijska funkcija, a $\tilde{\otimes}$ predstavlja konvoluciju u longitudinalnom i transverzalnom impulsu.

D. TMD-ovi

Postoje dva opisa nastanka poprečnog impulsa u konačnom stanju. Prvi je primjenjiv u režimu $q_T \gg M$, gdje je M masa protona koja određuje meku skalu. Poprečni impuls u konačnom stanju generiran je emisijom nedetektiranog gluona iz aktivnog partona. Neperturbativnu informaciju o protonu tada nose kolinearne distribucijske funkcije. Takav opis dijagramatski je prikazan na slici 3.

Drugi opis primjenjiv je u režimu $q_T \ll Q$ i govori da je takvo zračenje dio intrinzične dinamike protona. Distribucijske funkcije stoga će ovisiti o poprečnom impulsu i bit će upravo TMD-ovi. Dijagramatski prikaz tog opisa dan je na slici 4.

U kolinearnoj faktorizaciji, gdje partonske distribucije ne ovise o poprečnom impulsu, korelator (15) isto će ovisiti samo o udjelu impulsa x i njegova definicija je

$$\Phi_{ij}(x) = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{ip \cdot \xi} \langle P | \bar{\psi}_j(0) \mathcal{W}_{[0, \xi]}^n \psi_i(\xi) | P \rangle \Big|_{\xi^+ = 0, \xi_T = \mathbf{0}_T} \quad (22)$$

gdje je Wilsonova linija u n_- smjeru. Veza korelacijskih funkcija (15) i (22) je

$$\Phi(x) = \int d^2\mathbf{p}_T \Phi(x, p_T). \quad (23)$$

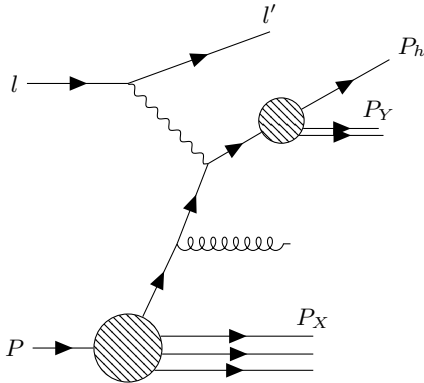
Kolinearni korelator može se parametrizirati kao

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left\{ f_1 \not{n}_+ + g_1 S_L \gamma_5 \not{n}_+ - + h_1 \frac{\gamma_5 [\not{x}_T, \not{n}_+]}{2} \right\} + \{ \dots \}, \quad (24)$$

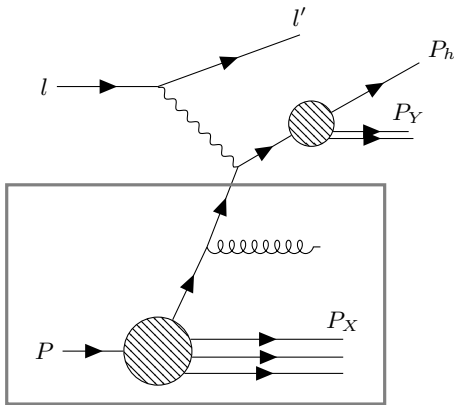
gdje su zadržani su samo twist-2 doprinosi. Distribucije s desne strane ovise samo o x i dane su kao

$$f_1(x) = \int d^2\mathbf{p}_T f_1(x, p_T). \quad (25)$$

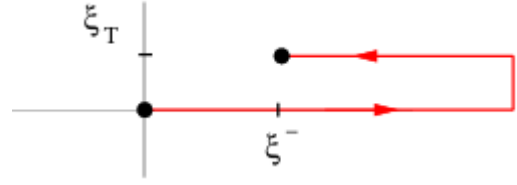
Korelator (15) je neperturbativni objekt, no za vrijednosti poprečnog impulsa koje su mnogo veće od skale jakih interakcija u protonu, repove TMD-ova moguće je izračunati perturbativno.



Slika 3: Zračenje neopaženog gluona



Slika 4: Generiranje poprečnog impulsa u TMD opisu. Sivi pravokutnik predstavlja proton



Slika 5: Wilsonova linija za SIDIS

E. Račun

Neka p predstavlja oznaku za tvrdi skalu. Formalno sada se $\Phi(x, p_T)$ razvija po $1/p$ te se zadržava vodeći doprinosi. Relevantni faktorizirani graf može biti zapisan kao konvolucija člana koji predstavlja tvrdi interakciju (tzv. jezgre tvrdog raspršenja) i korelacijske funkcije oblika

$$\Phi(x, p_T) = \int dp^- d^4l H(p, l) \Phi(l) + (\text{članovi s gluonskim korelatorima}). \quad (26)$$

U Feynmanovom baždarenju potrebno je uzeti u obzir i doprinos Wilsonove linije, koja je za SIDIS tzv. oblika spajalice (slika 5), odnosno

$$\mathcal{W}_{[0, \xi]} = [0, 0, \mathbf{0}_T; \infty, 0, \mathbf{0}_T] \times [\infty, 0, \mathbf{0}_T; \infty, 0, \xi_T] \times [\infty, 0, \xi_T; \xi, 0, \xi_T]. \quad (27)$$

Transverzalna komponenta u $a^- = \infty$ neće doprinositi pa se gornji izraz pojednostavljuje. To vrijedi samo za Feynmanovo baždarenje dok će u npr. "light-cone" baždarenju samo ona i doprinositi. Wilsonova linija oblika (27) vodi na singularitet u rapiditetu gluona, stoga će u računu smjer linije biti malo pomaknut sa svjetlosnog stošca i definiran nekim vektorom v . Zasadu ćemo to ostaviti po strani i pretpostaviti da je linija i dalje u n_- smjeru. Iskoristimo li definiciju Wilsonove linije, možemo pisati

$$[0, 0, \mathbf{0}_T; \infty, 0, \mathbf{0}_T] = \mathcal{P} \exp \left(-ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_-) \right) \quad (28)$$

te

$$\begin{aligned} [\infty, 0, \mathbf{0}_T; \xi, 0, \mathbf{0}_T] &= \mathcal{P} \exp \left(-ig \int_\infty^\xi dt (n_- \cdot A)(tn_-) \right) \\ &= \mathcal{P} \exp \left(+ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_- + \xi) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Uvrstimo to u izraz za korelator pa dobivamo:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(x, p_T) = & \int \frac{d\xi^- d^2\xi_T}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot \xi} \times \\ & \langle P | \bar{\psi}_j(0) \mathcal{P} \exp \left(-ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_-) \right) \times \\ & \mathcal{P} \exp \left(+ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_- + \xi) \right) \psi_i(\xi) | P \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Kako bismo identificirali sve relevantne dijagrame, potrebno je ustanoviti koje će sve tvrde jezgre doprinosti u interakciji. To možemo ako promotrimo korelator $\Phi(x, p_T)$, ali s tim da stanja $|P\rangle$ u definiciji ne predstavljaju proton već slobodne kvarkove. Zanima nas račun do prvog reda u α_s pa eksponencijalne članove razvijamo do linearnog člana u g

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(x, p_T) = & \int \frac{d\xi^- d^2\xi_T}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot \xi} \times \\ & \langle P | \bar{\psi}_j(0) \left(1 - ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_-) \right) \times \\ & \left(1 + ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_- + \xi) \right) \psi_i(\xi) | P \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

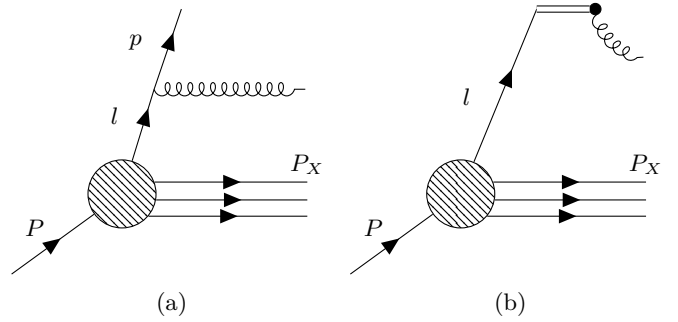
Potom između Wilsonovih linija ubacujemo potpuni skup gluona impulsa q i polarizacije r (indekse boje zanemarujemo)

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(x, p_T) = & \int \frac{d\xi^- d^2\xi_T}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot \xi} \sum_r \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times \\ & \langle P | \bar{\psi}_j(0) \left(1 - ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_-) \right) | q, r \rangle \times \\ & \langle q, r | \left(1 + ig \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_- + \xi) \right) \psi_i(\xi) | P \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Nakon množenja dobivamo izraz

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(x, p_T) = & \int \frac{d\xi^- d^2\xi_T}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot \xi} \sum_r \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times \\ & \left[\langle P | \bar{\psi}_j(0) | q, r \rangle \langle q, r | \psi_i(\xi) | P \rangle + \right. \\ & + ig \langle P | \bar{\psi}_j(0) | q, r \rangle \langle q, r | \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_- + \xi) \psi_i(\xi) | P \rangle \\ & - ig \langle P | \bar{\psi}_j(0) \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_-) | q, r \rangle \langle q, r | \psi_i(\xi) | P \rangle + \\ & + g^2 \langle P | \bar{\psi}_j(0) \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_-) | q, r \rangle \times \\ & \left. \times \langle q, r | \int_0^\infty dt (n_- \cdot A)(tn_- + \xi) \psi_i(\xi) | P \rangle \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Korelator $\Phi(x, p_T)$ sadrži četiri člana tvrde interakcije koji će pripadati četirim dijagramima. Njih dobivamo preko dvije amplitude prikazane na slici 6.



Slika 6: Amplitude potrebne za izračunavanje dijagrama

Amplituda pridružena prvom dijagramu je:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^{(a)} = & \frac{i \not{p}_{im}}{p^2} (ig \gamma_{mj}^\mu T_\alpha) \epsilon_\mu^*(q) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \times \\ & \int d^4x e^{il \cdot x} \langle X | \psi_j(x) | P \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - l + p), \end{aligned} \quad (34)$$

gdje je T_α generator $SU(3)$ grupe, g konstanta vezanja jake sile, a $\epsilon_\mu(q)$ vektor polarizacije gluona. Eksplicitno su napisani Diracovi indeksi, dok su indeksi boje implicitni. Nakon malo manipulacija, amplituda se može zapisati kao

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^{(a)} = & -g T_\alpha \epsilon_\mu^*(q) \frac{\not{p}_{im}}{p^2} \gamma_{mj}^\mu \langle X | \psi_j(0) | P \rangle \times \\ & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + p + P_X - P). \end{aligned} \quad (35)$$

Amplituda koja odgovara drugom dijagramu je, uz korištenje Feynmanovih pravila za eikonálnu liniju (dodatak B)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j^{(b)} = & ig T_\alpha v^\mu \epsilon_\mu^*(q) \frac{i}{q \cdot v + i\epsilon} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \times \\ & \int d^4x e^{il \cdot x} \langle X | \psi_j(x) | P \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - l + p) \end{aligned} \quad (36)$$

što možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j^{(b)} = & -g T_\alpha v^\mu \epsilon_\mu^*(q) \frac{i}{q \cdot v + i\epsilon} \langle X | \psi_j(0) | P \rangle \times \\ & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + p + P_X - P). \end{aligned} \quad (37)$$

Korelator dobivamo tako da u amplitudama zanemarimo delta funkcije pa potom pomnožimo sve takve hermitski konjugirane amplitude s amplitudama, sumiramo po međustanju X , uključimo u obzir činjenicu da su gluoni na ljusci mase te dodamo jednu delta funkciju koja se brine za očuvanje impulsa. Matematički je to

$$\begin{aligned} \Phi(p) = & \sum_{X,r} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(q^2) \theta(q^0) \mathcal{A}^{(a,b)\dagger} \mathcal{A}^{(a,b)} \\ & \times 1 \times \delta^{(4)}(q + p + P_X - P). \end{aligned} \quad (38)$$

Suma po r je suma po polarizacijama gluona, a delta i theta funkcije stavljaju uvjet da su gluoni na ljusci mase. U jednadžbi se također pojavljuje i jedinica oblika

$$1 = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int dx e^{i(l-(P-P_X)) \cdot x}. \quad (39)$$

Tim postupkom dobivamo 4 dijagrama prikazana na slici (7). Lijeva strana predstavlja amplitudu, a desna hermitski konjugiranu amplitudu.

Jednadžba (38) za prvi dijagram daje

$$\Phi_{ik}^{(a)}(p) = \sum_X \sum_r \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(q^2) \theta(q^0) \times \\ \mathcal{A}_k^{(a)\dagger} \mathcal{A}_i^{(a)} \times 1 \times \delta^{(4)}(q + p + P_X - P). \quad (40)$$

Uvrstimo li amplitudu (35), umnožak matrica T_α zamijenimo s faktorom $C_F = 4/3$ i iskoristimo činjenicu da je u Feynmanovom baždarenju polarizacijska suma

$$\sum_r \epsilon_\mu^*(q, r) \epsilon_\nu(q, r) = -g_{\mu\nu} \quad (41)$$

dobivamo

$$\Phi_{ik}^{(a)}(p) = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \sum_X \int \frac{d^4 q d^4 l}{(2\pi)^4} \delta(q^2) \theta(q^0) \int d^4 x e^{il \cdot x} \\ \langle P | \bar{\psi}_l(0) | X \rangle \gamma_{ls}^\mu \frac{\not{p}_{sk}}{p^2} \frac{\not{p}_{im}}{p^2} \gamma_{\mu, mj} \langle X | \psi_j(x) | P \rangle \\ = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \delta((l-p)^2) \theta((l-p)^0) \int d^4 x e^{il \cdot x} \\ \frac{\not{p}_{im}}{p^2} \gamma_{\mu, mj} \sum_X \langle P | \bar{\psi}_l(0) | X \rangle \langle X | \psi_j(x) | P \rangle \gamma_{ls}^\mu \frac{\not{p}_{sk}}{p^2}. \quad (42)$$

Iskoristimo li činjenicu da stanja $|X\rangle$ tvore potpun skup, gornji izraz postaje

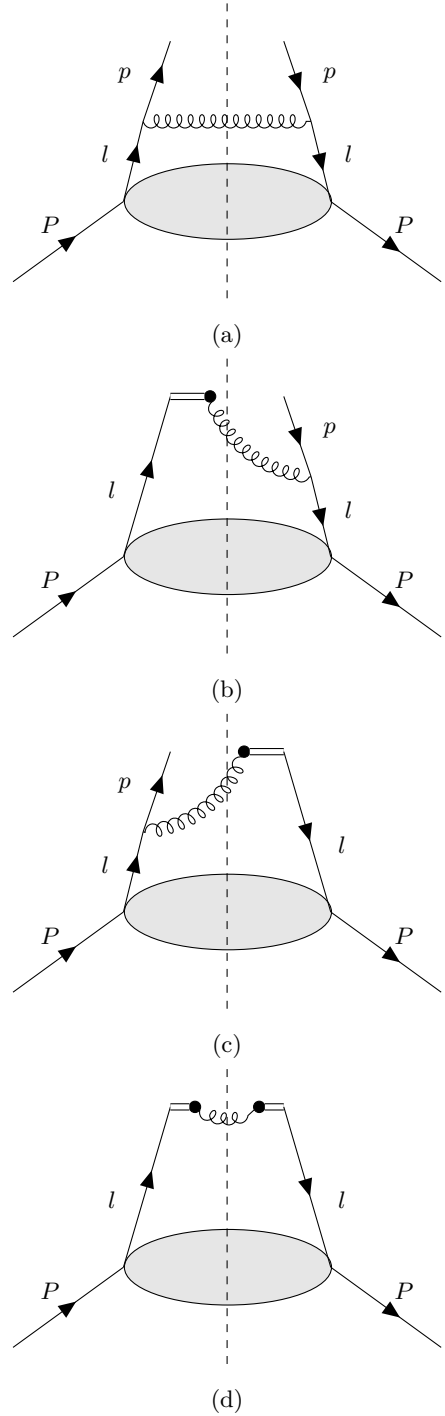
$$\Phi_{ik}^{(a)}(p) = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \int d^4 l \delta((l-p)^2) \theta((l-p)^0) \\ \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{il \cdot x} \frac{\not{p}_{im}}{p^2} \gamma_{\mu, mj} \langle P | \bar{\psi}_l(0) \psi_j(x) | P \rangle \gamma_{ls}^\mu \frac{\not{p}_{sk}}{p^2}. \quad (43)$$

Sada možemo iskoristiti definiciju (11) pa potom definiciju (22) i integrirati po p^- jer nas ne zanima puni korelator. Dobivamo (uz implicitne Diracove indekse)

$$\Phi^{(a)}(x, p_T) = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \int dp^- dl^+ \delta((l-p)^2) \theta(l^+ - p^+) \\ \times \frac{\not{p}}{p^2} \gamma^\mu \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \gamma_\mu \frac{\not{p}}{p^2} \quad (44)$$

Analognim postupkom, izvrjednjuju se i preostali dijagrami. Svi korelatori su dakle

$$\Phi^{(a)}(x, p_T) = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \int dp^- dl^+ \delta((l-p)^2) \theta(l^+ - p^+) \\ \times \frac{\not{p}}{p^2} \gamma^\mu \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \gamma_\mu \frac{\not{p}}{p^2} \quad (45)$$



Slika 7: Dijagrami koji doprinose korelatoru. Lijeva strana predstavlja amplitudu, dok desna strana predstavlja hermitski konjugiranu amplitudu.

$$\Phi^{(b)}(x, p_T) = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} C_F \int dp^- dl^+ \delta((l-p)^2) \theta(l^+ - p^+) \\ \times \frac{1}{(l-p) \cdot v + i\epsilon} \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \not{p} \frac{\not{p}}{p^2} \quad (46)$$

$$\Phi^{(c)}(x, p_T) = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \int dp^- dl^+ \delta((l-p)^2) \theta(l^+ - p^+) \times \frac{\not{p}}{p^2} \not{p} \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \frac{1}{(l-p) \cdot v - i\epsilon} \quad (47)$$

$$\Phi^{(d)}(x, p_T) = \frac{-4\pi\alpha_s}{(2\pi)^3} C_F \int dp^- dl^+ \delta((l-p)^2) \theta(l^+ - p^+) \times \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \frac{v^2}{[(l-p) \cdot v - i\epsilon][(l-p) \cdot v + i\epsilon]} \quad (48)$$

Delta funkciju moguće je zapisati kao

$$\delta((l-p)^2) = \frac{\hat{x}}{2p^+(1-\hat{x})} \delta\left(p^- + \frac{\mathbf{p}_T^2}{2p^+} \frac{\hat{x}}{1-\hat{x}}\right) \quad (49)$$

i možemo ju iskoristiti da integriramo po p^- . Integral po l^+ zamjenjujemo integralom po $\hat{x}$. Nakon integracije po p^- , impulse l i p zamjenjujemo s

$$\bar{l} = \frac{p^+}{\hat{x}} n_+ \quad (50)$$

$$\bar{p} = p^+ n_- - \frac{p_T^2}{2p^+} \frac{\hat{x}}{1-\hat{x}} n_- + \mathbf{p}_T \quad (51)$$

pa izrazi za korelatore glase

$$\Phi^{(a)}(x, p_T) = -\frac{\alpha_s C_F}{(2\pi)^2} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \frac{\not{p}}{p^2} \gamma^\mu \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \gamma_\mu \frac{\not{p}}{p^2} \quad (52)$$

$$\Phi^{(b)}(x, p_T) = \frac{\alpha_s C_F}{(2\pi)^2} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \times \frac{1}{(\bar{l} - \bar{p}) \cdot v + i\epsilon} \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \not{p} \frac{\not{p}}{p^2} \quad (53)$$

$$\Phi^{(c)}(x, p_T) = -\frac{\alpha_s C_F}{(2\pi)^2} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \times \frac{\not{p}}{p^2} \not{p} \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \frac{1}{(\bar{l} - \bar{p}) \cdot v - i\epsilon} \quad (54)$$

$$\Phi^{(c)}(x, p_T) = -\frac{\alpha_s C_F}{(2\pi)^2} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \Phi_2^q\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \times \frac{v^2}{[(l-p) \cdot v - i\epsilon][(l-p) \cdot v + i\epsilon]}. \quad (55)$$

Indeksi $+$ i $-$ na vektorima n_+ i n_- nisu Lorentzovi indeksi već samo oznake, a njihove definicije su

$$n_+^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_T) \quad (56)$$

$$n_-^\mu = (1, 0, \mathbf{0}_T) \quad (57)$$

Vektor v koji određuje smjer Wilsonove linije, može biti zapisan kao

$$v = v^- n_- - \frac{2(P^+)^2 v^-}{\zeta} n_+ = v^- n_- - \frac{2(p^+)^2 v^-}{\hat{x}^2 \zeta} n_+ \quad (58)$$

uz

$$\zeta = -\frac{(2P \cdot v)^2}{v^2} = -\frac{2(P^+)^2 v^-}{v^+}. \quad (59)$$

Njegov kvadrat je

$$v^2 = -\frac{4(p^+ v^-)^2}{\mathbf{p}_T^2} \eta. \quad (60)$$

Uvođenjem parametra

$$\eta = \frac{\mathbf{p}_T^2}{x^2 \zeta} = -\frac{\mathbf{p}_T^2}{2(p^+)^2} \frac{v^+}{v^-} \quad (61)$$

možemo pisati

$$\begin{aligned} (\bar{l} - \bar{p}) \cdot v &= (\bar{l} - \bar{p})^+ v^- - \frac{2(p^+)^2 v^-}{\hat{x}^2 \zeta} (\bar{l} - \bar{p})^- v^- \\ &= p^+ \frac{1-\hat{x}}{\hat{x}} v^- - \frac{2(p^+)^2 v^-}{\hat{x}^2 \zeta} \frac{\mathbf{p}_T^2}{2p^+} \frac{\hat{x}}{1-\hat{x}} v^- \\ &= \frac{p^+ v^-}{\hat{x}} \left[1 - \hat{x} - \eta \frac{\hat{x}^2}{1-\hat{x}} \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Sada jednačbe (60) i (62) uvrstimo u izraz za ukupni korelator

$$\Phi(x, p_T) = \Phi^{(a)} + \Phi^{(b)} + \Phi^{(c)} + \Phi^{(d)} \quad (63)$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} \Phi(x, p_T) = & -\frac{\alpha_s C_F}{4\pi^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \left\{ \frac{(1-\hat{x})^2}{p_T^2} \vec{p} \gamma^\mu \Phi_2\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \gamma_\mu \vec{p} - (1-\hat{x}) [\vec{p} \not{\Phi}_2\left(\frac{x}{\hat{x}}\right)] \frac{1}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v + i\epsilon} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v - i\epsilon} \Phi_2\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \not{p} \vec{p} - \Phi_2\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) 4(p^+ v^-)^2 \frac{\eta}{[(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Korelator na lijevoj strani jednadžbe je parametriziran kao (17) dok je kolinearni korelator na desnoj strani jednadžbe parametriziran kao (24). Dakle objekti s lijeve i desne strane su razvijeni u Diracovoj bazi. Nas zanimaju strukturne funkcije koje se javljaju kao koeficijenti uz pojedini element baze. Da bismo projicirali distribuciju $f_1(x, p_T)$, cijelu jednadžbu množimo s $\not{p}_-$, uzimamo trag i koristimo činjenicu da vrijedi $n_+ \cdot n_- = 1$ i $n_+ \cdot n_+ = n_- \cdot n_- = 0$. U tom računu javljaju se sljedeći tragovi

$$\text{Tr}(\not{p}_+ \not{p}_-) = 4 \quad (65)$$

$$\text{Tr}(\vec{p} \gamma^\mu \not{p}_+ \gamma_\mu \vec{p} \not{p}_-) = -8\mathbf{p}_T^2 \quad (66)$$

$$\text{Tr}(\vec{p} \not{p} \not{p}_+ \not{p}_-) = 8p^+ v^-. \quad (67)$$

Za $f_1(x, p_T)$ sada dobivamo

$$\begin{aligned} f_1(x, p_T) = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \left\{ (1-\hat{x})^2 \right. \\ & + (1-\hat{x}) \bar{p}^+ v^- \left[\frac{1}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v - i\epsilon} + \frac{1}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v + i\epsilon} \right] \\ & \left. - 4(p^+ v^-)^2 \frac{\eta}{[(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v]^2} \right\} f_1\left(\frac{x}{\hat{x}}\right). \end{aligned} \quad (68)$$

$i\epsilon$ perskripciju obilaženja polova možemo zamijeniti PV [9] perskripcijom tako da drugi član u gornjoj jednadžbi postaje

$$\begin{aligned} & \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \left[\frac{1}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v - i\epsilon} + \frac{1}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v + i\epsilon} \right] \\ & = 2\text{PV} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \frac{1}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v}, \end{aligned} \quad (69)$$

što kada uvrstimo (62) postaje

$$\begin{aligned} & \text{PV} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \frac{(1-\hat{x}) \bar{p}^+ v^-}{(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v} = \\ & \text{PV} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \frac{\hat{x}(1-\hat{x})}{[(1-\hat{x})^2 - \eta \hat{x}^2]}. \end{aligned} \quad (70)$$

Nakon uvrštavanja (60) i (62) u posljednji član jednadžbe (68) te primjenom PV perskripcije, dobivamo

$$\begin{aligned} & \text{PV} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}(1-\hat{x})} \frac{4(p^+ v^-)^2 \eta}{[(\bar{l}-\bar{p}) \cdot v]^2} f_1\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) = \\ & \text{PV} \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \frac{\eta \hat{x}^2 (1-\hat{x})}{[(1-\hat{x})^2 - \eta \hat{x}^2]^2} \left(\frac{x}{\hat{x}}\right). \end{aligned} \quad (71)$$

U sljedećem koraku uzimamo limes $\eta \ll 1$, jer nas zanima korelator u režimu $\mathbf{p}_T^2 \ll Q^2$, a vrijedi $x^2 \zeta \sim Q^2$. Iskoristimo li identitete [10]

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \text{PV} \int_x^1 \frac{1-\hat{x}}{(1-\hat{x})^2 - \eta \hat{x}^2} G(\hat{x}) \\ & = \int_x^1 \frac{G(\hat{x})}{(1-\hat{x})_+} + \frac{1}{2} G(1) \ln \frac{1}{|\eta|} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \text{PV} \int_x^1 \frac{\eta(1-\hat{x})}{[(1-\hat{x})^2 - \eta \hat{x}^2]^2} G(\hat{x}) = -\frac{1}{2} G(1), \quad (73)$$

distribucija postaje

$$\begin{aligned} f_1(x, p_T) = & \frac{\alpha_s C_F}{2\pi^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2} \int_x^1 \left\{ (1-\hat{x}) + \frac{2\hat{x}}{(1-\hat{x})_+} \right. \\ & \left. + \delta(1-\hat{x}) \ln \frac{1}{|\eta|} - \delta(1-\hat{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (74)$$

Uvedemo li još pokratu

$$\text{L}(\eta^{-1}) = 2 C_F \ln \frac{1}{|\eta|} - 3 C_F, \quad (75)$$

konačno dobivamo

$$\begin{aligned} f_1(x, p_T) = & \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2} \left\{ \int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \text{P}_{qq}(\hat{x}) f_1\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\text{L}(\eta^{-1})}{2} f_1(x) - C_F f_1(x) \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

Pojavila se kvark-kvark splitting funkcija

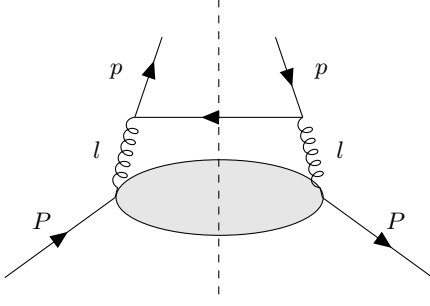
$$\text{P}_{qq}(\hat{x}) = C_F \left[\frac{1+\hat{x}^2}{(1-\hat{x})_+} + \frac{3}{2} \delta(1-\hat{x}) \right]. \quad (77)$$

Izraz (76) govori da se u režimu visokog poprečnog impulsa TMD koji odgovara nepolariziranom kvarku u nepolariziranom protonu, može zapisati konvolucija PDF-a i kvark-kvark splitting funkcije uz dva dodatna člana. Zapišemo li konvoluciju kao

$$\int_x^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \text{P}_{qq}(\hat{x}) f_1\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) = (\text{P}_{qq} \otimes f_1)(x) \quad (78)$$

konačni izraz postaje

$$\begin{aligned} f_1(x, p_T) = & \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2} \left[\frac{\text{L}(\eta^{-1})}{2} f_1(x) - C_F f_1(x) \right. \\ & \left. + (\text{P}_{qq} \otimes f_1)(x) \right]. \end{aligned} \quad (79)$$



Slika 8: Dijagram koji predstavlja gluonski doprinos

Valja napomenuti da ovo nije kompletan doprinos distribuciji $f_1(x, p_T)$. Da bismo dobili potpuni izraz potrebno je izračunati još i kvark-gluon doprinos dan dijagramom na slici 8. No to premašuje opseg ovog seminara pa samo navodimo rezultat[10]

$$f_1(x, p_T) = \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \frac{1}{\mathbf{p}_T^2} \left[\frac{L(\eta^{-1})}{2} f_1(x) - C_F f_1(x) + (P_{qq} \otimes f_1 + P_{qg} \otimes f_1^g)(x) \right]. \quad (80)$$

Funkcije f_1^g su gluonski PDF-ovi, a P_{qg} je kvark-gluon splitting funkcija dana s

$$P_{qg}(\hat{x}) = T_R [\hat{x}^2 + (1 - \hat{x})^2]. \quad (81)$$

III. ZAKLJUČAK

U ovom seminaru diskutiran je proces SIDIS-a i općenita parametrizacija njegova udarnog presjeka. Uvedeni su TMD-ovi, tj. partonske distribucijske funkcije ovisne o poprečnom impulsu. U režimu velikih poprečnih impulsa repove tih funkcija moguće je izračunati perturbativno. Račun je proveden na primjeru distribucije nepolariziranog kvarka u nepolariziranom protonu. Glavni rezultat je pojava kvark-kvark splitting funkcije, koje je značajna jer se pojavljuje u DGLAP jednadžbama. Komentirano je i kako dobiti kvark-gluon splitting funkciju.

Dodatak A: Koordinate na svjetlosnom stošću

Korisno je umjesto uobičajenih koordinata (t, x, y, z) , odnosno $(0, 1, 2, 3)$, za neki vektor x^μ koristiti koordinate

na svjetlosnom stošću definirane kao

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) \quad (A1)$$

$$x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) \quad (A2)$$

$$\mathbf{x}_T = (x^1, x^2). \quad (A3)$$

Komponente metrike u takvom sustavu su $g_{+-} = g_{-+} = 1$ te $g_{12} = g_{21} = -1$. Lorentz invarijantan skalarni produkt je

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^+ y^- + x^- y^+ - \mathbf{x}_T \cdot \mathbf{y}_T. \quad (A4)$$

Dodatak B: Wilsonove linije

Kvark-kvark korelator definiran je kao

$$\Phi_{ij}(x, p_T) = \int \frac{d\xi^- d\xi_T^2}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot \xi} \langle P | \bar{\psi}_j(0) \psi_i(\xi) | P \rangle \Big|_{\xi^+ = 0}. \quad (B1)$$

On sadrži element bilokalnog operatora i takav objekt nije baždarno invarijantan u lokalnoj teoriji polja. Da bi to bilo ispravljeno, potrebno je u definiciju uključiti Wilsonovu liniju ili baždarnu poveznicu, definiranu kao

$$\mathcal{W}_{[0, \xi]} = \mathcal{P} \exp \left(-ig \int_0^\xi dt (v \cdot A)(tv) \right). \quad (B2)$$

$\mathcal{P}$ označava uređenje po putevima, a v vektor koji određuje smjer pripadne linije. Koristi se još i oznaka

$$\mathcal{W}_{[0, \xi]} = [\xi^-, \xi^+, \xi_T]. \quad (B3)$$

Oblik linije ovisi o procesu koji se promatra; ona će biti različita za različite procese. Za SIDIS ona će biti tzv. oblika spajalice (slika 5). U Feynmanovom baždarenju transversalni dio linije neće doprinositi već samo dio u n_- smjeru. U računu je korištena linija koja nije striktno u smjeru n_- , nego je dodan n_+ doprinos kako bi se izbjegao singularitet u rubnoj točki.

Može se pokazati da u SIDIS-u doprinos Wilsonove linije dolazi od izmjene gluona tvrdog i mekog dijela dijagrama [4].

Feynmanova pravila za eikonalne linije koje se pojavljuju u računu su [10]

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{wavy line} \\ | \\ a, \mu \end{array} = ig T^a v^\mu \quad (B4)$$

$$\overline{\overline{\longrightarrow}}^l = \frac{i}{l \cdot v + i\epsilon}. \quad (B5)$$

-
- [1] R. Boussarie, M. Burkardt, M. Constantinou, W. Detmold, M. Ebert, M. Engelhardt, S. Fleming, L. Gamberg, X. Ji, Z.-B. Kang, C. Lee, K.-F. Liu, S. Liuti, T. Mehen, A. Metz, J. Negele, D. Pitonyak, A. Prokudin, J.-W. Qiu, A. Rajan, M. Schlegel, P. Shanahan, P. Schweitzer, I. W. Stewart, A. Tarasov, R. Venugopalan, I. Vitev, F. Yuan, and Y. Zhao, *Tmd handbook* (2023), arXiv:2304.03302 [hep-ph].
 - [2] Eng. deep inelastic scattering.
 - [3] S. Navas, C. Amsler, T. Gutsche, C. Hanhart, *et al.* (Particle Data Group Collaboration), Review of particle physics, *Phys. Rev. D* **110**, 030001 (2024).
 - [4] M. Schlegel, *Time-reversal odd effects in semi-inclusive deep-inelastic scattering*, Ph.D. thesis, Ruhr U., Bochum (main) (2006).
 - [5] J. Collins, *Foundations of Perturbative QCD*, Vol. 32 (Cambridge University Press, 2011).
 - [6] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, 2013).
 - [7] Eng. semi-inclusive DIS.
 - [8] Eng. Transverse Momentum Dependent parton distribution functions.
 - [9] Eng. Principal Value.
 - [10] A. Bacchetta, D. Boer, M. Diehl, and P. J. Mulders, Matches and mismatches in the descriptions of semi-inclusive processes at low and high transverse momentum, *Journal of High Energy Physics* **2008**, 023–023 (2008).