Kvantna kompletnost i prostornovremenski singulariteti

Jan Dragašević*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička cesta 32, Zagreb
(Mentor: izv.prof.dr.sc. Ivica Smolić)

U ovom seminaru proučavamo prirodu singulariteta u općoj teoriji relativnosti s proširenjima na kvantnu teoriju u zakrivljenom prostorvremenu. Prvo dajemo panoramski pregled singulariteta te njihovih klasičnih i kvantnih značajki. Iskazujemo Penroseov teorem o singularitetima kao najvažniji rezultat u klasičnoj teoriji. Dajemo uvjete za određivanje prisutnosti kvantnih singulariteta pomoću definicije esencijalno hermitskog operatora evolucije valnog paketa. Na kraju prolazimo kroz primjer provjere kvantne prirode jednog singulariteta po članku Horowitza i Marlofa[1] te predočujemo tablicu sa sažetkom ostalih singulariteta proučavanih kvantnim probama.

I. UVOD

Einsteinova opća teorija relativnosti najuspješniji je opis globalnih svojstava našeg svemira i najpreciznija teorija gravitacije koju imamo. Slika koju nam pruža opisuje gravitacijsku silu kao zakrivljenost prostorvremena. U srži teorije nalazi se Einsteinova jednadžba:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$

koja opisuje međudjelovanje oblika prostorvremena opisanog metrikom $g_{\mu\nu}$ i materije koja se nalazi u njemu opisane tenzorom energije i impulsa $T_{\mu\nu}$. Materija zakrivljuje prostorvrijeme koje nadalje uvjetuje gibanje same materije.

Fizikalno, priča je kompliciranija od isključivo ove jedne relacije. Tenzor energije i impulsa ne može imati bilo kakav sadržaj (već je ograničen energijskim uvjetima), oblik prostorvremena mora se slagati s opažanjima, itd. Međutim, već s matematičke strane pronalazak rješenja Einsteinove jednadžbe vrlo je netrivijalan zadatak. Povijesno, među prvim pronađenim rješenjima bila su simetrijski relativno jednostavna sferična rješenja koja danas poznajemo kao crne rupe (uz prisutnost dovoljne gustoće materije).

Crne rupe su centralni objekti u općoj teoriji relativnosti, karakterizirani ogromnim gravitacijskim utjecajem i kompleksnom kauzalnom strukturom. Proučavanje ovih objekata dovelo je do jednog od najznačajnijih rezultata gravitacijske fizike, Penroseovog teorema o singularitetima [2]. Pojednostavljeno, pokazano je da uz određene uvjete, u centru svake crne rupe leži singularitet - područje u kojem geodezici - trajektorije koje slobodne čestice prate kroz prostorvrijeme - naglo završavaju (više o tome kasnije).

Pojava singulariteta u fizičkoj teoriji obično se shvaća kao znak njezine neadekvatnosti. Ona je, međutim, u ovom slučaju očekivana. Događa se u situaciji u kojoj bi kvantni efekti trebali opisivati međudjelovanje materije (na malim skalama, zbog visoke gustoće). Još ne znamo povezati kvantne i gravitacijske učinke u jedinstven okvir, ali općenito se očekuje da takva teorija neće sadržavati singularitete.

A. Singulariteti

Ključno za našu daljnju raspravu, u klasičnoj općoj teoriji relativnosti, singulariteti su zone u kojima se *deterministička* priroda teorije lomi. Geodezici naglo završavaju, signalizirajući kraj fizičke predvidljivosti.

Kvantna mehanika nudi obećavajući put za rješavanje ovog pitanja. Rani rad [3] sugerira da se singulariteti mogu "pokrpati" u kvantnom okviru, gdje se valne funkcije deterministički razvijaju čak i u prostorvremenima s klasičnim singularitetima. Ovaj pojam kvantne potpunosti potaknuo je daljnje ispitivanje singulariteta kroz kvantnu teoriju i identificiraju uvjeti pod kojima one prestaju biti barijere.

Cilj ovog rada jest ispitati problem singulariteta iz klasične i kvantne perspektive. Konkretno, pod kojim uvjetima određena prostorvremena možemo smatrati klasično ili kvantno singularnima. Primjenom tehnika poput Horowitz-Marolfovog kriterija i analizom evolucije različitih kvantnih polja nastojim utvrditi razrješavaju li se pitanja singulariteta pod jačim ograničenjima za koja, iz kvantne fizike, znamo da materija zadovoljava.

Ovakvo istraživanje daje nam uvid u svojstva koja će morati imati kvantna teorija gravitacije baš na području gdje je međuigra opće relativnosti i kvantne mehanike najizraženija: u blizini singulariteta.

B. Kvantna kompletnost

Probne čestice koje slijede vremenske ili svjetlosne geodezike igraju važnu ulogu u definiranju klasičnih singulariteta. Ipak, klasične čestice kao takve, ne postoje, što sugerira potrebu pronalaska bolje definicije singulariteta. Horowitz i Marolf [1] su, slijedeći rane Waldove radove [3], predložili postupak za korištenje kvantno-mehaničke čestice za testiranje singulariteta u statičnim prostorvremenima s klasičnom vremenolikom nepotpunosti.

* jdragase.phy@pmf.hr

Općenito, ako se kvantna čestica približi kvantnom singularitetu, valna joj se funkcija može mijenjati na neodređen način; može biti i apsorbirana ili drugačija čestica emitirana. Ovo je blisko definiciji klasičnih singulariteta kao krajnjih točaka geodezika, koje mogu utjecati na klasičnu česticu na proizvoljan način, neovisno o onome što prethodi u prostorvremenu. Horowitz i Marolf pokazali su da su neka prostorvremena s klasičnim vremenskim singularitetima također i kvantno mehanički singularna, dok druga pak nisu. Otad, brojni su radovi testirali dodatna statična i konformalno statična prostorvremena da vide hoće li uporaba kvantnih čestica "izliječiti" njihove klasične singularitete. Sažetak dosadašnjih rezultata može se vidjeti u Tablici I [4].

Da bismo bolje ilustrirali kvantne singularitete razmotrimo nerelativističku kvantnu mehaniku na ograničenom intervalu. Treba držati na umu da je ovaj sustav klasično singularan jer je njegovo 'prostorvrijeme' geodezijski nepotpuno. Možemo definirati Hamiltonijan H valnih funkcija koje glatko nestaju na granici. Ovaj operator je simetričan, ali još nije hermitski. Postoje proširenja ovog operatora na veću domenu koja su hermitska i koja odgovaraju različitim rubnim uvjetima. Jedno od ovih proširenja mora biti odabrano kako bi se kvantna stanja determisnistički evoluirala. Ovo je analogno tipičnom vremenolikom singularitetu u klasičnoj općoj relativnosti jer se i u ovom slučaju moraju odabrati rubni uvjeti u singularnoj točki. U oba slučaja, evolucija nije jedinstvena dok se ne specificiraju dodatne informacije. Možemo zamisliti drugu vrstu singulariteta u nerelativističkoj kvantnoj mehanici koja je više analogna prostornolikom singularitetu nego vremenolikom. Ako je H ovisan o vremenu i hermitski je za $t < t_0$, ali nije hermitski (ili uopće ne postoji) u $t = t_0$.

II. KLASIČNI I KVANTNI SINGULARITETI

Statično prostorvrijeme je kvantno-mehanički kompletno (nesingularno) ako je evolucija testnog npr. skalarnog, valnog paketa koji predstavlja kvantnu česticu, jedinstveno determinirana početnim stanjem valnog paketa, samom mnogostrukosti i metrikom, bez potrebe za stavljanjem dodatnih rubnih uvjeta na singularitet. Više tehnički, statično prostorvrijeme je kvantno-mehanički *singularno* ako prostorni dio relevantnog valnog operatora (u slučaju skalarnog valnog paketa, Klein-Gordonovog operatora) *nije* esencijalno hermitski na $C_0^\infty(\Sigma)$ (glatkim funkcijama kompaktnog nosača), u prostoru kvadratno integrabilnih funkcija $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, gdje je Σ prostorna hiperploha. Bitno je napomenuti da su singularne točke standardno isključene iz Σ. Uzmemo li statično prostorvrijeme s vremenolikim Killingovim poljem ξ^μ (gdje je t Killingov parametar), relativistička je skalarna čestica opisana Klein-Gordonovom jednadžbom $(\nabla^\mu\nabla_\mu - m^2)\psi = 0$ koju možemo napisati u obliku:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = VD^i(VD_i\psi) - V^2m^2\psi \tag{2}$$

gdje je $V^2 = -\xi^\mu\xi_\mu$, a D_a prostorna kovarijantna derivacija na Σ te definiramo prostorni operator $A := -VD^i(VD_i) + V^2m^2$. Relevantni Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ je prostor kvadratno integrabilnih funkcija na Σ, $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, sa skalarnim produktom jednakim umnošku volumnog elementa i V^{-1}. Ako je A definiran na kompaktnom nosaču od Σ, $C_0^\infty(\Sigma)$, tada je realan, pozitivan, simetričan i hermitska proširenja uvijek postoje. Ako postoji jedinstveno proširenje A_E, tada je A esencijalno hermitski. U tom slučaju dobivamo sljedeći oblik za Klein-Gordonovu jednadžbu slobodne čestice

$$i\frac{d\psi}{dt} = (A_E)^{1/2}\psi \tag{3}$$

čija su rješenja oblika $\psi(t) = \exp\left(-it(A_E)^{1/2}\right)\psi(0)$. Slijede izričaji dva uvjeta za određivanje kvantne kompletnosti prostorvremena.

Horowitz i Marlofov uvjet. - Također poznat kao von Neumannov uvjet deficijentnih indeksa, svodi se na proučavanje rješenja jednadžbe oblika $A\psi \pm i\psi = 0$ gdje je A prostorni Klein-Gordon operator. Provjerava se broj kvadratno integrabilnih rješenja za svaki od predznaka drugog člana jednadžbe. Za uspostavu esencijalne hermitičnosti, pa tako i kvantne kompletnosti prostorvremena, potrebno je pokazati da postoji jedno rješenje koje nije kvadratno integrabilno u blizini singulariteta.

Drugi je kriterij matematički malo kompliciraniji i mi ga nećemo koristiti u ostatku analize, već ćemo pratiti postupak Horowitza i Marlofa. Korišten je pak u novijim radovima koji se bave kvantnom kompletnošću jer ga je u nekim slučajevima lakše primijeniti.

A. Weylov uvjet za esencijalnu hermitičnosti operatora

Uzmimo Klein-Gordon jednadžbu u sljedećem obliku:

$$|g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2}g^{\mu\nu}\Phi_{,\nu}\right)_{,\mu} = M^2\Phi \tag{4}$$

koja za statične, sferično-simetrične metrike ima rješenja oblika $\Phi \sim \exp(-i\omega t)F(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ Uz standardne oznake za sferične koordinate i sferne harmonike. Tada se uz separaciju varijabli radijalni dio jednadžbe može napisati u obliku jednodimenzijalne Schrödingerove jednadžbe $\left(-d^2/dx^2 + V(x)\right)u(x) = Eu(x)$ (gdje se singularitet nalazi u $x = 0$).

Uvedimo sljedeće pojmove:

Definicija II.1. *Potencijal $V(x)$ je **u graničnom kolu** u $x = 0$ ako su za neki E sva rješenja Klein-Gordon jednadžbe kvadratno integrabilna u nuli. Ako $V(x)$ nije u graničnom kolu onda je **u graničnoj točki**.*

Definicija je analogna za potencijal u beskonačnosti. U kojem se od ova dva slučaja nalazi potencijal određuje jesu li rješenja Schrödingerove jednadžbe jedinstvena.

Ako je samo jedno rješenje kvadratno integrabilno, onda je ono jedinstveno. *Kvantni singularitet je prisutan ako rješenja nisu jedinstvena, tj. ako su u graničnom kolu.*

Najavljeni kriterij za određivanje esencijalne hermitičnosti operatora dao je Weyl [5] u obliku sljedećih korisnih teorema.

Teorem II.2. *(Weylov kriterij granične točke i graničnog kola) Neka je $V(x)$ kontinuirana realna funkcija definirana na intervalu $(0,\infty)$. Tada je $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ esencijalno hermitski na $C_0^\infty(0,\infty)$ ako i samo ako je $V(x)$ u graničnoj točki i u 0 i u beskonačnosti.*

Teorem II.3. *Neka je $V(x)$ kontinuirana realna funkcija definirana na intervalu $(0,\infty)$ i neka postoji pozitivna derivabilna funkcija $M(x)$ takva da*
(i) $V(x) \geq -M(x)$
(ii) $\int_1^\infty (M(x))^{-1/2} dx = \infty$
(iii) $M'(x)/(M(x))^{3/2}$ je ograničena.
Tada je $V(x)$ u graničnoj točki u beskonačnosti.

Teorem II.4. *Neka je $V(x)$ kontinuirana pozitivna u blizini nule. Ako je $V(x) \geq 3/4 x^{-2}$ u blizini nule, tada je $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ u graničnoj točki u nuli. Ako je za neki $\epsilon \geq 0$, $V(x) \leq (3/4-\epsilon)x^{-2}$ u blizini nule, tada je $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ u graničnom kolu.*

Što znači da je potencijal *u graničnoj točki* ako je dovoljno odbojan u ishodištu, tako da jedno od rješenja Schrödingerove jednadžbe divergira dovoljno brzo da nije kvadratno integrabilno. Slična se analiza može provesti i za konformalno statična prostorvremena.

B. Vodikov atom

U svrhu boljeg razumijevanja napomenut ćemo i da je vodikov atom dobar primjer klasično singularnog problema koji je kvantno kompletan. Ako promatramo slobodnu, nerelativističku kvantnu česticu na Riemannovoj mnogostrukosti (M,g), njezin Hilbertov prostor sastoji se od kvadratno integrabilnih funkcija na M s invarijantnim volumnim elementom kao mjerom. Hamiltonijan je u ovom slučaju proporcionalan Laplacijanu (na M). Ako je metrika g geodezijski kompletna tada Laplacijan ima jedinstvenu hermitsku ekstenziju (*esencijalno je hermitski*), što znači da klasična kompletnost povlači kvantnu kompletnost. Izvod ovog važnog zaključka dan je u [6].

Sada ćemo kratko provjeriti da je vodikov atom primjer slučaja kada imamo geodezijski nepotpunu metriku, ali Laplacijan je svejedno jedinstven i hermitski. Metrika koju proučavamo je sljedeća:

$$ds^2 = dr^2 + R^2(r) d\Omega^2 \tag{5}$$

gdje je $d\Omega^2$ metrika na sferi. Za domenu Laplacijana prirodno uzimamo da se sastoji od glatkih funkcija s kompaktnim nosačem svugdje osim u ishodištu gdje pretpostavljamo postojanje singulariteta. Zanima nas je li rezultirajući operator esencijalno hermitski. Kao što je opisano na kraju 8. poglavlja te u 10. poglavlju [7], promatramo rješenja jednadžbe oblika $D^2\psi \pm i\psi = 0$. Separacijom varijabli $\psi = f(r)Y(\theta,\phi)$ dobivamo radijalnu jednadžbu

$$f'' + \frac{2R'}{R} f' - \frac{c}{R^2} f \pm i f = 0 \tag{6}$$

uz standardnu notaciju za derivaciju te $c \geq 0$ svojstvene vrijednosti negativnog Laplacijana na sferi. Sada je, ponovno po [7], dovoljno pokazati da za svaki odabir c i svaki odabir predznaka posljednjeg člana jednadžbe, postoji jedno rješenje koje nije kvadratno integrabilno u blizini ishodišta. Vidimo da je dovoljno promatrati $c = 0$ slučaj jer povećanje c uzrokuje bržu divergenciju rješenja u $r = 0$. Uzmimo sada da je $R = r^p$, tada su rješenja oblika $f = r^\alpha$ gdje je $\alpha = 0, 1-2p$. Zaključujemo da za $p \geq 3/2$ drugo rješenje nije kvadratno integrabilno (uz volumni element oblika $r^{2p} dr d\Omega$. Možemo zaključiti da su metrike ovog oblika, geometrijski analogoni vodikovog atoma, kvantno kompletne za $p \geq 3/2$, dok su klasično singularne za sve p osim $p = 1$.

C. Penroseov teorem o singularitetima

Po diferencijalno-geometrijskoj definiciji, prostorvrijeme (M,g) je glatko, ne sadrži singularne točke, one se izrezuju kako bi ostatak teorije bio prihvatljiv i koristan. Ovo izrezivanje ostavi granicu prostorvremena ∂M u obliku rupe u kojoj trajektorije mogu neželjeno završiti. Postavlja se pitanje kako to zaobići. Razni tretmani ovih objekata su predloženi, koji definiraju različite vrsta fizikalno motiviranih rubnih uvjeta (npr. a-, b-, c-, g-granice). G-granice se koriste za standardno tretiranje singulariteta i kažu da je singularitet prisutan ako postoje nepotpuni geodezici ili krivulje omeđene akceleracije u maksimalno proširenom prostorvremenu. Ovakve singularitete predviđa i već spomenut Penroseov važan teorem kojeg ćemo ovdje iskazati.

Teorem II.5. *(Penroseov teorem o singularitetima) Ako povezano, globalno hiperbolično prostorvrijeme (M,g) sadrži nekompaktnu Cauchyjevu hiperplohu Σ i zatvorenu, buduće zarobljenu plohu; te ako je za u_μ svjetlosnog tipa zadovoljen uvjet konvergencije $R_{\rho\nu} u^\rho u^\nu \geq 0$ tada postoje buduće-nepotpuni svjetlosni geodezici pa je prostorvijeme singularno.*

Sva terminologija za razumijevanje teorema te njegov dokaz, nalaze se u Dodatku A.

Tablica I. Istraženi singulariteti [4, 8, 9].[a]

Metrika ds^2 ili imenovana PV	Dodatne informacije	Klasični singularitet	Kvantni singularitet prisutan (proba)
$e^{2t}(-dt^2 + dr^2 + G^2(r)d\Omega^2)$	$G^2(r) = \frac{1}{4}[1 + p - (1-p)e^{-2r}](e^{2r} - 1)$	$r = 0$, $0 < p < 1$, vremenolik, skalarni	$V(x) = (l^2 + l + 1)/px$, $\xi = 1/2$; $V(x) = (-1 + 2\xi)/4x^2$, inače; Za $\xi < 2$ (skalar)
$(-t + b)^{1/2}[-(1 - 2/r)^{\alpha}dt^2 + (1 - 2/r)^{-\alpha}dr^2 + r^2(1 - 2/r)^{2(1-\alpha)d\Omega^2}]$	$\alpha = \pm\sqrt{3}/2$	$r = 2$, vremenolik, skalarni; $t = 0$, prosotrnolik, skalarni	$V(x) = \xi/2(1 \pm \sqrt{3}/2)/x^2(1 \mp \sqrt{3}/2)$; Za $\xi \leq (2 + \sqrt{3})/(1 - \sqrt{3}/2)$ (skalar)
$\lvert t/t_0\rvert^{4(h-2)}[-(1 - w/r)^{\alpha}dt^2 + (1 - w/r)^{-\alpha}dr^2 + r^2(1 - 2w/r)^{1-\alpha}d\Omega^2]$	$0 < \alpha \leq 3/4$, $\alpha \neq 1/2$, $0 < h \leq 6$, $h \neq 2$, $\alpha = (h + 1/2)^{1/2}$	$r = 2w$, $w \neq 0$, lokalno gol, vremenolik, skalarni	$V(x)$ dana s (31) iz [10], Za $\xi < 2(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ (skalar)
Globalni monopol	N/A	vremenolik	Da (masivni skalar)
Levi-Civita	σ, C	$r = 0$, vremenolik	Da (bezmaseni skalar)
$-dt^2/\cos\alpha + R^2d\alpha^2 + R^2\sin^2\alpha d\Omega^2$	(2+1)-dimenzionalno; $R = \sqrt{3\pi\rho_0/8}$	2-sfera, vremenolik, gol, skalarni	Da (masivni skalar)
Generalizirano Raychaudhuri	dislokacije i disklinacije	skalarni	Da (masivni skalar)
Potencijsko cilindrično simetrično	Dva tipa za različite parametre	$r = 0$, vremenolik, gol; $r = 0$, svjetlosni, gol	ovisno o parametrima Da i Ne (masivni skalar); Ne
S regularnim PV invarijantma nultog reda	invarijante višeg reda divergiraju	Nema ga (u smislu nepotpunih geodezika)	Ne
Konformalno ravno FRW	kozmička nit	$t = 0$, prostornolik, skalarni; vremenolik, kvaziregularan, kozmička nit	N/A; Da (masivni skalar)
sferno simetrično, konformalno statično	nalik Robertsovom	vremenolik, skalarni	Da (masivni skalar)
$e^{2t}[-g_1(u)dt^2g_2(u)du^2 + e^{2u}d\Omega^2]$	$g_1(u) = 1$, $g_2(u) = u^n$, $n > -2$	$u = 0$, dinamičan, vremenolik	Ne za $-1 \geq n > -2$ (bezmaseni skalar)
Schwarzschild	unutrašnjost dinamična	$r = 0$, prostornolik	Ne! (skalarna polja u osnovnom stanju)
Kerr	$a > M$	prstenast, skalarni, vremenolik	Ne! (masivni skalar)
Lovelockova gravitacija trećeg reda	N/A	gol, vremenolik	Ne (masivni skalar)
Razna (2+1)-dimenzionalna PV	BTZ, nabijeni BTZ, EPM, potencijska EPM	gol, vremenolik	Da (Dirac); Ne (skalar)

[a] U prva tri reda su u zadnjoj koloni definirani $V(x)$ kao u II.2 i korišten tamo iskazan teorem.

Važno je napomenuti da definiranje singulariteta nije ovako čisto. Singularitet je u praksi najlakše vidljiv u divergencijama prostornovremenskih invarijanti (skalara) i elemenata Riemannovog tenzora. Klasifikacija s obzirom na ove divergencije je ustaljena u literaturi [11], te se singulariteti najgrublje dijele na kvaziregularne, neskalarne i skalarne (zakrivljenosti). Međutim, uzročno-posljedični odnos između ove klasifikacije i geodezijske nepotpunosti nije posve jasan.

Singularna točka q maksimalno proširenog prostorvremena je C^k *kvaziregularna* za $k \geq 0$ ako su sve komponente i odgovarajuće derivacije Riemannovog tenzora, evaluirane u ortonormalnoj bazi, paralelno propagirane uzduž nepotpunog geodezika koji završava u q, tipa C^0, tj. te komponente i derivacije imaju konačne limese ili su omeđene. S druge strane singularna točka q je C^k *singularitet zakrivljenosti* ako neke komponente ili derivacije nisu tako omeđene. Ako su pak svi *skalari* u metrici

g_{ab}, antisimetričnom tenzoru η_{abcd} i Riemannovom tenzoru i njegovim derivacijama $R_{abcd;e_1e_2...e_k}$, omeđeni ili imaju konačne limese tada je ovaj singularitet zakrivljenosti *nesklalarni.* Ako bilo koji skalar pak divergira tada je singularitet zakrivljenosti *skalarni.*

Prostorvremena sa singularitetima skalarne zakrivljenosti uključuju Schwarzschildovo, Reissner-Nordstromovo, Kerr-Newmannovo, Friedmann-Robertson-Walkerovu kozmologiju i "budući" dio većine prostorvremena sudarajućih ravnih valova. Prostorvremena sa neskalarnim singularitetima su primjerice "whimper" kozmologiju i singularne ravne valove. Prostorvremena s kvaziregularnim singularitetima uključuju kozmologije tipa Taub-NUT, idealiziranih kozmičkih niti i neke "naborane" singularitete u prostorvremenima sudarajućih ravnih valova.

III. KVANTNA KOMPLETNOST SINGULARITETA NABIJENE DILATONSKE CRNE RUPE

Ovdje pratimo članak Horowitza i Marlowa [1] kako bismo ispitali kvantnu kompletnost jednog singularnog prostorvremena. Kao što smo više puta naglasili, zanima nas metrika koja je geodezijski nepotpuna te provjeravamo posjeduje li jedinstveni hermitski Hamiltonijan (tj. Laplacijan u slučaju slobodne čestice) za skalarnu kvantnu probu. Znači ispitujemo je li Klein-Gordon prostorni operator A esencijalno hermitski.

Promatramo općenitu statičnu sferičnu metriku:

$$ds^2 = -V^2(r)dt^2 + V^{-2}dr^2 + R^2(r)d\Omega^2 \tag{7}$$

Sada pogledajmo jednadžbu $A\psi \pm i\psi = 0$ i separirajmo varijable $\psi = f(r)Y(\theta, \psi)$. Tada u nekoliko koraka dobijemo sljedeću radijalnu jednadžbu:

$$f'' + \frac{(V^2R^2)'}{V^2R^2}f' - \frac{c}{V^2R^2}f - \frac{m^2}{V^2}f \pm i\frac{f}{V^4} = 0 \tag{8}$$

gdje je $c \geq 0$ svojstvena vrijednost negativnog Laplacijana na sferi.

Operator A će biti esencijalno hermitski ako jedno od dva rješenja ove jednadžbe (za svaki predznak imaginarnog člana) nije kvadratno integrabilno s obzirom na mjeru R^2V^{-2} u blizini $r = 0$ gdje se nalazi singularitet. Nadalje možemo promatrati samo bezmaseni slučaj iz sljedećeg razloga. Ako jedno od rješenja nije kvadratno integrabilno u blizini ishodišta za bezmaseni slučaj, tada se dodavanjem negativnog člana $-\frac{m^2}{V^2}f$ ponaša poput odbojnog potencijala u kvantnoj mehanici pa jedno od rješenja u ishodištu još brže pada u nulu, a drugo brže divergira. Stoga vidimo da esencijalna hermitičnost A u bezmasenom slučaju povlači isto to svojstvo za sve $m \geq 0$.

Nabijene dilatonske crne rupe su ekstremi sljedeće akcije:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(R - 2(\nabla\phi)^2 - e^{-2a\phi}F^2\right) \tag{9}$$

gdje je ϕ dilatonsko polje, F Maxwellovo polje, a a konstanta koja kontrolira snagu dilatona. Sada je metrika dana s 7, uz:

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-a^2}{1+a^2}} \\ R^2 &= r^2\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2a^2}{1+a^2}} \end{aligned} \tag{10}$$

tada je

$$V^2R^2 = (r - r_+)(r - r_-) \tag{11}$$

nezavisno od a. Ovakva metrika opisuje prostorvrijeme crne rupe s horizontom događaja na $r = r_+$ i singularitetom u $r = r_-$ (za $r_+ > r_-$ i $a \neq 0$).

Ekstremalni limes u kojem $r_+ = r_-$ opisuje statično prostorvrijeme sa skalarnim singularitetom u $r = r_+$ koji je Vremenolik za $a > 1$ (dok je za $a \leq 1$ svjetlosnog tipa) i želimo vidjeti je li tada A esencijalno hermitski. Neka je $\rho = r - r_+$, tada je $V^2R^2 = \rho^2$. Kako je $a > 1$ i $V^2 > \rho$, imaginarni se član u 8 može zanemariti. Vidimo da se rješenje u blizini singulariteta $\rho = 0$ tada ponaša kao $f = \rho^\alpha$ s $\alpha \leq -1$. Promatramo najmanje divergentno rješenje $\alpha = -1$ koje odgovara $c = 0$. Iz 10 dobivamo sljedeću normu rješenja:

$$\langle f|f\rangle = \int d\rho\rho^{-4/(1+a^2)} \tag{12}$$

koje divergira u blizini $\rho = 0$ za $a^2 \leq 3$ pa nije kvadratno integrabilno. Stoga vidimo da su ekstremalne dilatonske crne rupe primjeri statičnih prostorvremena s vremenolikim singularitetima za koje se kvantne skalarne probe ponašaju nesingularno! Međutim za $a^2 > 3$ niti ova analiza ne isključuje singularno ponašanje valnih paketa.

A. Raspršenje

Još nismo komentirali mogućnost da valni paket ostane lokaliziran u blizini singulariteta što bi uzrokovalo neunitarnost S matrice raspršenja. Očekujemo da se ovo dogodi u slučaju singulariteta svjetlosnog tipa s obzirom na činjenicu da je potrebno beskonačno koordinatno vrijeme da čestica dostigne singularitet. Mi ćemo nadalje provesti analizu za vremenolike singularitete.

I dalje koristimo sferno-simetričnu metriku 7 s vremenolikim singularitetom u ishodištu. S obzirom da su energija i kutna količina gibanja očuvani pri raspršenju (zbog sferne-simetričnosti metrike i njene neovisnosti o vremenu), ponovno se koncentriramo na radijalnu komponentu valne funkcije koja (zbog činjenice da su svojstvena stanja $A_E^{1/2}$ ujedno i svojstvena stanja A_E) glasi:

$$f'' + \frac{(V^2R^2)'}{V^2R^2}f' - \frac{c}{V^2R^2}f - \frac{m^2}{V^2}f + \frac{Ef}{V^4} = 0 \tag{13}$$

Sljedeće uzimamo u obzir slučaj kada je $R = r^p$, $V = r^q$ u blizini ishodišta te $c = m = 0$. Za vremenoliki singularitet mora vrijediti $q < 1/2$ pa je posljednji član u 13 zanemariv u blizini ishodišta. Stoga su rješenja oblika $f = r^\alpha$ gdje je $\alpha = 0, 1 - 2q - 2p$. Prisjetimo se da kako singularitet ne bi utjecao na kvantne probe, mora vrijediti da rješenje $r^{1-2(q+p)}$ nije kvadratno integrabilno u blizini $r = 0$. S obzirom da mjera ima oblik $R^2 V^{-2} dr$, tj. $r^{2(p-q)}$ u blizini ishodišta, vremenolikost singulariteta ($q < 1/2$) garantira kvadratnu integrabilnost rješenja oblika r^0. Slično kao u prethodnom razmatranju, za slučaj kada c i m^2 nisu nula jednadžba dobiva član koji djeluje kao odbojni potencijal što uzrokuje bržu divergenciju singularnog rješenja te brže iščezavanje manje singularnog rješenja. Slijedi da je za sve $c \geq 0$ i $m^2 \geq 0$ postoji samo jedno fizikalno rješenje jednadžbe 13. Ovo povlači unitarnost S matrice.

IV. ZAKLJUČAK

U ovom seminaru proučavali smo kvantne i klasične singulariteta u općoj teoriji relativnosti. Dali smo uvod u prirodu singulariteta te predočili glavne rezultate u njihovom istraživanju, ključno, iskazivanjem Penroseovog teorema o singularitetima. Dali smo i dva uvjeta koja se koriste za određivanje prisutnosti kvantnih singulariteta, Horowitz i Marlofov te Weylov. Na kraju smo proveli dva izvoda kao primjere provjere kvantne prirode jednog singulariteta po članku Horowitza i Marlofa[1] te zaključili da kvantna kompletnost dilatonske ekstremalne crne rupe ovisi o parametru a koji kontrolira snagu (*"coupling strength"*) dilatona. A važni zaključci o nekim proučavanim singularitetima dani su u Tablici I.

[1] G. T. Horowitz and D. Marolf, Quantum probes of spacetime singularities, Phys. Rev. D **52**, 5670 (1995).

[2] R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).

[3] R. M. Wald, Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times, Journal of Mathematical Physics **21**, 2802 (1980), https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/21/12/2802/19003380/2802_1_online.pdf.

[4] D. A. Konkowski and T. M. Helliwell, Quantum healing of spacetime singularities: A review, Modern Physics Letters A **33**, 1830002 (2018), https://doi.org/10.1142/S0217732318300021.

[5] H. Weyl, Über gewöhnliche differentialgleichungen mit singularitäten und die zugehörigen entwicklungen willkürlicher funktionen. (mit 1 figur im text), Mathematische Annalen **68**, 220 (1910).

[6] P. R. Chernoff, Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations, Journal of Functional Analysis **12**, 401 (1973).

[7] R. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Theoretical and Mathematical Physics (Springer Berlin Heidelberg, 2012).

[8] D. A. Konkowski and T. M. Helliwell, Understanding singularities — classical and quantum, International Journal of Modern Physics A **31**, 1641007 (2016), https://doi.org/10.1142/S0217751X16410074.

[9] D. A. Konkowski and T. M. Helliwell, Quantum singularities in static and conformally static space-times, International Journal of Modern Physics A **26**, 3878 (2011), https://doi.org/10.1142/S0217751X11054334.

[10] T. M. Helliwell and D. A. Konkowski, Quantum singularities in spherically symmetric, conformally static spacetimes, Phys. Rev. D **87**, 104041 (2013).

[11] G. F. R. Ellis and B. G. Schmidt, Singular space-times, General Relativity and Gravitation **8**, 915 (1977).

[12] R. M. Wald, *General Relativity* (The University od Chicago Press, 1984).

[13] J. M. M. Senovilla and D. Garfinkle, The 1965 penrose singularity theorem, Classical and Quantum Gravity **32**, 124008 (2015).

Dodatak A: Dokaz Penroseovog teorema o singularitetima [12, 13]

U daljnjim koracima ćemo što konciznije definirati sve termine koji su nam potrebni za dokaz Penroseovog teorema te potom i dokazati sam teorem.

Definirajmo prvo termin *stabilno kauzalnog* prostorvremena.

Definicija A.1. *Za prostorvijeme* (M, g) *kažemo da je stabilno kauzalno ako postoji glatka funkcija* $t\colon M \to \mathbb{R}$ *takva da je* ∇t *vremenoliko.*

Sada možemo definirati i *globalno hiperbolično* prostorvrijeme.

Definicija A.2. *Za stabilno kauzalno prostorvrijeme koje posjeduje vremensku funkciju čije su izoplohe Cauchyjeve hiperplohe kažemo da je globalno hiperbolično.*

Sljedeće je potrebno definirati *konjugirane točke* hiperplohe. U globalno hiperboličnom prostorvremenu (M, g), neka je S Cauchyjeva hiperploha s jediničnim normalnim vektorskim poljem n usmjerenim prema budućnosti. Nadalje, neka je $\Sigma \subset S$ kompaktna dvodimenzionalna podmnogostrukost s jediničnim normalnim vektorskim poljem ν unutar S usmjerenim prema budućnosti. Tada, za c_p svjetlosni geodezik s početnim uvjetom $n_p + \nu_p$ za svaku točku $p \in \Sigma$, definiramo glatko preslikavanje $\exp\colon (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \to M$ za neki $\epsilon > 0$ kao $\exp(r, p) := c_p(r)$.

Definicija A.3. *Za kritične točke funkcije* exp *se kaže da su konjugirane točke od* Σ. *To su točke u kojima se geodezici, koji počinju u bliskim točkama ortogonalno na* Σ*, skoro presijecaju.*

Neka $q = \exp r_0, p$ nije konjugirana naspram Σ. Ako je ϕ lokalna parametrizacija od Σ u okolini p, tada možemo konstruirati lokalni koordinatni sustav (u, r, x^2, x^3)

na nekom otvorenom skupu $U \ni q$ pomoću preslikavanja $(u, r, x^2, x^3) \mapsto \exp(r, \psi_u(\phi(x^2, x^3)))$, gdje je ψ_u tok uzduž vremenolikih geodezika okomitih na S, a preslikavanje $\exp\colon (-\epsilon, \epsilon) \times \psi_u(\Sigma) \to M$ definirano kao prije. S obzirom na to da je $\frac{\partial}{\partial r}$ tangentno na svjetlosne geodezike, slijedi da je $g_{rr} = 0$. Nadalje imamo i:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{r\mu}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 0 \end{aligned} \tag{A1}$$

A s obzirom da imamo $g_{ru} = -1$ te $g_{r2} = g_{r3} = 0$ na $\psi_u\Sigma$, isti izrazi vrijede i na U pa možemo napisati metriku u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} g = \alpha du \otimes du - du \otimes dr - dr \otimes du + \\ + \sum_{i=2}^{3} \beta_i (du \otimes dx^i + dx^i \otimes du) + \sum_{i,j=2}^{3} \gamma_{ij} dx^i \otimes dx^j \end{aligned} \tag{A2}$$

što daje determinantu metrike:

$$\det g = \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \beta_3 & 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \tag{A3}$$

Slijedi da je $\det(g) < 0$ pa funkcije $\gamma_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$ formiraju pozitivno definitnu matricu te g inducira Riemannovu metriku na dvodimenzionalnim prostornolikim plohama $\exp(r, \psi_u(\Sigma))$.

Sada imamo sve potrebno kako bismo mogli izvesti pojam *ekspanzije svjetlosnih geodezika.* Nakon izračunavanj Christoffelovih simbola dobivamo radijalnu komponentu Riccijevog tenzora:

$$R_{rr} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{i,j=2}^{3} \gamma^{ij}\beta_{ij}\right) - \sum_{i,j,k,l=2}^{3} \gamma^{jk}\gamma^{il}\beta_{ki}\beta_{lj} \tag{A4}$$

gdje je $\beta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial r}$. Ekspanzija svjetlosnih geodezika dana je s:

$$\begin{aligned} \theta := \sum_{i,j=2}^{3} \gamma^{ij}\beta_{ij} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}((\gamma_{ij})^{-1}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial r}) = \\ = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\log\gamma = \frac{\partial}{\partial r}\log\gamma^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A5}$$

gdje je $\gamma = \det(\gamma_{ij})$. Znači, ekspanzija daje varijaciju elementa površine dvodimenzionalne plohe $\exp(r, \psi_u(\Sigma))$ te, važno, divergencija ekspanzije ukazuje na nultočku od γ što znači da postoji konjugirana točka od $\psi_u(\Sigma)$.

1. Energijski uvjet

Sljedeća važna komponenta teorema jest energijski uvjet na prostorvijeme. Slijedi definicija:

Definicija A.4. *Za prosotrvijeme (M, g) kažemo da zadovoljava nul energijski uvjet ako za Ricci tenzor vrijedi $\operatorname{Ric}(u, u) = R_{\rho\nu}u^\rho u^\nu \geq 0$ za bilo koje svjetlosno vektorsko polje u.*

Slijedi iskaz i dokaz važne leme:

Lema A.5. *Neka je (M, g) globalno hiperbolično prostorvijeme koje zadovoljava nul energijski uvjet, $S \subset M$ Cauchyjeva hiperploha, $\Sigma \subset S$ kompaktna dvodimenzionalna podmnogostrukost s jediničnim normalnim vektorskim poljem ν u S i $p \in S$ točka za koju vrijedi $\theta = \theta_0 < 0$. Tada svjetlosni geodezik c_p sadrži barem jednu točku koja je konjugirana točka od Σ, na udaljenosti afinog parametra najviše $-\frac{2}{\theta_0}$ od budućnosti od Σ.*

Dokaz. S obzirom na to da (M, g) poštuje nul energijski uvjet, vrijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \geq 0 \implies R_{rr} \geq 0 \implies \\ \implies \frac{\partial\theta}{\partial r} + \sum_{i,j,k,l=2}^{3} \gamma^{jk}\gamma^{il}\beta_{ki}\beta_{lj} \leq 0 \end{aligned} \tag{A6}$$

Sada odaberemo ortonormalnu bazu takvu da vrijedi $\gamma^{ij} = \delta^{ij}$ i sjetimo se da za $n \times n$ matrice vrijedi nejednakost $(\operatorname{Tr} A)^2 \leq n \operatorname{Tr}(A^t A)$, pa dobivamo:

$$\sum_{i,j,k,l=2}^{3} \gamma^{jk}\gamma^{il}\beta_{ki}\beta_{lj} = \sum_{i,j=2}^{3} \beta_{ji}\beta_{ij} = \operatorname{Tr}(\beta^t\beta) \geq \frac{1}{2}\theta^2 \tag{A7}$$

pa θ mora zadovoljavati $\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{2}\theta^2 \leq 0$, iz čega integracijom dobivamo $\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{r}{2}$. Stoga za $r = -\frac{2}{\theta_0}$ slijedi $\frac{1}{\theta} \geq 0 \implies \theta \to \infty$. Pa, s obzirom na to da ekspanzija divergira u točki, element površine γ postaje nula što kao posljedicu ima da svjetlosni geodezik c_p posjeduje barem jednu konjugiranu točku na Σ. $\square$

2. Kauzalna budućnost

Posljednji element koji nam je potreban za provedbu dokaza Penroseovog teorema jest koncept kronološke i kauzalne budućnosti. Prvo dajemo sljedeće definicije:

Definicija A.6. *Točka p kronološki prethodi točki q ($p << q$) ako postoji vremenolika kronološka krivulja usmjerena u budućnost između p i q. Kronološka budućnost točke $p \in M$ je skup $I^+(p)$ svih točaka do kojih p može biti povezana pomoću vremenolikih krivulja usmjerenih u budućnost, $I^+(p) := \{p \in M | p << q\}$*

Definicija A.7. *Točka p kauzalno prethodi točki q ($p < q$) ako postoji kauzalna kronološka krivulja usmjerena u budućnost između p i q. Kronološka budućnost točke $p \in M$ je skup $J^+(p)$ svih točaka do kojih p može biti povezana pomoću kauzalnih krivulja usmjerenih u budućnost, $J^+(p) := \{p \in M | p << q\}$*

Definicija A.8. *Kronološka budućnost kompaktne plohe Σ je unija kronoloških budućnosti svake točke plohe, $I^+(\Sigma) := \bigcup_{p\in\Sigma} I^+(p)$*

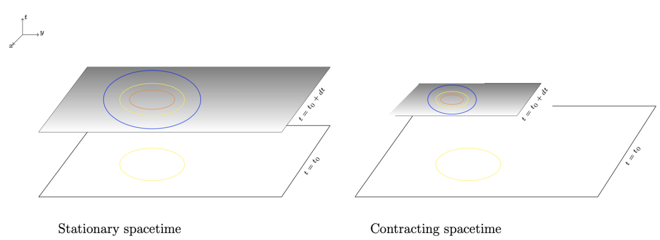
Definicija A.9. *Kauzalna budućnost kompaktne plohe Σ je unija kauzalnih budućnosti svake točke plohe, $J^+(\Sigma) := \bigcup_{p\in\Sigma} J^+(p)$*

Vidimo da je skup $I^+(\Sigma)$ otvoren dok je $J^+(\Sigma)$ zatvoren. Bez dokaza statiramo da za $p \in M$ i $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ svaka kauzalna krivulja usmjerena u budućnost koja povezuje p i q mora biti reparametrizirani svjetlosni geodezik.

Slijedi iskaz važne leme koja kaže da čak i svjetlosni geodezici usmjereni u budućnost okomiti na Σ, mogu ući u kronološku budućnost od Σ:

Lema A.10. *Neka je (M, g) globalno hiperbolično prostorvrijeme, S Cauchyjeva hiperploha s jediničnim normalnim vektorskim poljem usmjerenim u budućnost n, $\Sigma \subset S$ kompaktna dvodimenzionalna podmnogostrukost s jediničnim normalnim vektorskim poljem ν u S, $p \in \Sigma$, c_p svjetlosni geodezik kroz p s početnim uvjetom $n_p + \nu_p$ i $q = c_p(r)$ za neki $r > 0$. Ako c_p ima konjugiranu točku između p i q tada vrijedi $q \in I^+(\Sigma)$.*

3. Dokaz teorema



Slika 1. [13] Zatvorena buduće zarobljena ploha s jednom dimenzijom potisnutom. U stacionarnoj situaciji (lijevo), izvorna sfera predstavljena u $t = t_0$ presjeku kao žuti krug šalje svjetlosne signale u radijalnom smjeru. Bljeskovi formiraju dvije nove sfere nakon malog vremena dt prikazane crvenim (ulaznim) i plavim (odlaznim) krugovima. Površina prve (posljednje) je manja (veća) od površine izvorne površine, koja ostaje konstantna u vremenu. Ako se pak svemir skuplja, kao na desnoj strani slike, i plava i crvena ploha mogu imati površine manje od onih na izvornoj površini u početnom trenutku. Tada kažemo da je ploha buduće zarobljena.

Iskažimo još dvije definicije klasične singularnosti prostorvremena:

Definicija A.11. *Za prostorvrijeme $(M.g)$ kažemo da je singularno ako nije geodezijski potpuno.*

te važan koncept *zarobljene plohe* intuitivno ilustriran na Slici 1

Definicija A.12. *Neka je (M, g) globalno hiperbolično prostorvrijeme, S Cauchyjeva hiperploha s jediničnim normalnim vektorskim poljem usmjerenim u budućnost n. $\Sigma \subset S$ kompaktna dvodimenzionalna podmnogostrukost s jediničnim normalnim vektorskim poljem ν u S je zarobljena ako su ekspanzije θ^+ i θ^- svjetlosnih geodezika s početnim uvjetima $n + \nu$ i $n - \nu$, obje negativne svuda na Σ.*

Na posljetku dokazujemo Penroseov teorem:

Teorem A.13. *Ako povezano, globalno hiperbolično prostorvrijeme (M, g) sadrži nekompaktnu Cauchyjevu hiperplohu Σ i zatvorenu, buduće-zarobljenu plohu; te ako je za u_μ svjetlosnog tipa zadovoljen uvjet konvergencije $R_{\rho\nu}u^\rho u^\nu \geq 0$ tada postoje buduće-nepotpuni svjetlosni geodezici pa je prostorvijeme singularno.*

Dokaz. Neka je $t\colon M \to \mathbb{R}$ globalna vremenska funkcija takva da $S = t^{-1}(0)$. Integralne krivulje od ∇t presijecaju S točno jedanput i $\partial I^+(\Sigma)$ najviše jedanput jer su vremenolike. Sada možemo definirati injekciju $\pi\colon \partial I^+(\Sigma) \to S$ s otvorenom slikom. Ako je $q = \pi(p)$, tada sve točke u okolini q su slike točki unutar $\partial I^+(\Sigma)$, jer bi inače postojao niz $q_n \to q$ takav da integralne krivulje ∇t kroz q_n ne presijecaju $\partial I^+(\Sigma)$. Ako su r_n sjecišta ovih krivulja i Cauchyjeve hiperplohe $t^{-1}(t(r))$ za neku točku r u budućnosti od p uzduž integralne krivulje polja ∇t, imali bismo $r_n \to r$ pa tako i $r_n \in \partial I^+(\Sigma)$ za dovoljno velik n što dovodi do kontradikcije. S obzirom na to da je Σ zarobljena, postoji $\theta < 0$ takav da su ekspanzije θ^+ i θ^- svjetlosnih geodezika okomite na Σ obje zadovoljavaju $\theta^+, \theta^- \leq 0$. Pokazat ćemo da postoji svjetlosni geodezik usmjeren prema budućnosti okomit na Σ koji ne može biti produljen do afginog parametra većeg od $r_0 = -\frac{2}{\theta_0}$ u budućnosti od Σ.

Pretpostavimo suprotno. Tada bi po Lemi A.5 bilo koji svjetlosni geodezik ortogonalan na Σ imao konjugiranu točku na udaljenosti po afinom parametru od najviše r_0 u budućnosti od Σ, nakon čega bi se našao u $I^+(\Sigma)$ po Lemi A.10. Posljedično, $\partial I^+(\Sigma)$ bi bio zatvoreni podskup od kompaktnog skupa $\exp^+([0, r_0] \times \Sigma) \cup \exp^-([0, r_0] \times \Sigma)$ gdje su $\exp^+$ i $\exp^-$ eksponencijalna preslikavanja konstruirana pomoću jediničnih normala ν i $-\nu$, pa bi tako $\partial I^+(\Sigma)$ i sam bio kompaktan. S obzirom na to da je $\partial I^+(\Sigma)$ kompaktan, njegova bi slika naspram π također bila kompaktna, ynači istovremeno zatvorena i otvorena. Kako je M povezan i S bi bio povezan, slika od π bi bila S koji bi tada bio homeomorfan s $\partial I^+(\Sigma)$ koji je kompaktan. Ali po preptostavci S nije kompaktan te dolazimo u kontradikciju. $\square$