

Perturbacija Schwarzschildove metrike i kvazinormalni modovi

Karlo Novak

mentor: Tajron Jurić

Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb

Sažetak

U ovom seminaru bavim se izvođenjem Regge-Wheelerovog i Zerillijevog potencijala, te linearnim perturbacijama Schwarzschildove metrike. Nakon toga uvodim pojam kvazinormalnih modova (QNM), koji se koriste za opis stabilizacije metrike nakon perturbacija. Cilj seminara je pružiti matematički rigorozan pregled i jasnu interpretaciju teorijskih osnova kvazinormalnih modova, s naglaskom na njihovu važnost u stabilnosti Schwarzschildove metrike.

I. Uvod

Opća teorija relativnosti, koju je formulirao Albert Einstein 1915. godine, revolucionirala je naše razumijevanje gravitacije opisujući je kao zakrivljenost prostorvremena uzrokovanu masom i energijom. Jedno od najintrigantnijih predviđanja ove teorije je postojanje crnih rupa, područja prostorvremena s gravitacijskim poljima toliko snažnima da ništa, pa čak ni svjetlost, ne može pobjeći iz njih. Bit opće relativnosti matematički je sažeta u Einsteinovim jednadžbama polja:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

gdje je $G_{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor koji opisuje zakrivljenost prostorvremena, Λ je kozmološka konstanta, $T_{\mu\nu}$ je tenzor energije-impulsa, $g_{\mu\nu}$ je metrički tenzor prostor-vremena.

Netrivijalno rješenje Einsteinovih jednadžbi u vakuumu ($T_{\mu\nu} = 0$) i $\Lambda = 0$ je Schwarzschildova metrika koja opisuje nerotirajuću i nenabijenu crnu rupu. Ovo rješenje ima ključnu ulogu u razvoju našeg teorijskog i opažackog razumijevanja crnih rupa.

Razumijevanje dinamike i stabilnosti crnih rupa s obzirom na perturbacijama je bitno jer nam pruža uvide u gravitacijske valove koji nastaju tijekom astrofizičkih procesa koji uključuju crne

rupe, poput spajanja ili upadanja materije. Perturbacijska teorija ovdje služi kao temeljni alat. Uvođenjem malih smetnji u prostorvremensku metriku crne rupe možemo proučavati kako se sustav razvija i ostaje li stabilan ili pokazuje nestabilnosti koje bi mogle dovesti do nove fizike.

Pionirski rad Reggea i Wheelera [1] uveo je metodu za analizu stabilnosti Schwarzschildove crne rupe razdvajanjem perturbacija na one s neparnim paritetom (aksijalne) i one s parnim paritetom (polarne). Izveli su tzv. Regge-Wheelerovu jednadžbu za perturbacije s neparnim paritetom, pokazujući da te modove ne karakterizira nestabilnost. Međutim, analiza perturbacija s parnim paritetom zahtijevala je daljnji razvoj. Zerilli [2] je proširio ovaj okvir izvedući tzv. Zerillijevu jednadžbu, koja opisuje perturbacije s parnim paritetom i potvrdio stabilnost Schwarzschildovog rješenja i za te modove.

Važan aspekt perturbacija crnih rupa je emisija gravitacijskog zračenja [3]. Kada čestica upada u crnu rupu ili kada se dvije crne rupe spajaju, sustav emitira gravitacijske valove koji prenose informacije o dinamici prostorvremena. Zerilli [4] je analizirao gravitacijsko polje čestice koja upada u Schwarzschildovu crnu rupu koristeći tenzorske harmonike, pružajući vrijedne uvide u valne oblike koji bi se mogli očekivati u takvim događajima.

Značajan rezultat proučavanja perturbacija je predviđanje kvazinormalnih modova (QNMs) [5]. To su karakteristične oscilacije crnih rupa koje dominiraju signalom gravitacijskih valova tijekom "ringdown" faze nakon perturbacije. QNMs su definirani kompleksnim frekvencijama čiji realni dio predstavlja frekvenciju oscilacija, a imaginarni dio prigušenje zbog gubitka energije kroz gravitacijsko zračenje. Chandrasekhar i Detweiler [5] istražili su ove modove za Schwarzschildovu crnu rupu i otkrili da su diskretni i ovise isključivo o parametrima crne rupe, čime služe kao "otisak prsta" crne rupe.

Raspršenje gravitacijskih valova od strane Schwarzschildove crne rupe je još jedno ključno područje istraživanja. Razumijevanje kako upadno gravitacijsko zračenje interagira s potencijalom crne rupe pomaže u tumačenju signala zabilježenih pomoću opservatorija gravitacijskih valova. Efektivni potencijal izveden iz jednadžbi perturbacija utječe na raspršenje i apsorpciju valova, oblikujući opažene valne oblike. [6]

Ovaj rad ima za cilj napraviti pregled ovih temeljnih istraživanja kako bi pružio sveobuhvatno razumijevanje perturbacija, stabilnosti i QNM Schwarzschildovih crnih rupa. Počnimo s opisom perturbacija koji su uspostavili Regge, Wheeler i Zerilli [1]. Zatim ulazimo u analizu stabilnosti Schwarzschildovog rješenja perturbacijama s aksijalnim i polarnim modovima. Na kraju, raspravljamo o značaju QNM u kontekstu gravitacijske valne astronomije i njihovoj ulozi u potvrđivanju predviđanja opće relativnosti.

II. Perturbacije

A. Schwarzschildova metrika

Schwarzschildovo rješenje predstavlja najjednostavnije statičko i sferno-simetrično rješenje Einsteinovih jednadžbi u vakuumu ($T_{\mu\nu} = 0$ i $\Lambda = 0$). Ovo rješenje opisuje gravitacijsko polje oko nerotirajuće, nenabijene mase, poput crne rupe. Metrička forma Schwarzschildovog rješenja dana je sljedećim izrazom:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2} r \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2} r \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2)$$

gdje je M masa crne rupe, r radijalna koordinata (udaljenost od centra crne rupe), t vremenska koordinata te θ i ϕ kutne koordinate koje opisuju sferno-simetričnu geometriju.

Geometrijske značajke Schwarzschildove metrike:

1. Horizont događaja: dan je radijusom $r = 2M$, poznat i kao Schwarzschildov radijus. Ovo je granica izvan koje ništa, uključujući svjetlost, ne može pobjeći gravitacijskom privlačenju crne rupe. Matematički, pri $r \rightarrow 2M$, vremenska komponenta metrike g_{tt} postaje nula, dok radijalna komponenta g_{rr} divergira.
2. Singularitet: Točka $r = 0$ predstavlja singularitet, gdje zakrivljenost prostor-vremena postaje beskonačna. Ovaj singularitet je fizički nepristupačan jer je zaštićen horizontom događaja.
3. Ponašanje u ∞ : Na velikim udaljenostima ($r \rightarrow \infty$), Schwarzschildova metrika prelazi u ravnu Minkowski metriku:

$$ds^2 \rightarrow -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

što odražava činjenicu da gravitacijski utjecaj mase M slabi s udaljenosti.

Schwarzschildova metrika opisuje prostorvrijeme oko izoliranih astrofizičkih objekata poput crnih rupa ili masivnih zvijezda koje su sferno-simetrične. Horizont događaja igra ključnu ulogu u teoriji crnih rupa, djelujući kao granica izvan koje informacije ne mogu doprijeti do vanjskog promatrača. Ova metrika također omogućuje proučavanje orbitalne dinamike čestica i svjetlosnih zraka u jakim gravitacijskim poljima.

B. Perturbacije s aksijalnim i polarnim modovima

Prva stvar koja nas zanima pri formulaciji ovog problema jest sama stabilnost Schwarzschildove metrike na male perturbacije. Ovdje smo istražili ovo pitanje do članova prvog reda u odstupanjima od sferičnosti. U ovoj aproksimaciji, jednadžbe su linearne i moguće je analizirati poremećaj odgovarajućih modova i za svaki pronaći njegovu frekvenciju, realnu (stabilnost) ili imaginarnu (nestabilnost). Pronalazimo matematičke izraze za kompletan skup funkcija ove vrste, čijom se superpozicijom može predstaviti bilo koja proizvoljna mala perturbacija prvog reda koja zadovoljava odgovarajuće rubne uvjete.

Tipični mod smetnje ima kružnu frekvenciju ω . Ovdje je veličina ω parametar svojstvene vrijednosti koji se bira tako da smetnja zadovoljava radijalnu valnu jednadžbu s odgovarajućim rubnim uvjetima za mali i veliki r .

Perturbaciju metrike $g_{\mu\nu}$ označavamo dodatnim članom kao $h_{\mu\nu}$. Slijedi da iz $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ dobivamo $R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}$. Gdje su:

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta\Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\beta} + \delta\Gamma_{\mu\beta;\nu}^{\beta} \quad (3)$$

$$\delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(h_{\beta\nu;\gamma} + h_{\gamma\nu;\beta} - h_{\beta\gamma;\nu}). \quad (4)$$

Gdje je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ Christoffelovi simboli a $\Gamma_{\beta\gamma;\delta}^{\alpha}$ kovarijantna derivacija Christoffelovih simbola

Iako $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ nije tenzor, njegova varijacija jest tenzor. Stavljanjem jednadžbe (4) u (3), dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda za $h_{\mu\nu}$ iz uvjeta $\delta R_{\mu\nu} = 0$. Ova jednadžba je generalizacija Schrödingerove jednadžbe za bezmasenu česticu sa spinom 2 u zakrivljenom prostoru.

Analiza pomoću sfernih harmonika

Prvo separiramo rješenje na produkt od četiri faktora, svaki ovisan o jednoj koordinati. Ovo razdvajanje najbolje se postiže generalizacijom razvoja po sfernim harmonicima. U sva četiri slučaja simetrija metrike omogućuje definiranje kutnog momenta.

Kutni moment istražuje se proučavanjem rotacija na 2-dimenzionalnoj mnogostrukosti $x^0 = t =$ konstanta, $x^1 = r =$ konstanta. Pod rotacijom sustava oko ishodišta, deset komponenti perturbacijskog tenzora transformira se poput 3 skalara (h_{00}, h_{01}, h_{11}), 2 vektora ($h_{02}, h_{03}; h_{12}, h_{13}$) i tenzora drugog reda, kada se smatraju kovarijantnim veličinama na sferi.

Iz tih izraza dobivamo perturbaciju za aksijalne i polarne valove.

Aksijalni Valovi

$$h_{\mu\nu}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_0(t, r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} Y_L^M & h_0(t, r) \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y_L^M \\ 0 & 0 & -h_1(t, r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} Y_L^M & h_1(t, r) \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y_L^M \\ \text{Sym} & \text{Sym} & h_2(t, r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\cot\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} Y_L^M & \text{Sym} \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \frac{1}{2}h_2(t, r) \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right) Y_L^M & -h_2(t, r) \sin\theta \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial\phi} Y_L^M \end{bmatrix} \quad (5)$$

Redci i stupci su numerirani redoslijedom 0, 1, 2, 3 (t, r, θ, ϕ). Simbol "Sym" označava da se preostale komponente $h_{\mu\nu}$ mogu dobiti iz simetrije $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$. Izraz (5) nazivamo aksijalnim a (6) polarnim tipom perturbacije.¹

¹Koristimo $m^* = \frac{Gm}{c^2}$ radi skraćivanja zapisa

Polarni Valovi

$$h_{\mu\nu}^P = \begin{bmatrix} (1 - \frac{2m^*}{r})H_0 Y_L^M & H_1 Y_L^M & h_0 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_L^M & h_0 \frac{\partial}{\partial \phi} Y_L^M \\ H_1 Y_L^M & (1 - \frac{2m^*}{r})H_2 Y_L^M & h_1 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_L^M & h_1 \frac{\partial}{\partial \phi} Y_L^M \\ \text{Sym} & \text{Sym} & r^2(K + G \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}) Y_L^M & \text{Sym} \\ \text{Sym} & \text{Sym} & r^2 G (\frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi}) Y_L^M & r^2(K \sin^2 \theta + G \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) Y_L^M \end{bmatrix} \quad (6)$$

Gdje $Y_L^M = Y_L^M(\theta, \phi)$.

Frekvencijska analiza; $M = 0$

U analizi perturbacija u sferno simetričnom Schwarzschildovom prostoru vremenu, koristimo činjenicu da su harmonijski indeksi L, M i paritet konstante gibanja zbog sferne simetrije. Pretpostavlja se da perturbacije ovise o vremenu u obliku $e^{-i\omega t}$, gdje je $\omega = kc$ frekvencija. Budući da različite vrijednosti M ($M = -L, -L+1, \dots, L$) za iste L i k vode do istih radijalnih jednadžbi, odabir $M = 0$ olakšava analizu bez gubitka općenitosti. Na taj način možemo se fokusirati na ključne parametre i frekvencije, a rješenje dobivamo superpozicijom pojedinačnih rješenja prilagođenih graničnim i početnim uvjetima.

Baždarni ili koordinatne transformacije, kanonska forma perturbacija i jednadžbe modova

Različiti valovi mogu predstavljati iste fizičke po-

jave gledane u različitim sustavima koordinata. Razmotrimo infinitezimalnu koordinatnu transformaciju:

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (\xi^\alpha \ll x^\alpha) \quad (7)$$

Infinitezimalni pomaci ξ^α transformiraju se poput vektora. U novom sustavu koordinata imat ćemo:

$$g'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} + h_{\mu\nu} \quad (8)$$

Sada je $h_{\mu\nu}$ definiran kao razlika između perturbirane metrike i Schwarzschildove metrike, napisane u sfernim koordinatama. Prema ovoj definiciji, razlika u novom sustavu koordinata imat će vrijednost:

$$h_{\mu\nu}^{\text{new}} = h_{\mu\nu}^{\text{old}} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \quad (9)$$

Odavde dobivamo kanonski oblik perturbacija;

$$h_{\mu\nu}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & \text{Sym} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-ikT} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) P_L(\cos \theta) \quad (10)$$

$$h_{\mu\nu}^P = \begin{bmatrix} H_0(1 - \frac{2m^*}{r}) & H_1 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2(1 - \frac{2m^*}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 K \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot e^{-ikT} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) P_L(\cos \theta) \quad (11)$$

Koristeći (10) i (11) u jednađbi (3) dobivamo dvije radialne jednađbe Schrödingerovog oblika.

Aksijalni valovi

Definirajmo

$$Q = \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) \frac{h_1}{r} \quad (12)$$

za aksijalne valove (Q) dobijemo valnu jednađbu drugog reda:

$$\frac{d^2 Q}{dr^{*2}} + k_{\text{eff}}^2(r) Q = 0 \quad (13)$$

Ovdje koristimo sljedeće skraćenice:

$$dr^* = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu\right) dr, \quad (14)$$

i

$$k_{\text{eff}}^2 = k^2 - L(L+1) \frac{e^\nu}{r^2} + 6m^* \frac{e^\nu}{r^3} \quad (15)$$

gdje su λ i ν definirane izrazom za metriku:

$$ds^2 = -e^\nu dT^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (16)$$

pri čemu vrijedi:

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m^*}{r}. \quad (17)$$

Polarni valovi

$$\frac{d\hat{K}_{LM}}{dr^*} = \hat{R}_{LM}, \quad \frac{d\hat{R}_{LM}}{dr^*} = [V_L(r^*) - \omega^2] \hat{K}_{LM}, \quad (18)$$

gdje je

$$V_Z(r) = \left(\frac{1-2m}{r}\right) \frac{2\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 6\lambda^2 mr^2}{r^3(\lambda r + 3m)^2} + \frac{18\lambda m^2 r + 18m^3}{r^3(\lambda r + 3m)^2}. \quad (19)$$

Sustav (18), napisan kao jednađba drugog reda, očito također poprima oblik Schrödingerove jednađbe:

$$\frac{d^2 \hat{K}_{LM}}{dr^{*2}} + [\omega^2 - V_Z(r)] \hat{K}_{LM} = 0. \quad (20)$$

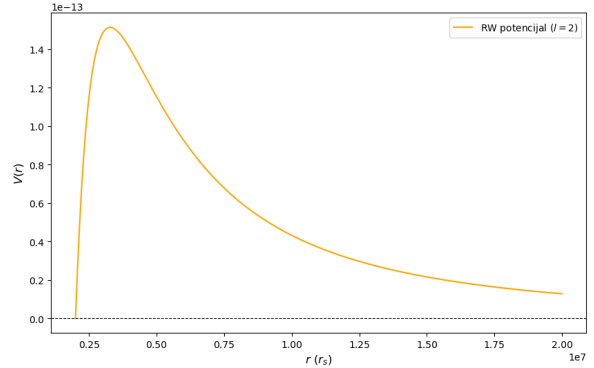
Detaljniji izvod nalazi se u [2].

C. Efektivni potencijali

C. V. Vishveswara [6] pokazao je kako efektivni potencijali igraju ključnu ulogu u analizi perturbacija Schwarzschildove metrike jer opisuju širenje gravitacijskih valova i njihovu interakciju s crnom rupom. Diferencijalne jednađbe perturbacija svode se na Schrödingerov oblik:

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^{*2}} + [\omega^2 - V_{\text{eff}}(r)] \Psi = 0, \quad (21)$$

gdje je $r^* = r + 2GM \ln|r - 2GM|$ tortoise koordinata, ω frekvencija, a $V_{\text{eff}}(r)$ efektivni potencijal.



Slika 1: Efektivni potencijal V_{eff} za neparne gravitacijske valove u najnižem modu $l = 2$ za crnu rupu mase ($M = 10^6 M_\odot$)

Za perturbacije s neparnim paritetom (aksijalne perturbacije), efektivni potencijal dan je izrazom:

$$V_{\text{RW}}(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6m}{r^3} \right]. \quad (22)$$

Ovaj potencijal konvergira prema nuli na horizontu događaja $r = 2m$, dok na velikim udaljenostima opada proporcionalno $1/r^2$. Maksimalna vrijednost postiže se blizu $r \approx 3m$, što odgovara fotonskoj orbiti.

Za perturbacije s parnim paritetom (polarizacijske perturbacije), potencijal ima složeniji oblik:

$$V_Z(r) = \frac{2P(r)}{r^3(\lambda r + 3m)^2}, \quad (23)$$

gdje je $P(r)$ polinom ovisan o radijalnoj koordinati r i multipolnom broju ℓ . Zerillijev potencijal također konvergira prema nuli na horizontu događaja $r = 2m$, dok na velikim udaljenostima opada proporcionalno $\frac{1}{r^2}$. Maksimalna vrijednost postiže se u blizini $r \approx 3m$, što također odgovara fotonskoj orbiti.

Efektivni potencijali omogućuju analizu stabilnosti Schwarzschildove metrike jer ne pokazuju negativne modove koji bi vodili rastu perturbacija. Također, ključni su za razumijevanje kvazinormalnih modova, jer djeluju kao rezonatori koji određuju diskretne frekvencije oscilacija. Nadalje, potencijali omogućuju analizu raspršenja gravitacijskih valova, gdje refleksija i transmisija valova ovise o obliku potencijala.

Ovi potencijali igraju ključnu ulogu u numeričkim simulacijama, posebno pri rješavanju radijalnih jednadžbi i modeliranju gravitacijskih valova iz astrofizičkih događaja poput spajanja crnih rupa.

III. Analiza stabilnosti

A. Stabilnost Schwarzschildovih crnih rupa

Stabilnost Schwarzschildove metrike jedna je od ključnih tema u analizi perturbacija crnih rupa. Rad Reggea i Wheelera bio je pionirski u pokazivanju da su perturbacije s neparnim paritetom stabilne. Oni su razmatrali aksijalne perturbacije Schwarzschildove metrike i pokazali da jednadžbe perturbacija rezultiraju efektivnim potencijalom koji ne dopušta eksponencijalni rast perturbacija. Time je potvrđena stabilnost za ovaj tip modova.

Zerilli je proširio ovu analizu na perturbacije s parnim paritetom. Njegova jednadžba za polarizacijske modove dovela je do sličnog zaključka; efektivni potencijal za parne perturbacije također ne pokazuje negativne modove, čime je osigurana stabilnost Schwarzschildove metrike za oba tipa perturbacija.

Rubni uvjeti igraju ključnu ulogu u analizi stabilnosti. Na horizontu događaja ($r = 2m$), valne funkcije moraju biti regularne i zadovoljavati uvjete koji osiguravaju fizikalno smisleno ponašanje. U beskonačnosti, perturbacije moraju odgovarati odlaznim valovima ili eksponencijalnom opadanju. [1]

B. Raspršenje gravitacijskog zračenja

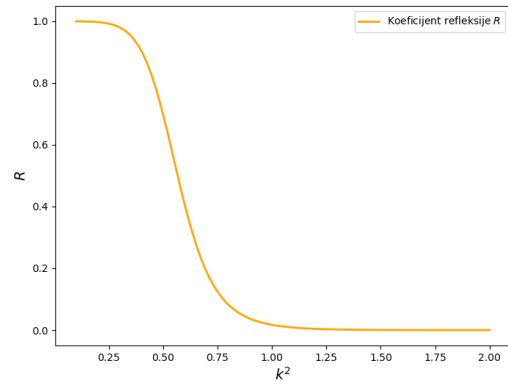
Gravitacijski valovi, koji nastaju kao posljedica perturbacija Schwarzschildove metrike, pri interakciji s prostor-vremenom doživljavaju raspršenje. Proces raspršenja je ključno područje istraživanja jer omogućuje razumijevanje širenja valova i prijenosa energije u blizini crne rupe.

Efektivni potencijal, definiran iz jednadžbi perturbacija, upravlja refleksijom i transmisijom valova:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^{*2}} + [\omega^2 - V_{\text{eff}}(r)] \Psi = 0, \quad (24)$$

Ova Schrödingerova forma valne jednadžbe omogućuje analizu ponašanja valova pri prolasku kroz potencijalnu barijeru.

Refleksija i transmisija



Slika 2: Koeficijent refleksije u ovisnosti o kvadratu frekvencije k^2 , za najniži mod $l = 2$. Za niske frekvencije ($k \rightarrow 0$) dolazi do potpune refleksije ($|R| \rightarrow 1$), dok za više frekvencije vidimo brzi pad u R .

Valni oblici mogu se opisati u terminima dolaznog,

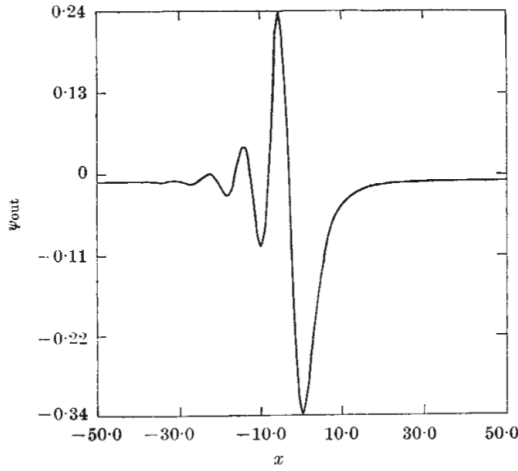
reflektiranog i transmitiranog vala:

$$\Psi_{\text{in}} = e^{-i\omega r^*}, \quad \Psi_{\text{ref}} = R e^{i\omega r^*}, \quad \Psi_{\text{trans}} = T e^{-i\omega r^*}. \quad (25)$$

Koeficijenti refleksije (R) i transmisije (T) zadovoljavaju uvjet očuvanja energije:

$$|R|^2 + |T|^2 = 1. \quad (26)$$

Valni paketi



Slika 3: Izlazni valni paket $\psi_{\text{out}}(x)$ u prostornoj beskonačnosti koji odgovara ulaznom Gaussovom valnom paketu $\psi_{\text{in}}(x) = e^{-ax^2}$ s $a = 1$.

Analiza valnih paketa uključuje Gaussovu funkciju:

$$\Psi_{\text{in}}(x) = e^{-ax^2}, \quad (27)$$

gdje parametar a određuje širinu paketa. Raspršeni valni paket u beskonačnosti dan je izrazom:

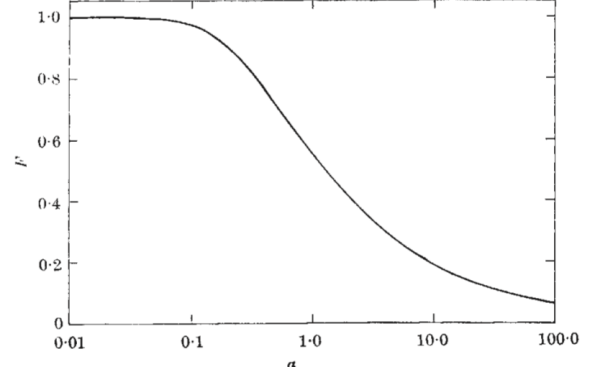
$$\Psi_{\text{out}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{A} f(k) e^{ikx} dk, \quad (28)$$

gdje $\frac{B}{A}$ opisuje koeficijent refleksije.

Omjer energije

Energija dolaznog i raspršenog vala povezana je omjerom:

$$F = \frac{\int (\Psi_{\text{out}})^2 dx}{\int (\Psi_{\text{in}})^2 dx} = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \int (\Psi_{\text{out}})^2 dx. \quad (29)$$



Slika 4: Udio F upadne energije prenesene raspršenim izlaznim valnim paketom na prostornoj beskonačnosti, prikazan kao funkcija parametra a , gdje za $a \approx 1$ približno 50% energije biva reflektirano, dok ostatak apsorbira crna rupa.

IV. Kvazinormalni modovi Schwarzschildove crne rupe

Gravitacijsko zračenje, kao posljedica dinamičkih promjena u zakrivljenju prostor-vremena, predstavlja ključni fenomen u općoj teoriji relativnosti. Frank J. Zerilli [4] razmotrio je zračenje koje nastaje tijekom radijalnog upada čestice u Schwarzschildovu geometriju. Takvi procesi nisu samo teorijski značajni, već imaju i praktične implikacije za astrofizičke sustave poput akrecijskih diskova, spajanja kompaktnih objekata i izvora gravitacijskih valova koji su mjerljivi pomoću suvremenih detektora poput LIGO-a. [7]

A. Različiti doprinosi za različite L-ove

$L = 0$ (Monopolni mod)

Monopolni mod ($L = 0$) predstavlja sferno simetrične perturbacije. U ovom slučaju nema emisije gravitacijskih valova.

Za aksijalne modove perturbacije eksplicitno iščezavaju te imamo samo parni doprinos koji se očituje kao augmentacija Schwarzschildovoj masi za $m_0\gamma$, tj. mase čestice. Sukladno Birkhoffovom teoremu, vanjski Schwarzschildov potencijal ostaje nepromijenjen, osim u pogledu povećanja ukupne mase.

$L = 1$ (Dipolni mod)

Dipolni mod ($L = 1$) opisuje linearni moment sustava i sastoji se od dva doprinosa: magnetskog (aksijalnog) i električnog (polarnog) dipolnog momenta.

- Električni dipolni moment: Ovaj doprinos nestaje baždarenjem interpretiranim kao transformacijom sustava u centar impulsa.
- Magnetski dipolni moment: Neparni doprinos je nejednak nuli izvan sfere i jednak je očuvanom angularnom momentu upadne čestice $l_z = m_0 a$

Zaključno, za $L = 1$ modove u slučaju radijalnog pada čestice, ni magnetski ni električni dipolni modovi ne doprinose emisiji gravitacijskih valova. Ovaj rezultat naglašava važnost viših modova ($L \geq 2$) za generiranje gravitacijskih valova u radijalnom scenariju.

$L = 2$ (Kvadrupolni mod) i viši modovi ($L \geq 3$)

Kvadrupolni mod ($L = 2$) predstavlja najniži mod koji generira gravitacijske valove. Ovaj mod dominira u zračenju jer je kvadrupolni moment odgovoran za emisiju gravitacijskih valova prema Einsteinovim jednadžbama. Viši modovi ($L \geq 3$) također pridonose, ali s manjom relativnom snagom. Oni postaju značajni pri analizi detaljnije strukture valnih oblika i energije zračenja u specifičnim frekvencijskim opsezima.

B. Kvazinormalni modovi

Evolucija perturbacija u statičkim konfiguracijama, bilo za zvijezde ili crne rupe, može se opisati kao problem svojstvenih vrijednosti. U oba slučaja, karakteristične frekvencije oscilacija određuju se rješavanjem Sturm-Liouvilleove diferencijalne jednadžbe drugog reda, gdje rubni uvjeti definiraju svojstvene vrijednosti. Za zvijezde, te su frekvencije realne i opisuju normalne modove, koji traju beskonačno u odsustvu prigušenja.

Kod crnih rupa situacija je drugačija zbog rubnih uvjeta koji zahtijevaju čisto odlazne valove u beskonačnosti i čisto dolazne valove na horizontu događaja. Ovi uvjeti rezultiraju kvazinormalnim modovima (QNMs) s kompleksnim frekvencijama: realni dio predstavlja frekvenciju oscilacija, dok imaginarni dio određuje brzinu prigušenja.

Za Schwarzschildove crne rupe problem se svodi na rješavanje jednadžbe vala u jednoj dimenziji (npr. Zerillijeve jednadžbe (20)) s pozitivnim potencijalom kratkog doseg.

C. Izvod kvazinormalnih modovi za Zerillijev potencijal

Za općenite potencijalne barijere za koje eksplisitna rješenja ne mogu biti pronađena (kao što je slučaj sa Zerillijevim potencijalom), prikladno je reformulirati problem eksplicitno kao standardni problem vlastitih vrijednosti transformacijom jednadžbe (20) u oblik Riccatijeve jednadžbe putem substitucije.

$$\psi = \exp \left(i \int^x \phi dx \right), \quad (30)$$

$$i \frac{d\phi}{dx} + \sigma^2 - \phi^2 - V(x) = 0. \quad (31)$$

Kvazinormalni mod odgovara rješenju jednadžbe (46) koje zadovoljava rubne uvjete:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow -\sigma \quad \text{kad} \quad x \rightarrow +\infty, \\ \phi &\rightarrow +\sigma \quad \text{kad} \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (32)$$

pri čemu se pretpostavlja da je realni dio σ pozitivan. Rješenja koja imaju ova svojstva (općenito) postoje kada σ preuzme jedan diskretni skup kompleksnih vrijednosti; no taj skup ne mora nužno biti prebrojiv beskonačan: ponekad jest, ali često nije. Jedan identitet, koji slijedi iz integracije jednadžbe (31) preko cijelog raspona x i korištenjem rubnih uvjeta (32), jest

$$-2i\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 - \phi^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx. \quad (33)$$

Ovdje jasno vidimo da potencijal $V(x)$ mora biti kratkog dosega.

Zbog rubnih uvjeta (32) i pretpostavljenog kratkog dosega potencijala $V(x)$, oba integrala koja se pojavljuju u jednadžbi (33) su konačna.

U praksi je korisno razdvojiti realni i imaginarni dio jednadžbe (31) pisanjem

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \quad \text{i} \quad \phi = \phi_1 + i\phi_2 \quad (\sigma_1 \geq 0). \quad (34)$$

Dobivamo par jednadžbi,

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -2\sigma_1\sigma_2 + 2\phi_1\phi_2 \quad (35)$$

i

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \phi_1^2 + \phi_2^2 - V, \quad (36)$$

zajedno s rubnim uvjetima

$$\phi_1 \rightarrow -\sigma_1 \quad \text{kad} \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37)$$

$$\phi_1 \rightarrow +\sigma_1 \quad \text{kad} \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\phi_2 \rightarrow -\sigma_2 \quad \text{kad} \quad x \rightarrow +\infty, \quad (38)$$

$$\phi_2 \rightarrow +\sigma_2 \quad \text{kad} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Ponekad se može dogoditi da je σ čisto imaginaran, tako da je $\sigma_1 = 0$. Budući da, u ovom slučaju, ϕ mora nestati na $\pm\infty$, slijedi iz jednadžbe (45) da je $\phi_1 \equiv 0$; i ostaje pitanje postoje li netrivialna rješenja jednadžbe

$$\frac{d\phi_2}{dx} = -\sigma_2^2 + \phi_2^2 - V, \quad (39)$$

koja zadovoljavaju rubne uvjete (37) i (38).

Sad primjenjujemo ovaj postupak na Zerillijevu jednadžbu (20) i potencijal (19), uz drugačije oznake sukladno [5].

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dr^{*2}} + (\sigma^2 - V_Z) Z &= 0, \quad (40) \\ V_Z(r) &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{2n^2(n+1)r^3 + 6n^2mr^2}{r^3(nr+3m)^2} \\ &\quad + \frac{18nm^2r + 18m^3}{r^3(nr+3m)^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

$$n = \frac{1}{2}(l-1)(l+2). \quad (42)$$

Zerilli-jev potencijal očito ispunjava uvjet kratkog dosega te imamo:

$$2m \int_{-\infty}^{+\infty} V_Z dr^* = 2n + \frac{1}{2} = (l-1)(l+2) + \frac{1}{2}. \quad (43)$$

Kako $r^* \rightarrow \pm\infty$, jednadžba (40) dopušta dva neovisna rješenja s asimptotskim ponašanjima

$$Z_{\pm} \rightarrow e^{\pm i\omega r^*}. \quad (44)$$

Kod numeričkog integriranja kvazinormalnih modova Schwarzschildove crne rupe, u literaturi se često koristi Riccatijeva jednadžba prvog reda zbog njene veće stabilnosti u odnosu na direktno integriranje valne jednadžbe. Razlog za ovu stabilnost leži u prirodi Riccatijeve jednadžbe i njenog ponašanja tijekom numeričkog postupka.

Kod direktnog integriranja valne jednadžbe, numerički postupak može naići na značajne nestabilnosti. Naime, kada se integracija provodi od asimptotskog područja ($r^* \rightarrow \pm\infty$) prema konačnoj vrijednosti r^* , rješenja koja slijede odgovarajuće asimptotsko ponašanje (Z_+ ili Z_-) vrlo brzo postaju kontaminirana "neželjenim rješenjima". Ta neželjena rješenja potječu od eksponencijalno različitih pridjeva u rješenju kada je imaginarni dio σ pozitivan, što vodi do numeričkih pogrešaka i nestabilnosti.

Nasuprot tome, Riccatijeva jednadžba za faznu funkciju ϕ pokazuje se znatno stabilnijom. Ova jednadžba omogućuje integraciju unatrag s pozitivnih vrijednosti r^* i unaprijed s negativnih vrijednosti r^* , bez potrebe za strogim zahtjevom da potencijal $|V(r^*)| \ll |\sigma|^2$. Ova fleksibilnost dolazi iz činjenice da Riccatijeva jednadžba koristi konvergentne nizove razvoja (α_j za $r^* \rightarrow +\infty$ i β_j za $r^* \rightarrow -\infty$) koji pružaju precizne početne uvjete za integraciju. Koeficijenti α_j i β_j dani u appendixu.

$$Z = e^{-i\sigma r^*} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j r^{-j}, \quad (r^* \rightarrow +\infty) \quad (45)$$

$$Z = e^{+i\sigma r^*} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j (r - 2m)^j, \quad (r^* \rightarrow -\infty) \quad (46)$$

S obzirom na to da je Z određen na oba kraja pomoću ekspanzija (45) i (46), fazna funkcija ϕ slijedi iz jednačbe:

$$\phi = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dr^*} \quad (47)$$

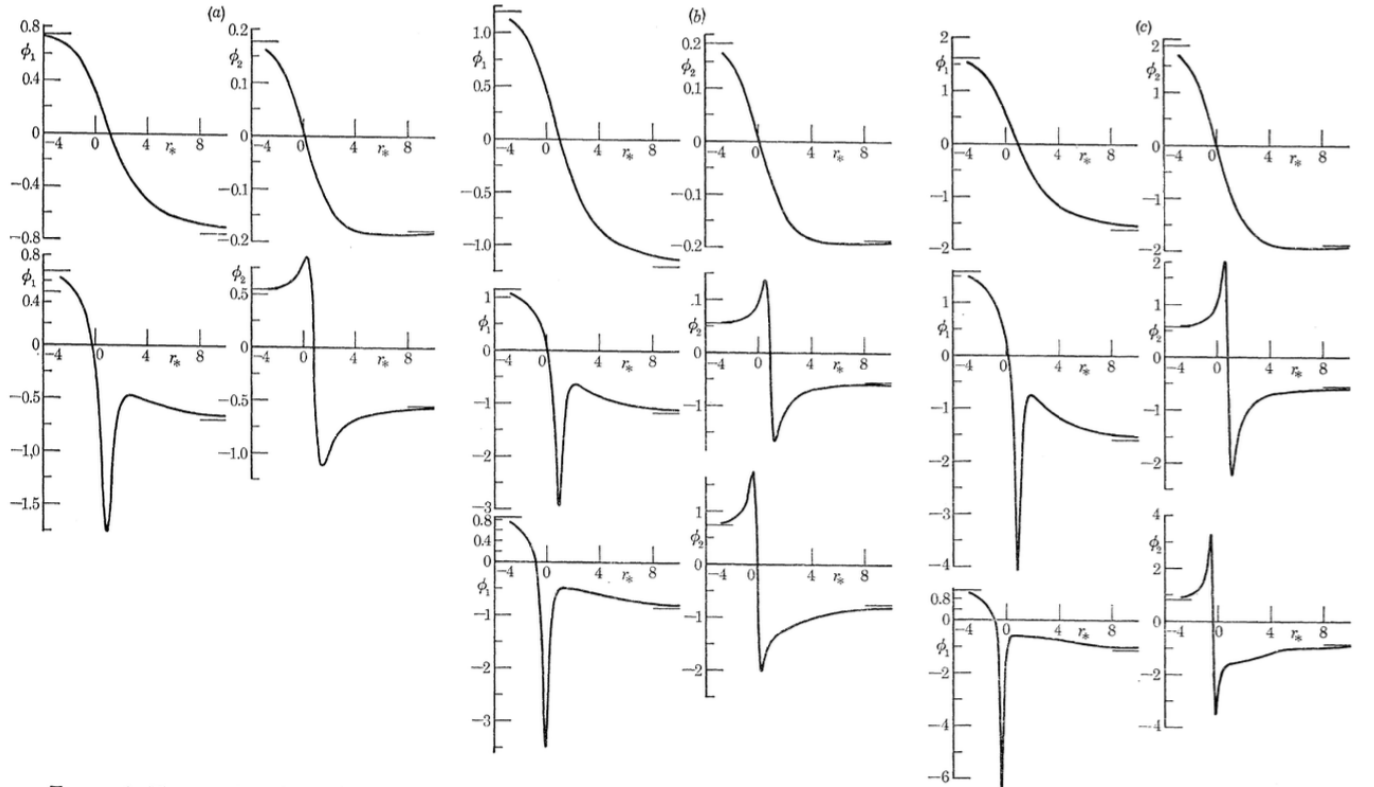
Pretraga karakterističnih vrijednosti σ koje pripadaju kvazinormalnim modovima provodi se na sljedeći način. Biramo kompleksnu vrijednost σ u pozitivnoj polovici kompleksne rav-

nine ($\text{Re}(\sigma) > 0$) i određujemo koeficijente ekspanzije α_j i β_j u skladu s jednačbama (59)–(61) (Appendix) te izračunavamo ϕ za vrijednosti r^* (i pozitivne i negativne) za koje nizne ekspanzije (45) i (46) daju dovoljno točne rezultate. Zatim numerički integriramo, unatrag od $+\infty$ i unaprijed od $-\infty$, do zajedničke srednje vrijednosti r^* (općenito $3m$, gdje je V_Z približno na maksimumu). U toj zajedničkoj točki određujemo razliku:

$$M(\sigma) = \phi_-(r^*) - \phi_+(r^*) \quad (48)$$

Uvjet da odabrana vrijednost σ pripada kvazi-normalnom modu je da $M(\sigma)$ nestaje (s obzirom na to da Riccatijeva jednačba pripada prvom redu). Otkriveno je da gore opisani postupak omogućuje određivanje kvazi-normalnih modova sve dok vrijedi:

$$\text{Im}(\sigma) \leq \text{Re}(\sigma) \quad (49)$$



Slika 5: Kompleksna faza ($\phi_1 + i\phi_2$) koja pripada kvazinormalnim modovima Zerillijevog potencijala za $l = 2$, 3 i 4 (slike (a), (b) i (c), redom). Asimptote ($\pm\sigma_1$ i $\pm\sigma_2$) kojima faze ϕ_1 i ϕ_2 teže za $r^* \rightarrow +\infty$ i $r^* \rightarrow -\infty$ su naznačene. Može se primijetiti da postoje dva moda za $l = 2$ i tri moda za svaki od $l = 3$ i $l = 4$. [5]

Kada se ovaj uvjet prekrši, čini se da numerička integracija pati od nestabilnosti. Osnovni uzrok je vjerojatno isti kao i kod direktne integracije valne jednačbe, iako je on prikriven (i manje nestabilan!) zbog nelinearnosti Riccatijeve jednačbe.

l	Chandrasekar	Leaver	3rd-order WKB
2	$0.74734 + 0.17792i$ $0.69687 + 0.54938i$	$0.747343 - 0.177925i$ $0.693422 - 0.54783i$ $0.602107 - 0.956554i$ $0.50301 - 1.410296i$	$0.746324 - 0.178348i$ $0.692034 - 0.54983i$ $0.60587 - 0.942128i$ $0.494924 - 1.345796i$
3	$1.19889 + 0.18541i$ $1.16402 + 0.56231i$ $0.85257 + 0.74546i$	$1.198887 - 0.185406i$ $1.165288 - 0.562596i$ $1.10337 - 0.958186i$ $1.023924 - 1.380674i$	$1.19853 - 0.185456i$ $1.16471 - 0.56281i$ $1.1064 - 0.953368i$ $1.031494 - 1.354858i$
4	$1.61835 + 0.18832i$ $1.59313 + 0.56877i$ $1.12019 + 0.84658i$	$1.61836 - 0.18832i$ $1.59326 - 0.56886i$ $1.54542 - 0.957981i$ $1.47968 - 1.36784i$	$1.618196 - 0.188322i$ $1.592999 - 0.568732i$ $1.547272 - 0.957948i$ $1.486624 - 1.35661i$

Tablica 1: Karakteristične vrijednosti $2m\sigma$ za Zerillijev potencijal koristeći opisanu metodu u [5] i Leaverova i WKB metoda do 3. reda [8]

Na slici 5. ilustrirani su kvazinormalni modovi određeni na gore opisani način za $l = 2, 3$ i 4 ; dok u tablici 1 navodimo karakteristične vrijednosti σ kojima pripadaju.

U tablici 1. sve metode pokazuju slične trendove povećanja realnog dijela i apsolutnog iznosa imaginarnog dijela za veće vrijednosti l . Leaverova metoda se smatra pouzdanijom, dok je WKB metoda korisna za brze procjene s prihvatljivom točnošću.

D. Izvod kvazinormalnih modova za Regge-Wheelerov potencijal

$$\frac{d^2 X}{dr^{*2}} + (\sigma^2 - V_{RW}(r))X = 0 \quad (50)$$

gdje je

$$V_{RW}(r) = 2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{(n+1)r - 3m}{r^3} \quad (51)$$

sukladno razmatranjima u prvom poglavlju.

Međutim, nije nužno razmatrati ovu jednačbu zasebno, budući da ona, kao što ćemo pokazati, mora dati iste kompleksne frekvencije (i, zapravo, iste koeficijente refleksije i transmisije) kao Zerillijeva jednačba. Također se može primijetiti da integral potencijala $V_{RW}(r)$ preko intervala r^* ima istu vrijednost kao za V_Z (vidi jednačbu (43)).

U jednačbi (Chandrasekhar, 1975, jednačba (A 10)) [9]:

$$\left[\frac{2}{3}n(n+1) - 2mi\sigma \right] X = \frac{r^2(nr+3m)}{3(r-2m)} Y - \frac{r^6}{6(r-2m)^2} (W + 2i\sigma)\Lambda_Y \quad (52)$$

zamjenjujemo Y i Λ_Y (u terminima Z) sa:

$$W = 2 \frac{nr^2 - 3nmr - 3m^2}{r^2(nr + 3m)}. \quad (53)$$

$$Y = V_Z Z + (W + 2i\sigma)\Lambda_+ Z. \quad (54)$$

Gdje je $\Lambda_{\pm}$:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{d}{dr^*} \pm i\sigma. \quad (55)$$

$$\left[\frac{2}{3}n(n+1) - 2mi\sigma \right] X = \left[\frac{2}{3}n(n+1) + \frac{6m^2(r-2m)}{r^2(nr+3m)} \right] Z - 2m \frac{dZ}{dr^*} \quad (56)$$

Stoga, rješenje Zerillijeve jednadžbe sa sljedećim asimptotskim ponašanjem:

$$Z \rightarrow \begin{cases} e^{+i\sigma r^*} + Ae^{-i\sigma r^*} & (r^* \rightarrow +\infty), \\ Be^{+i\sigma r^*} & (r^* \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (57)$$

će dati rješenje jednadžbe (50) sa sljedećim ponašanjem:

$$X \rightarrow \begin{cases} e^{+i\sigma r^*} + \frac{\frac{2}{3}n(n+1)+2mi\sigma}{\frac{2}{3}n(n+1)-2mi\sigma} Ae^{-i\sigma r^*} & (r^* \rightarrow +\infty), \\ Be^{+i\sigma r^*} & (r^* \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (58)$$

Jednakost koeficijenata refleksije i transmisije, koji su određeni za dvije jednadžbe, sada je očita. Ovdje vidimo jasnu poveznicu između aksijalnih i polarnih modova u jednadžbi (56). Svojstvo da ova dva naizgled nepovezana moda dijele identičan spektar zove se izospektralnost. Fizičko podrijetlo ovog svojstva ostaje nejasno i nije sigurno je li izospektralnost generička značajka ili puka slučajnost za klasične crne rupe. Napori da se razumije izospektralnost u perturbaciji crne rupe ostaju intrigantni, osobito zato što ovo svojstvo vrijedi samo za vrlo specifična prostorvremena crne rupe, te bi stoga bilo kakva opažanja razbijanja izospektralnosti snažno sugerirala novu fiziku. [10]

V. Rezultati i novi teorijski pristupi koristeći QNM

LIGO

Otkrivanje gravitacijskih valova 2015. godine od strane LIGO-a (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) [7] predstavlja jedan od najvažnijih znanstvenih događaja 21. stoljeća. Prvi signal, nazvan GW150914, de-

tektiran je 14. rujna 2015. godine i dolazio je od spajanja dviju crnih rupa udaljenih oko 1,3 milijarde svjetlosnih godina. Ovo otkriće ne samo da je pružilo direktan dokaz postojanja gravitacijskih valova predviđenih Einsteinovom općom teorijom relativnosti, već je otvorilo i potpuno novo područje istraživanja svemira gravitacijsku astronomiju. Promatranjem "ringdown" faze u ovom signalu, po prvi put su analizirani kvazinormalni modovi crne rupe, omogućivši mjerenje njezine mase i kutnog momenta s nevjerojatnom

preciznošću.

Neki od novih teorijskih pristupa

Formalizam QNM razvio se u ključni alat za istraživanje različitih teorijskih pristupa u gravitaciji i astrofizici. Jedan od novih smjerova je primjena QNM-ova u ispitivanju modifikacija opće teorije relativnosti, poput $f(R)$ gravitacije, Einstein-Gauss-Bonnet teorije i drugih proširenih modela gravitacije [11], gdje se predviđene frekvencije i prigušenja QNM-ova razlikuju od onih u standardnoj teoriji. Nadalje, formalizam QNM-ova igra središnju ulogu u holografskoj dualnosti

(AdS/CFT) [12], gdje njihova analiza u anti-de Sitter prostorima pruža uvide u termalne i dinamičke aspekte kvantnih sustava.

Osim navedenih pristupa, nekumutativni pristup gravitaciji predlaže da prostorvrijeme na vrlo malim skalama nije glatko već "zrnato", [10] uvodeći diskretne strukture koje mijenjaju dinamiku gravitacijskih perturbacija. Ove nekumutativne modifikacije prostor-vremena reflektiraju se u spektralnim svojstvima QNM-ova, poput promjena frekvencija i prigušenja oscilacija. Analizom QNM-ova u ovom okviru moguće je testirati prisutnost takvih efekata i identificirati potencijalna odstupanja od Einsteinove teorije kroz precizna opažanja gravitacijskih valova.

APPENDIX

Koeficijenti α_j i β_j mogu se odrediti uz pomoć relacija za rekurziju:

$$\begin{aligned}
& 2i\sigma r(j+1)\alpha_{j+1} + [n^2j(j+1) - 2n^2(n+1) + 12i\sigma mnj]\alpha_j \\
& + m[6nj(j-1) - 2n^2(j^2-1) - 6n^2 + 18i\sigma m(j-1)]\alpha_{j-1} \\
& + m^2[9(j-1)(j-2) - 12nj(j-2) - 18nj]\alpha_{j-2} \\
& - 18m^3[(j-1)(j-3) + 1]\alpha_{j-3} = 0.
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
& 2i\sigma n^2(j-1)\beta_{j-1} + j[n^2(j-1 + 8i\sigma m) + 12i\sigma mn(n+1) - (A/j)]\beta_j \\
& + m(j+1)[n^2(2j+2 + 8i\sigma m) + 6n(n+1)(j+8i\sigma m) + 6i\sigma m(2n+1)(2n+3) - (B/m(j+1))]\beta_{j+1} \\
& + m^2(j+2)[6n(n+1)(2j+4 + 8i\sigma m) + 3(2n+1)(2n+3)(j+1 + 8i\sigma m) + 4i\sigma m(2n+3)^2 - (C/m^2(j+2))]\beta_{j+2} \\
& + m^3(j+3)[3(2n+1)(2n+3)(2j+6 + 8i\sigma m) + 2(2n+3)^2(j+2 + 8i\sigma m) - D/m^3(j+3)]\beta_{j+3} \\
& + 4m^4(j+4)(2n+3)^2(j+4 + 4i\sigma m)\beta_{j+4} = 0.
\end{aligned} \tag{60}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
A &= 2n^2(n+1), \\
B &= 6n^2(2n+3)m, \\
C &= 6n(4n^2 + 8n + 3)m^2, \\
D &= (16n^3 + 40n^2 + 36n + 18)m^3.
\end{aligned} \tag{61}$$

Zaključak

U ovom radu analizirane su perturbacije Schwarzschildove crne rupe s ciljem razumijevanja stabilnosti metrike i uloge kvazi-normalnih modova. Kroz detaljni izvod Regge-Wheelerovog i Zerillijevog potencijala pokazano je da Schwarzschildova metrika ostaje stabilna pod malim perturbaci-

jama. Kvazinormalni modovi, omogućuju opis "ringdown" faze i definirani su isključivo parametrima crne rupe, poput mase i kutnog momenta. Efektivni potencijali pokazali su se ključnima za analizu širenja gravitacijskih valova i stabilnosti crnih rupa. Također, detekcija gravitacijskih valova pruža mogućnost testiranja teorijskih proširenja opće relativnosti u stvarnim uvjetima jakih gravitacijskih polja.

Literatura

- [1] T. Regge, J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).
- [2] F. J. Zerilli, *Effective Potential for Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations*, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 737 (1970).
- [3] A. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1916).
- [4] F. J. Zerilli, *Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics*, *Phys. Rev. D* **2**, 2141 (1970).
- [5] S. Chandrasekhar and S. Detweiler, *The Quasi-Normal Modes of the Schwarzschild Black Hole*, *Proc. R. Soc. Lond. A* **334**, 1639 (1975).
- [6] C. V. Vishveswara, *Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole*, *Nature* **227**, 936–938 (1970).
- [7] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [8] E. C. Santos, J. C. Fabris, and J. A. de Freitas Pacheco, *Quasi-normal modes of black holes and naked singularities: revisiting the WKB method*, (2019) [1903.04874].
- [9] S. Chandrasekhar, *On the Equations Governing the Perturbations of the Schwarzschild Black Hole*, *Proc. R. Soc. Lond. A* **343**, 1634 (1975).
- [10] N. Herceg, T. Jurić, A. N. Kumara, A. Samsarov, I. Smolić, *Noncommutative Quasinormal Modes of Schwarzschild Black Hole*, (2024) [2409.01402].
- [11] H. Roussille, *Black Hole Perturbations in Modified Gravity Theories*, *Physical Review D* **104**, 124044 (2021) [2211.01103].
- [12] R. A. Konoplya, A. Zhidenko, *Quasinormal Modes of Black Holes: From Astrophysics to String Theory*, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 793 (2011) [1102.4014].