Redukcijska metoda računanja jednopetljenih Feynmanovih integrala

Luka Mičić*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet,
Sveučilište u Zagrebu, Bijenička c. 32, 10000 Zagreb, Hrvatska

Mentor: dr.sc. Goran Duplančić†
Zavod za teorijsku fiziku, Institut Ruđer Bošković, Bijenička c. 54, 10000 Zagreb, Hrvatska

U ovom radu se predstavlja metoda redukcije generalnog jednopetljenog bezmasenog Feynmanovog integrala s proizvoljnim 4-impulsima vanjskih čestica čiji Feynmanov dijagram ima N vrhova. Prvotno tome se na Feynmanovom integralu vrši tenzorska dekompozicija, time se integral rastavlja na sumu članova koji su produkt tenzorskog dijela i skalarnog Feynmanovog integrala na kojem se vrši daljnja redukcija te se skalarni Feynmanov integral prikazuje kao linearna kompozicija osam fundamentalnih integrala.

I. UVOD I DEFINICIJA FEYNMANOVOG INTEGRALA

Zbog činjenice da račun najnižeg reda u perturbativnom QCD-u ne daje dovoljno precizna predviđanja procesa raspršenja [1], potrebne su metode kojima možemo analizirati doprinose višeg reda. Posebnu važnost imaju Feynmanovi integrali s bezmasenim unutarnjim linijama jer se često susrećemo s bezmasenim česticama ili česticama čije su mase zanemarive zato što gledamo procese visokih energija (što je "preduvjet" za perturbativni QCD zbog asimptotske slobode konstante vezanja). Ovi integrali često sadrže infracrvene (IR) divergencije, bilo meke ili kolinearne prirode, što zahtijeva njihovu evaluaciju u proizvoljnom broju dimenzija prostor-vremena. Dijagram sadrži kolinearni IR singularitet ako je unutarnja linija povezana sa vanjskom linijom koja je na ljusci mase (kada je linija na ljusci mase, to znači da za tu česticu vrijedi Einsteinova disperzijska relacija, za bezmasene unutarnje linije $p^2 = 0$), a mekani singularitet ako je unutarnja gluonska linija povezana sa dvije vanjske kvarkovske linije koje su na ljusci mase. Integral procesa prikazanog na slici 1 je

$$I^N_{\mu_1 \ldots \mu_P}(D; \{p_i\}) \equiv (\mu^2)^{2-D/2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l_{\mu_1} \ldots l_{\mu_P}}{A_1 A_2 \ldots A_N}, \quad (1)$$

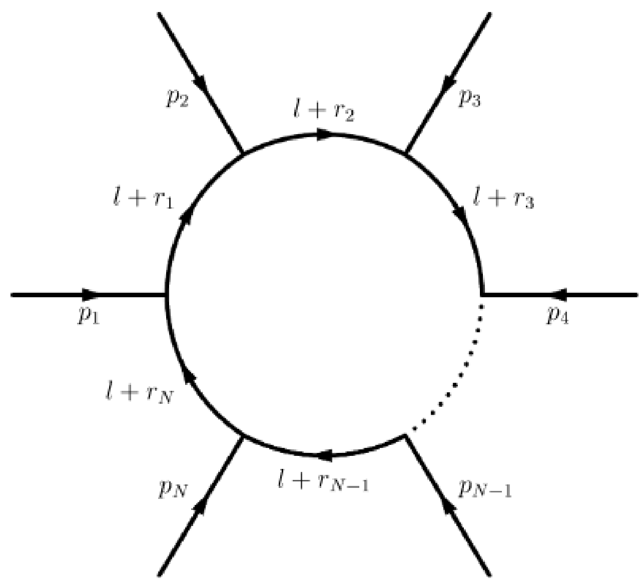
gdje su p_i vanjski 4-impulsi, l je 4-impuls petlje, μ je skala dimenzijske regularizacije koja osigurava da integral ima istu fizikalnu dimenziju za bilo koji D, i A_i su bezmaseni propagatori koji imaju oblik

$$A_i \equiv (l + r_i)^2 + \mathrm{i}\epsilon, \quad (2)$$

gdje su 4-impulsi r_i dani kao $r_i = p_i + r_{i-1}$, za i od 1 do N, i $r_0 = r_N$. Veličina iϵ je artefakt Feynmanove preskripcije propagatora (kauzalna preskripcija) [2], te je infinitezimalni imaginarni dio propagatora. Integral (1) može u sebi imati i ultraljubičaste (UV) divergencije i IR divergencije. Do UV divergencija dolazi ako $P + D - 2N \geq 0$ (integriranje do $l = \infty$ daje beskonačan integral), a slučajevi koji daju IR divergencije su već diskutirani ranije u poglavlju. Te divergencije se mogu poništiti kroz proces dimenzijske regularizacije [4]. Definiramo pojam skalarnog Feynmanovog integrala

$$I^N_0(D; \{p_i\}) \equiv (\mu^2)^{2-D/2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_N}. \quad (3)$$

U idućem poglavlju će biti napravljena tenzorska dekompozicija Feynmanovog integrala. Zbog Lorentz kovarijatnosti integrala on se može rastaviti na linearnu kombinaciju koja se sastoji od vanjskih 4-impulsa p_i i metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$. Na kraju dekompozicije slijedi da koeficijenti dekompozicije odgovaraju skalarnim Feynmanovim integralima.



Slika 1. Jednopetljeni Feynmanov dijagram sa N točaka [3]

* lmicic.phy@pmf.hr
† gorand@irb.hr

II. TENZORSKA DEKOMPOZICIJA FEYNMANOVOG INTEGRALA

Kako bi smo odredili redukcijske relacije potrebno je razmotriti poopćenja integrala (1) i (3)

$$I^N_{\mu_1...\mu_P}(D;\{\nu_i\}) \equiv (\mu^2)^{2-D/2}\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D}\frac{l_{\mu_1}...l_{\mu_P}}{A_1^{\nu_1}A_2^{\nu_2}...A_N^{\nu_N}}, \tag{4}$$

i njegov skalarni integral

$$I^N_0(D;\{p_i\}) \equiv (\mu^2)^{2-D/2}\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D}\frac{1}{A_1^{\nu_1}A_2^{\nu_2}...A_N^{\nu_N}}, \tag{5}$$

gdje su $\nu_i \in \mathbb{N}$ proizvoljne potencije propagatora. Za tenzorsku dekompoziciju koristimo integralnu reprezentaciju Γ funkcije, te preko nje pišemo propagatore kao

$$\frac{1}{[(l+r_i)^2+\mathrm{i}\epsilon]^{\nu_i}} = \frac{1}{i^{\nu_i}\Gamma(\nu_i)}\int_0^\infty dx x^{\nu_i-1}e^{ix[(l+r_i)^2+\mathrm{i}\epsilon]}. \tag{6}$$

Ovaj identitet vrijedi za $Re\ \nu_i > 0$, te ga možemo primjeniti na Feynmanov tenzorski integral. Uvrštavanjem identiteta (6) u (4) dobijamo

$$I^N_{\mu_1\cdots\mu_P}(D;\{\nu_i\}) = \frac{(\mu^2)^{2-D/2}}{\mathrm{i}^{\Sigma_i\nu_i}\prod_i\Gamma(\nu_i)}\int\frac{\mathrm{d}^D l}{(2\pi)^D}$$
$$\times\, l_{\mu_1}\cdots l_{\mu_P}\int_0^\infty\left(\prod_i \mathrm{d}x_i x_i^{\nu_i-1}\right)$$
$$\times \exp\left[\mathrm{i}\left(l^2\sum_i x_i + 2l\sum_i x_i r_i + \sum_i x_i r_i^2 + \mathrm{i}\epsilon\sum_i x_i\right)\right]. \tag{7}$$

Možemo translatirati varijablu integracije l

$$l \to l - \frac{\sum_i x_i r_i}{\sum_i x_i} \tag{8}$$

i prikazati 4-impulse l_{μ_j} iz integrala (7) kao derivacije eksponencijalne funkcije u odnosu na $(\sum_i x_i r_i)^{\mu_j}$. Korištenjem identiteta za D-dimenzionalan Gaussov integral

$$\int\frac{d^D l}{(2\pi)^D}exp(\mathrm{i}Al^2) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi\mathrm{i}A)^{D/2}} \tag{9}$$

može se pokazati da za integral (7) vrijedi

$$I^N_{\mu_1...\mu_P}(D;\{\nu_i\}) = \frac{i}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{2-D/2}\frac{i^{-\sum_i\nu_i-D/2}}{(2i)^P\prod_i\Gamma(\nu_i)}$$
$$\times\int_0^\infty(\prod_i dx_i x_i^{\nu_i-1})(\sum_i x_i)^{-D/2}$$
$$\times\left[\prod_{j=1}^P\frac{\partial}{\partial(\sum_i x_i r_i)^{\mu_j}}\right]\exp\left[i(\frac{(\sum_i x_i r_i)^2}{\sum_i x_i}+\sum_i x_i r_i^2\right.$$
$$\left.+i\epsilon\sum_i x_i\right]. \tag{10}$$

Korištenjem identiteta za Diracovu delta funkciju u svrhu Feynmanove parametrizacije [5]

$$\int_0^\infty d\lambda\ \delta(x_1+x_2+...+x_N-\lambda) = 1. \tag{11}$$

Gdje redefiniramo varijable $x_i = \lambda y_i$, $i \in [1,N]$, u izrazu (10) te uvrštavanjem (11) u (10) dobijemo

$$I^N_{\mu_1...\mu_P}(D;\{\nu_i\}) = \frac{i}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{2-D/2}\frac{i^{-\sum_i\nu_i-D/2}}{(2i)^P\prod_i\Gamma(\nu_i)}$$
$$\times\int_0^\infty(\prod_i dy_i y_i^{\nu_i-1}\delta(\sum_{i=1}^N y_i-1)\int_0^\infty d\lambda\lambda^{\sum_i\nu_i-D/2-1}$$
$$\times\left[\prod_{j=1}^P\frac{\partial}{\partial(\lambda\sum_i y_i r_i)^{\mu_j}}\right]\exp\left[i\lambda\left(-(\sum_i y_i r_i)^2+\sum_i y_i r_i^2+i\epsilon\right)\right]. \tag{12}$$

Parcijalna derivacija je u prošlom izrazu [6]

$$\left[\prod_{j=1}^P\frac{\partial}{\partial(\lambda\sum_i y_i r_i)^{\mu_j}}]exp[i\lambda(-(\sum_i y_i r_i)^2+\sum_i y_i r_i^2+i\epsilon)\right]$$
$$=\sum_{\substack{k,j_1,...,j_N\geq 0\\ 2k+\sum_{j_i}=P}}\{[g]^k[r_1]^{j_1}...[r_N]^{j_N}\}_{\mu_1...\mu_P}(\prod_i y_i^{j_i})(-2i)^{P-k}$$
$$\times\lambda^{-k}\exp\left[i\lambda(-(\sum_i y_i r_i)^2+\sum_i y_i r_i^2+i\epsilon)\right], \tag{13}$$

gdje je $\{[g]^k[r_1]^{j_1}\cdots[r_N]^{j_N}\}_{\mu_1\cdots\mu_P}$ simetrična (u odnosu na indekse μ_i) kombinacija tenzora, koja se sastoji od k metričkih tenzora i j_i vanjskih 4-impulsa r_i. Kada uvrstimo izraz (13) u integral (12) dobijemo

$$I^N_{\mu_1\cdots\mu_P}(D;\{\nu_i\}) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\left(4\pi\mu^2\right)^{2-D/2}\sum_{\substack{k,j_1,...,j_N\geq 0\\ 2\boldsymbol{k}+\sum_{j_i}=P}}$$
$$\left\{[g]^k[r_1]^{j_1}\cdots[r_N]^{j_N}\right\}_{\mu_1\cdots\mu_P}\frac{(-1)^{P-k_i-\Sigma_t\nu_i-D/2}}{(2\mathrm{i})^k\prod_i\Gamma(\nu_i)}$$
$$\times\int_0^1\left(\prod_i \mathrm{d}y_i y_i^{\nu_i+j_t-1}\right)\delta\left(\sum_{i=1}^N y_i-1\right) \tag{14}$$
$$\times\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda\lambda^{(\Sigma_i\nu_t-D/2-k)-1}$$
$$\times\exp\left[\mathrm{i}\lambda\left(-\left(\sum_i y_i r_i\right)^2+\sum_i y_i r_i^2+\mathrm{i}\epsilon\right)\right].$$

Iduće se integrira po λ

$$
\begin{aligned}
& I_{\mu_1 \cdots \mu_P}^{N}(D;\{\nu_i\}) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\left(4\pi\mu^2\right)^{2-D/2} \\
& \times \sum_{\substack{k,j_1,\cdots,j_N \geq 0 \\ 2k+\sum_{j_i}=P}} \left\{[g]^k [r_1]^{j_1} \cdots [r_N]^{j_N}\right\}_{\mu_1 \cdots \mu_P} \\
& \times \frac{\Gamma\left(\sum_i \nu_i - D/2 - k\right)}{2^k \left[\prod_i \Gamma(\nu_i)\right]} (-1)^{\Sigma_i \nu_i + P - k} \\
& \times \int_0^1 \left(\prod_i \mathrm{d}y_i y_i^{\nu_i + j_i - 1}\right) \delta\left(\sum_{i=1}^N y_i - 1\right) \\
& \times \left[\left(\sum_i y_i r_i\right)^2 - \sum_i y_i r_i^2 - \mathrm{i}\epsilon\right]^{k+D/2-\Sigma_i \nu_t} .
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Za dobivanje integralne reprezentacije skalarnog integrala (5) koristimo iste tehnike i identitet koji vrijedi u prisutnosti Dirac delta funkcije u prošlom integralu.

$$
\left(\sum_i y_i r_i\right)^2 - \sum_i y_i r_i^2 = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}} y_i y_j (r_i - r_j)^2. \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
& I_0^N(D;\{\nu_i\}) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\left(4\pi\mu^2\right)^{2-D/2} \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^N \nu_i - D/2\right)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(\nu_i)} \\
& \times (-1)^{\Sigma_{i=1}^N \nu_i} \times \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^N \mathrm{d}y_i y_i^{\nu_i - 1}\right) \delta\left(\sum_{i=1}^N y_i - 1\right) \\
& \times \left[-\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^N y_i y_j (r_i - r_j)^2 - \mathrm{i}\epsilon\right]^{D/2 - \Sigma_{i=1}^N \nu_i} .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Sada se može napisati krajnji rezultat za tenzorsku dekompoziciju generalnog Feynmanovog integrala

$$
\begin{aligned}
& I_{\mu_1 \cdots \mu_P}^{N}(D;\{\nu_i\}) = \sum_{\substack{k,j_1,\cdots,j_N \geq 0 \\ 2k+\Sigma_{j_i}=P}} \left\{[g]^k [r_1]^{j_1} \cdots [r_N]^{j_N}\right\}_{\mu_1 \cdots \mu_P} \\
& \times \frac{\left(4\pi\mu^2\right)^{P-k}}{(-2)^k} \left[\prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(\nu_i + j_i)}{\Gamma(\nu_i)}\right] \\
& \times I_0^N\left(D + 2(P-k);\{\nu_i + j_i\}\right).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Rezultat (18) nam govori da bilo koji dimenzijsko regulirani tenzorski integral s N točaka se može prikazati kao linearna kompozicija skalarnih integrala s N točaka koji su pomnoženi sa kombinacijom metričkog tenzora i vanjskih 4-impulsa [7]. Time se ovaj problem reducirao na račun skalarnih integrala. U idućem poglavlju se pokazuje da skalarni integrali mogu biti reducirani na superpoziciju skalarnih integrala čije su potencije propagatora manje.

III. REKURZIJSKA METODA SKALARNIH INTEGRALA

Jer su translacijsko invarijantni dimenzijsko regulirani integrali vrijedi

$$
0 \equiv \int \frac{\mathrm{d}^D l}{(2\pi)^D} \frac{\partial}{\partial l^\mu} \left(\frac{z_0 l^\mu + \sum_{i=1}^N z_i r_i^\mu}{A_1^{\nu_1} \cdots A_N^{\nu_N}}\right). \tag{19}
$$

Ta relacija je posljedica Gaussovog teorema. U relaciji su z_i proizvoljne konstante. Nakon deriviranja, prijašnji izraz dobiva oblik

$$
\begin{aligned}
0 \equiv & \int \frac{\mathrm{d}^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{\prod_{k=1}^N A_k^{\nu_k}} \left[z_0 D - \sum_{j=1}^N \frac{\nu_j}{A_j} \left(\left(z_0 - \sum_{i=1}^N z_i\right)\right.\right. \\
& \times \left(l^2 - r_j^2\right) - \sum_{i=1}^N z_i (r_i - r_j)^2 + \sum_{i=1}^N z_i A_i + z_0 A_j \\
& \left.\left. - \mathrm{i}\epsilon\left(z_0 + \sum_{i=1}^N z_i\right)\right)\right] .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Da se relacija pojednostavi uzimamo da je $z_0 = \sum_{i=1}^N z_i$, te se dobiva

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \left[(r_j - r_i)^2 + 2\mathrm{i}\epsilon\right] z_i\right) \nu_j I_0^N(D;\{\nu_k + \delta_{kj}\}) \\
& = \sum_{i,j=1}^N z_i \nu_j I_0^N(D;\{\nu_k + \delta_{kj} - \delta_{ki}\}) - \left(D - \sum_{j=1}^N \nu_j\right) \\
& \times z_0 I_0^N(D;\{\nu_k\}) .
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Ovo je centralna jednadžba koja nam daje mogućnost rekurzijske metode, to omogućava činjenica da ako je ijedna od potencija $\nu_i = 0$ u Feynmanovom integralu sa N točaka, taj Feynmanov integral je reduciran na $N-1$ točaka. U jednadžbi (21) želimo izraz pojednostaviti tako da dio $\sum_i (r_j - r_i)^2 z_i$ možemo izvaditi iz sume po j. To se omogućava kroz postavljanje uvjeta da je

$$
\sum_{i=1}^N (r_i - r_j)^2 z_i = C, \quad j = 1, ..., N. \tag{22}
$$

Čime dobivamo sustav linearnih jednadžbi čije rješavanje diktira metodu rekurzije. Definiranjem varijable $r_{ij} = (r_i - r_j)^2$ sustav jednadžbi se matrično može prikazati kao

$$
\begin{pmatrix}
0 & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\
r_{12} & 0 & \cdots & r_{2N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{1N} & r_{2N} & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} C \\ C \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}. \tag{23}
$$

Ova analiza se može provesti i u slučaju masivnih propagatora transformacijom $r_{ij} \to r_{ij} - m_i^2 - m_j^2$. Za nastavak računa nam je potreban identitet [8]

$$-\sum_{j=1}^{N}\nu_j I_0^N\left(D;\{\nu_k+\delta_{kj}\}\right)=\left(4\pi\mu^2\right)^{-1}I_0^N\left(D-2;\{\nu_k\}\right). \tag{24}$$

Korištenjem ovog identiteta, zanemarivanjem dijela koji je proporcionalan s infinitezimalom iϵ, dodavanjem i oduzimanjem δ_{ji} te korištenjem relacije (22), jednadžba (21) postaje

$$\begin{aligned}CI_0^N\left(D-2;\{\nu_k\}\right)&=\sum_{i=1}^{N}z_iI_0^N\left(D-2;\{\nu_k-\delta_{ki}\}\right)\\&+\left(4\pi\mu^2\right)\left(D-1-\sum_{j=1}^{N}\nu_j\right)\\&\times z_0I_0^N\left(D;\{\nu_k\}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Za račun konstante C možemo napisati sustav (23) na drugi način koristeći $z_0=\sum_{i=1}^N z_i$ tako da nam je z_0 jedini slobodan parametar čijim izborom uvijek možemo naći rješenje sustava linearnih jednadžbi.

$$\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&r_{12}&\cdots&r_{1N}\\1&r_{12}&0&\cdots&r_{2N}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&r_{1N}&r_{2N}&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-C\\z_1\\z_2\\\vdots\\z_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}. \tag{26}$$

U daljnjem računu definiramo dvije kinematičke determinante $det(R_N)$ za sustav (23) i $det(S_N)$ za sustav (26), te za konstantu C dobijemo relaciju koja vrijedi za $det(S_N)\neq 0$

$$C=-z_0\frac{det(R_N)}{det(S_N)}. \tag{27}$$

S obzirom na iščezavanje gornjih determinanti razlikujemo četiri slučaja koji vode na različite rekurzijske relacije.

A. $det(S_N)\neq 0,\ det(R_N)\neq 0$

Jer imamo slobodu u izboru z_0, biramo $z_0=1$. Relaciju (21) gledamo za poseban slučaj gdje uzimamo $z_i=\delta_{ik}$ za $k=1,...,N$, opet član proporcionalan infinitezimalu iϵ zanemarujemo te se dobije

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\left(r_k-r_j\right)^2\nu_jI_0^N\left(D;\{\nu_i+\delta_{ij}\}\right)&=\sum_{j=1}^{N}\nu_j\\\times I_0^N\left(D;\{\nu_i+\delta_{ij}-\delta_{ik}\}\right)-&\left(D-\sum_{j=1}^{N}\nu_j\right)I_0^N\left(D;\{\nu_i\}\right).\end{aligned} \tag{28}$$

Također koristimo rekurzijsku relaciju (25) za smanjivanje dimenzionalnosti integrala, te je pišemo kao

$$\begin{aligned}I_0^N\left(D;\{\nu_k\}\right)=&\frac{1}{4\pi\mu^2\left(D-1-\sum_{j=1}^N\nu_j\right)}\left[CI_0^N\left(D-2;\{\nu_k\}\right)\right.\\&\left.-\sum_{i=1}^{N}z_iI_0^N\left(D-2;\{\nu_k-\delta_{ki}\}\right)\right].\end{aligned} \tag{29}$$

Sustav (28) je efektivno isti kao sustav (23). Rješavanjem tog sustava i korištenjem rekurzije (29), skalarni integrali se mogu prikazati kao linearna kombinacija integrala $I_0^N(\overline{D};\{1\})$, gdje uzimamo $\overline{D}=4+2\varepsilon$, a ε je infinitezimalni parametar dimenzijske regularizacije. Dvije relacije za smanjivanje dimenzionalnosti integrala i smanjivanje potencija propagatora se mogu kombinirati u jednu tako da dodamo i oduzmemo $\delta_{jk}I_0^N(D;\{\nu_i+\delta_{ij}-\delta_{ik}\}$ u prvom članu desne strane relacije (28) i korištenjem identiteta (24), tako da na kraju dobijemo

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}\left(r_k-r_j\right)^2\nu_jI_0^N\left(D;\{\nu_i+\delta_{ij}\}\right)=-\left(4\pi\mu^2\right)^{-1}\\&\times I_0^N\left(D-2;\{\nu_i-\delta_{ik}\}\right)-\left(D-1-\sum_{j=1}^{N}\nu_j\right)\\&\times I_0^N\left(D;\{\nu_i\}\right),\quad k=1,\cdots,N.\end{aligned} \tag{30}$$

Dolazimo do još korisnije relacije izražavanjem drugog člana u desnoj strani jednadžbe (30) preko jednadžbe (29)

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}\left(r_k-r_j\right)^2\nu_jI_0^N\left(D;\{\nu_i+\delta_{ij}\}\right)=\left(4\pi\mu^2\right)^{-1}\\&\times\left[\sum_{j=1}^{N}\left(z_j-\delta_{jk}\right)I_0^N\left(D-2;\{\nu_i-\delta_{ij}\}\right)\right.\\&\left.-CI_0^N\left(D-2;\{\nu_i\}\right)\right],\quad k=1,\cdots,N.\end{aligned} \tag{31}$$

Ova jednadžba je najpraktičnija za koristiti jer istovremeno smanjuje broj dimenzija i smanjuje potenciju propagatora te predstavlja put prema dobivanju fundamentalnih integrala čijom superpozicijom možemo prikazati skalarni integral u (18).

B. $det(S_N)\neq 0,\ det(R_N)=0$

Za ovaj slučaj također koristimo izbor $z_0=1$, te iz relacije (27) vidimo da je $C=0$, pa se (25) može napisati kao

$$\begin{aligned}I_0^N\left(D;\{\nu_k\}\right)=&\frac{1}{4\pi\mu^2\left(D-1-\sum_{j=1}^N\nu_j\right)}\\&\times\left[-\sum_{i=1}^{N}z_iI_0^N\left(D-2;\{\nu_k-\delta_{ki}\}\right)\right].\end{aligned} \tag{32}$$

Tu vidimo da integral ovakvog tipa možemo pojednostaviti po dimenzionalnosti kroz linearnu kombinaciju i imat ćemo integral s brojem propagatora manjim od N.

C. $det(S_N) = 0,\ det(R_N) \neq 0$

Ovaj slučaj proizlazi samo ako je prvi red matrice sustava (26) linearna kombinacija ostalih redova (zbog toga vrijedi $det(S_N) = 0$). Taj sustav ima rješenje samo ako je $z_0 = 0$, te možemo konstantu C proizvoljno izabrati (uzimamo da $C = 1$) te jednadžba (25) postaje

$$I_0^N(D; \{\nu_k\}) = \sum_{i=1}^{N} z_i I_0^N(D; \{\nu_k - \delta_{ki}\}). \qquad (33)$$

Dok ovdje ne dobijemo redukciju u dimenzionalnosti, još imamo činjenicu da se skalarni integrali ovakvog tipa mogu reducirati na linearnu kombinaciju skalarnih integrala s manjim brojem propagatora.

D. $det(S_N) = 0,\ det(R_N) = 0$

U ovom slučaju se dobiju dvije različite rekurzijske relacije ovisno o izboru parametra C. Za izvesti ih, potrebno je u sustavu (26) oduzeti od prvih N jednadžbi $N+1$ jednadžbu, čime se dobije

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -r_{1N} & r_{12} - r_{2N} & \cdots & r_{1N} \\ 0 & r_{12} - r_{1N} & -r_{2N} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r_{1,N-1} - r_{1N} & r_{2,N-1} - r_{2N} & \cdots & r_{N-1,N} \\ 1 & r_{1N} & r_{2,N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -C \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Jer je determinanta ovog sustava nula, te da postoji rješenje z_i sustava mora se izabrati $z_0 = 0$. Za taj izbor z_0, $N+1$ jednadžba glasi

$$\sum_{i=1}^{N} r_{iN}^2 z_i = C. \qquad (35)$$

Proizvoljnim izborom konstante C jedan od slobodnih parametara može biti fiksiran. U jednadžbi (35) kada primjerice imamo kolinearne vanjske linije, može doći do toga da lijeva strana jednadžbe postane nula, te tada biramo $C = 0$. Tada dobijemo relaciju (33). Za odabir $C = 1$ iz jednadžbe (25) se dobije

$$0 = \sum_{i=1}^{N} z_i I_0(D; \{\nu_k - \delta_{ki}\}). \qquad (36)$$

Na prvu, jednadžba (36) izgleda kao da ne daje rekurziju, no ako uzmemo $z_1 \neq 0$, relacija se može napisati kao

$$z_1 I_0^N(D; \{\nu_k\}) = -\sum_{i=2}^{N} z_i I_0(D; \{\nu_k - \delta_{ki} + \delta_{k1}\}). \qquad (37)$$

Te se u ovoj reprezentaciji može vidjeti da integral sa N vanjskih linija može prikazati kao linearna kombinacija integrala sa $N-1$ vanjskih linija. U zadnja tri slučaja postoji direktna poveznica između integrala sa većom potencijom propagatora i linearnom kombinacijom integrala s manjim potencijama propagatora. Po tome možemo dovesti redukciju do skupa fundamentalnih integrala od čije linearne kompozicije se može napisati bilo koji skalarni integral što će se napraviti u idućem poglavlju.

IV. FUNDAMENTALNI SKUP SKALARNIH INTEGRALA

Za dobivanje fundamentalnog skupa integrala od pomoći je izračun $det(S_N)$ i slučaja kada determinanta nestaje. U sustavu (23), oduzimanjem zadnjeg stupca od drugog do N-tog stupca, te primjenom istog procesa za redove, za determinantu sustava se dobije

$$det(S_N) = -det[-2(r_i - r_N)(r_j - r_N)], \quad i, j = 1, ..., N-1. \qquad (38)$$

Može se vidjeti da je ova determinanta proporcionalna Gramovoj determinanti, što je determinanta skalarnih produkta 4-vektora. Zbog činjenice da smo u 4-dimenzionalnom Minkowski prostoru, determinanta postaje nula za $N > 5$, te je direktna posljedica toga da se svi integrali gdje je $N > 5$ mogu prikazati preko linearne kombinacije integrala gdje je $N \leq 5$, te po tome preko integrala $I_0^3(4+2\varepsilon; \{1\})$, $I_0^4(4+2\varepsilon; \{1\})$, $I_0^5(4+2\varepsilon; \{1\})$ i generalnog integrala za dvije točke $I_0^2(D; \nu_1, \nu_2)$, za koje je jednostavno dobiti analitički izraz. Ako stavimo $D = 6 + 2\varepsilon$, $N = 5$ i $\nu_i = 1$ u jednadžbu (25) dobije se

$$\begin{aligned} C I_0^5(4+2\varepsilon; \{1\} &= \sum_{i=1}^{5} z_i I_0^5(4+2\varepsilon; \{\delta_{kk} - \delta_{ki}\}) \\ &+ (4\pi\mu^2)(2\varepsilon) I_0^5(6+2\varepsilon; \{1\}). \end{aligned} \qquad (39)$$

Ova jednadžba govori da se $N = 5$ skalarni integral može prikazati preko $N = 4$ skalarnih integrala i dijela linearnog u ε kojeg zanemarujemo. U cijelom procesu tenzorske dekompozicije i redukcije do fundmanetalnih integrala, ne dolazi do članova oblika $(1/\varepsilon) I_0^5(6+2\varepsilon; \{1\})$. Činjenica je empirijska, jer u konačnim izrazima za fizikalne veličine svi članovi koji sadrže integral $I_0^5(6 + 2\varepsilon; \{1\})$ se uvijek kombiniraju tako da ovaj integral na kraju bude pomnožen s koeficijentima linearnim u ε i kao takav se može izostaviti u jednopetljenim izračunima [3]. Ako bi postajao primjer gdje ne dolazi do kraćenja koeficijenta ε u jednadžbi , tada bi $I_0^5(6+2\varepsilon; \{1\})$ bio fundamentalni integral. U bezmasenim teorijama vidimo da možemo bilo koji jednopetljeni proces prikazati preko integrala (skup fundamentalnih integrala) koji imaju dvije, tri i četiri vanjske linije: $I_0^2(\overline{D};\nu_1,\nu_2)$, $I_0^3(4+2\varepsilon;\{1\})$, $I_0^4(4+2\varepsilon;\{1\})$. Sada će biti izračunat integral za dvije vanjske linije, te će biti definirani integrali za $N=3$ i $N=4$ ovisno o kinematičkim varijablama.

A. Opći skalarni integral za $N = 2$

Opći skalarni integral za $N=2$ pišemo kao

$$I_0^2(D;\nu_1,\nu_2) \equiv (\mu^2)^{2-D/2}\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D}\frac{1}{A_1^{\nu_1}A_2^{\nu_2}}. \tag{40}$$

Rješenje ovog integrala za $D=n+2\varepsilon$

$$\begin{aligned}I_0^2(n+2\varepsilon;\nu_1,\nu_2) &= \left(4\pi\mu^2\right)^{2-n/2}(-1)^{\nu_1+\nu_2}\\ &\times\left(-p^2-\mathrm{i}\epsilon\right)^{n/2-\nu_1-\nu_2}\frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2-n/2-\varepsilon)}{\Gamma(-\varepsilon)}\frac{\Gamma(n/2-\nu_1+\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\\ &\times\frac{\Gamma(n/2-\nu_2+\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\frac{1}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}\frac{\Gamma(2+2\varepsilon)}{\Gamma(n-\nu_1-\nu_2+2\varepsilon)}\\ &\times I_0^2(4+2\varepsilon,1,1),\end{aligned} \tag{41}$$

te za $D=4+2\varepsilon$

$$I_0^2(4+2\varepsilon;1,1) = \frac{i}{(4\pi)^2}\left(-\frac{p^2+\mathrm{i}\epsilon}{4\pi\mu^2}\right)^{\varepsilon}\frac{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma^2(1+\varepsilon)}{\Gamma(2+2\varepsilon)}. \tag{42}$$

B. Opći skalarni integrali za $N = 3$

Skalarni integral za $N=3$ je

$$I_0^3(4+2\varepsilon;\{1\}) = (\mu^2)^{-\varepsilon}\int\frac{d^{4+2\varepsilon}l}{(2\pi)^{4+2\varepsilon}}\frac{1}{A_1A_2A_3}. \tag{43}$$

Ako uzmemo da su vanjske čestice na ljusci mase, i koristeći jednadžbu (17), možemo pisati

$$\begin{aligned}I_0^3(4+2\varepsilon,\{1\}) &= \frac{-\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\\ &\times\delta(x_1+x_2+x_3-1)\left(-x_1x_2m_2^2-x_2x_3m_3^2\right.\\ &\left.-x_3x_1m_1^2-\mathrm{i}\epsilon\right)^{\varepsilon-1}.\end{aligned} \tag{44}$$

Ovaj integral je invarijantan na permutacije kvadrata vanjskih masa $p_i^2=m_i^2$. Ovisno o broju bezmasenih vanjskih linija, možemo definirati tri integrala: $I_3^{1m}\equiv I_0^3(4+2\varepsilon,\{1\};0,0,m_3^2)$, $I_3^{2m}\equiv I_0^3(4+2\varepsilon,\{1\};0,m_2^2,m_3^2)$ i $I_3^{2m}\equiv I_0^3(4+2\varepsilon,\{1\};m_1^2,m_2^2,m_3^2)$. I_3^{1m} i I_3^{2m} su IR divergentni te moraju biti izračunati za $\varepsilon>0$, a I_3^{3m} je konačan te se uzima $\varepsilon=0$. Rješenja determinanti $det(R_N)$ i $det(S_N)$ za $N=3$ su

$$det(R_3) = 2m_1^2m_2^2m_3^2. \tag{45}$$

$$\begin{aligned}det(S_3) &= (m_1^2)^2+(m_2^2)^2+(m_3^2)^2-2m_1^2m_2^2-2m_1^2m_3^2\\ &-2m_2^2m_3^2.\end{aligned} \tag{46}$$

Iz (45) se može vidjeti ako je ijedna od vanjskih linija na ljusci mase, determinanta je nula. Tada koristeći rekurzijske relacije (slučaj B. ili D.) možemo integrale I_3^{1m} i I_3^{2m} reducirati na integrale sa dvije vanjske linije. Time je I_3^{3m} jedini fundamentalni integral oblika [9]

$$\begin{aligned}I_3\left(\mu_1^2,\mu_2^2,\mu_3^2,\epsilon\right) &= \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\frac{1}{\nu_3(x_1-x_2)}\left\{2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x_2}\right)\right.\\ &-2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x_1}\right)+\ln\left[x_1x_2+\mathrm{i}\epsilon\,\mathrm{sign}(\nu_3)\right]\\ &\left.\times\left[\ln\left(\frac{1-x_1}{-x_1}\right)-\ln\left(\frac{1-x_2}{-x_2}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{47}$$

Gdje su $x_{1,2}$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{m_1^2}{m_2^2}+\frac{m_3^2}{m_2^2}\pm\sqrt{\left(1-\frac{m_1^2}{m_2^2}-\frac{m_3^2}{m_2^2}\right)^2-4\frac{m_1^2}{m_2^2}\frac{m_3^2}{m_2^2}}\right]. \tag{48}$$

Kada je $x_1=x_2$, može se iskoristiti rekurzijska relacija slučaja C.

C. Opći skalarni integrali za $N = 4$

Skalarni integral za $N=4$ je

$$I_0^4(4+2\varepsilon;\{1\}) = (\mu^2)^{-\varepsilon}\int\frac{d^{4+2\varepsilon}l}{(2\pi)^{4+2\varepsilon}}\frac{1}{A_1A_2A_3A_4}. \tag{49}$$

Koristeći mase vanjskih linija i Mandelstamove varijable, integral možemo napisati kao [10]

$$\begin{aligned}I_0^4(4+2\varepsilon,\{1\}) &= \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}}\int_0^1\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\\ &\times\delta(x_1+x_2+x_3+x_4-1)\left(-x_1x_3t-x_2x_4s\right.\\ &\left.-x_1x_2m_2^2-x_2x_3m_3^2-x_3x_4m_4^2-x_1x_4m_1^2-\mathrm{i}\epsilon\right)^{\varepsilon-2}.\end{aligned} \tag{50}$$

Može se primjetiti da je integral invarijantan na permutacije uređenih parova (s,t), $(m_1^2,m_3^2$ i (m_2^2,m_4^2). Determinante za $N=4$ su

$$\begin{aligned}det(R_4) =&s^2t^2+\left(m_1^2m_3^2\right)^2+\left(m_2^2m_4^2\right)^2\\ &-2stm_1^2m_3^2-2stm_2^2m_4^2-2m_1^2m_2^2m_3^2m_4^2.\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}det(S_4) =&2\left[st\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2-s-t\right)\right.\\ &+m_2^2m_4^2\left(s+t+m_1^2+m_3^2-m_2^2-m_4^2\right)\\ &+m_1^2m_3^2\left(s+t-m_1^2-m_3^2+m_2^2+m_4^2\right)\\ &\left.-s\left(m_1^2m_2^2+m_3^2m_4^2\right)-t\left(m_1^2m_4^2+m_2^2m_3^2\right)\right].\end{aligned} \tag{52}$$

Da integrali budu fundamentalni, gledajući u $det(R_4)$, bitno je da obje kinematičke varijable u barem jednom uređenom paru budu različite od nula. Možemo uzeti (s,t) kao taj uređeni par. Time se definiraju integrali [10]

$$\begin{aligned}
I_4^{4m} &\equiv I_0^4\left(4,\{1\};s,t,m_1^2,m_2^2,m_3^2,m_4^2\right), \\
I_4^{3m} &\equiv I_0^4\left(4+2\varepsilon,\{1\};s,t,0,m_2^2,m_3^2,m_4^2\right), \\
I_4^{2mh} &\equiv I_0^4\left(4+2\varepsilon,\{1\};s,t,0,0,m_3^2,m_4^2\right), \\
I_4^{2me} &\equiv I_0^4\left(4+2\varepsilon,\{1\};s,t,0,m_2^2,0,m_4^2\right), \\
I_4^{1m} &\equiv I_0^4\left(4+2\varepsilon,\{1\};s,t,0,0,0,m_4^2\right), \\
I_4^{0m} &\equiv I_0^4(4+2\varepsilon,\{1\};s,t,0,0,0,0,).
\end{aligned} \tag{53}$$

Jedino je integral I_4^{4m} IR konačan, ostali moraju biti izračunati za $\varepsilon > 0$. Svi integrali se mogu prikazati kao [11]

$$\begin{aligned}
&I_4^K\left(s,t;m_i^2\right) = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma^2(1+\varepsilon)}{\Gamma(1+2\varepsilon)}\frac{1}{\sqrt{\det\left(R_4^K\right)}} \\
&\times\left[\frac{G^K\left(s,t;\varepsilon;m_i^2\right)}{\varepsilon^2}+H^K\left(s,t;m_i^2\right)\right]+\mathcal{O}(\varepsilon) \\
&K\in\{0m,1m,2me,2mh,3m,4m\}.
\end{aligned} \tag{54}$$

IR divergencije su prisutne u prvom članu u zagradi, a drugi član je uvijek konačan. Po ovome se integral (5) može prikazati kao linearna kompozicija fundamentalnog skupa integrala: $I_0^2(\overline{D};\nu_1,\nu_2)$, I_3^{3m}, I_4^{4m}, I_4^{3m}, I_4^{2mh}, I_4^{2me}, I_4^{1m} i I_4^{0m}. Moguće je izabrati i alternativni skup integrala preko $D = 6+2\varepsilon$ box integrala.

V. ZAKLJUČAK

Provedena je analiza jednopetljenih Feynmanovih integrala sa proizvoljnim brojem točaka N integriranih u $D = 4+2\varepsilon$. Prvo je napravljena tenzorska dekompozicija općeg tenzorskog Feynmanovog integrala. Rezultat dekompozicije je (18) u kojoj vidimo da originalan integral se može prikazati kao linearna kombinacija skalarnih integrala i izoliranog tenzorskog dijela koji se sastoji od 4-impulsa vanjskih linija i metričkog tenzora. To daje mogućnost fokusiranja na skalarni dio, jer skalarni dio nadalje diktira redukciju početnog integrala. Sljedeće se izvode rekurzijske metode koje su ovisne o vrijednostima kinematičkih determinanti $det(R_N)$ i $det(S_N)$, te time su dana četiri različita slučaja. Iz njih je primjećeno da reduciraju broj vanjskih linija, te zbog činjenice da je $det(S_N)$ proporcionalna Gramovoj determinanti i jer su vanjski impulsi četverodimenzionalni, dolazi se do zaključka da svi integrali sa $N > 5$ točaka se mogu reducirati na fundamentalni skup integrala sa $N = 2,3,4,5$ točaka. No proveden je račun za $I_0^5(4+2\varepsilon;\{1\})$ te je pokazano da se može prikazati kao linearna kombinacija $N = 4$ integrala (39), što eliminira $N = 5$ opciju. Na kraju je dobiven skup fundamentalnih integrala čijom linearnom kombinacijom možemo dobiti bilo koji jednopetljeni Feynmanov integral: $I_0^2(\overline{D};\nu_1,\nu_2)$, I_3^{3m}, I_4^{4m}, I_4^{3m}, I_4^{2mh}, I_4^{2me}, I_4^{1m} i I_4^{0m}.

[1] "Review on Quantum Chromodynamics". Particle Data Group.

[2] A. Ilakovac, Teorija polja, skripta (2025).

[3] G. Duplancic and B. Nizic, Eur. Phys. J. C **35** (2004), 105-118 doi:10.1140/epjc/s2004-01723-7 [arXiv:hep-ph/0303184 [hep-ph]].

[4] G. 't Hooft and M. Veltman, "Regularization and Renormalization of Gauge Fields," Nuclear Physics B, vol. 44, no. 1, pp. 189–213, 1972.

[5] R. P. Feynman, "Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics," Physical Review, vol. 76, no. 6, pp. 769–789, 1949.

[6] O. V. Tarasov, Phys. Rev. D **54** (1996), 6479-6490 doi:10.1103/PhysRevD.54.6479 [arXiv:hep-th/9606018 [hep-th]].

[7] Passarino, G., Veltman, M.J. (1979). One-loop corrections for e^+ e^- annihilation into μ^+ μ^- in the Weinberg model. Nuclear Physics, 160, 151-207.

[8] A. I. Davydychev, Phys. Lett. B 263 (1991) 107.

[9] G. Duplancic and B. Nizic, Eur. Phys. J. C **24** (2002), 385-391 doi:10.1007/s100520200943 [arXiv:hep-ph/0201306 [hep-ph]].

[10] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, Nucl. Phys. B **412** (1994), 751-816 doi:10.1016/0550-3213(94)90398-0 [arXiv:hep-ph/9306240 [hep-ph]].

[11] G. Duplancic and B. Nizic, Eur. Phys. J. C **20** (2001), 357-370 doi:10.1007/s100520100675 [arXiv:hep-ph/0006249 [hep-ph]].