

Višečestični problem u nehermitskoj kvantnoj mehanici

Marko Šimić*

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet,
Bijenička 32, Zagreb

Mentor: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan†

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet,
Bijenička 32, Zagreb

(Datum: 19. siječnja 2025.)

Ovaj seminar istražuje osnovne koncepte nehermitske kvantne fizike kroz primjenu Hatano-Nelson modela. Fokus je na sustavu s dva bozona, gdje se analiziraju energijski spektri, gustoće vjerojatnosti i dvočestična korelacijska funkcija kao ključni alat za razumijevanje korelacija i ponašanja u nehermitskim sustavima. Prikazat će se matematički pristup modeliranju, numerički rezultati, te diskusija o fizikalnom značenju dobivenih podataka.

I. UVOD

Jedan od temeljnih zahtjeva kvantne mehanike je da opservable, poput hamiltoniana, u zatvorenim sustavima budu hermitske matrice. Ipak, realni fizikalni sustavi uvijek su u određenoj mjeri povezani s okolinom, što zahtijeva primjenu alternativnih pristupa za njihov opis zbog prisustva disipativnih procesa. Jedan od najpoznatijih takvih primjera su otvoreni sustavi u kontaktu s okolinom, čije ponašanje opisuje Lindbladova master jednadžba, koja opisuje vremensku evoluciju matrice gustoće takvih sustava [1]. Takav pristup je često tehnički prezahtjevan i time uvelike ograničava broj sustava koje možemo proučavati.

Time dolazimo do glavne ideje nehermitske kvantne mehanike. Kako bismo smanjili tehničku zahtjevnost problema i proširili broj sustava koje možemo razmatrati, interakciju s okolinom, odnosno disipaciju, opisujemo članovima u hamiltonijanu koji mu narušavaju hermitičnost. Problem se svodi na rješavanje Schrödingrove jednadžbe uz efektivni nehermitski (NH) hamiltonijan sustava. Posljedica ovog pristupa je pojavljivanje niza efekata koji nemaju svoj *hermitiski* ekvivalent.

A. Nehermitski sustav s dva nivoa

Kako bismo dobili intuitivni osjećaj za nehermitsku kvantnu fiziku, pogledajmo jednostavni primjer sustava s dva nivoa [2]. Neka je hamiltonian NH matrica

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

čiji spektar kompleksnih energija

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{\alpha} \quad (2)$$

generira neunitarnu vremensku evoluciju. Odnosno, norma valne funkcije nije očuvana vremenskom evolucijom. Za razliku od hermitskog slučaja, više nije dovoljno riješiti samo jednadžbu $H\psi_{R,\pm} = E_{\pm}\psi_{R,\pm}$, gdje su $\psi_{R,\pm}$ svojstveni *ket*-vektori, koje još nazivamo i *desnim* svojstvenim vektorima. Za potpuni opis sustava, također rješavamo jednadžbu $\psi_{L,\pm}H = \psi_{L,\pm}E_{\pm}$, gdje su $\psi_{L,\pm}$ svojstveni *bra*-vektori, odnosno tzv. *lijevi* svojstveni vektori, jer u nehermitskim sustavima općenito $\psi_{R,\pm} \neq \psi_{L,\pm}^\dagger$. Konkretno u našem slučaju

$$\psi_{R,\pm} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{L,\pm} = (1 \pm \sqrt{\alpha}). \quad (3)$$

Osim pojave da *lijevi* i *desni* svojstveni vektori nisu jednostavno povezani, možemo primjetiti kako $\psi_{R/L,+}$ i $\psi_{R/L,-}$ nisu ortogonalni za $\alpha \neq 1$.

Vidimo, također, da za $\alpha = 0$, energije postaju degenerirane, $E = 0$, no događa se i to da $\psi_{R/L,+} = \psi_{R/L,-}$. Hamiltonian postaje defektna matrica, tj. broj linearne nezavisnih svojstvenih vektora je manji od stupnja degeneracije karakterističnog polinoma. Kažemo da se svojstveni vektori *sjedinjuju* [3] i da je $E = 0$ tzv. *exceptional point* (EP)[4].

B. Biortogonalna baza

Kako bismo riješili problem neortogonalnosti svojstvenih vektora, iz našeg primjera primjećujemo da za $\alpha \neq 0$ vrijedi $\langle \psi_{L,\mp} | \psi_{R,\pm} \rangle = 0$. Lijevi i desni vektori su međusobno ortogonalni kada se sustav ne nalazi u *exceptional point-u*.

Prema *Kunst et al.* [5], kada se ne nalazimo u EP-u, smijemo zahtijevati

$$\langle \psi_{L,i} | \psi_{R,j} \rangle = \delta_{i,j}. \quad (4)$$

Očekivana vrijednost nekog operatora \hat{A} tada postaje

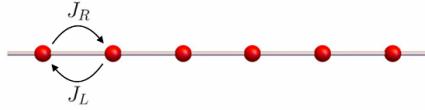
$$\langle \hat{A} \rangle_{i,j} = \langle \psi_{L,i} | \hat{A} | \psi_{R,j} \rangle. \quad (5)$$

* msimic.phy@pmf.hr

† hbuljan@phy.hr

Skupovi $\{|\psi_R\rangle\}$, $\{|\psi_L\rangle\}$ zajedno čine *biortogonalnu bazu*, dok se očekivane vrijednosti ovog tipa nazivaju *biortogonalne očekivane vrijednosti* i ključne su za razumijevanje pojava u nehermitskoj kvantnoj mehanici.

II. HATANO-NELSON MODEL



Slika 1: Shematski prikaz Hatano-Nelson modela [2]

Sustav koji promatramo kroz ovaj seminar (Slika 1) je 1D lanac u aproksimaciji čvrste veze (TBA), s preskokima samo između najbližih susjeda. Glavna karakteristika ovog modela je da se amplituda preskoka ulijevo (J_L) nije jednaka amplitudi preskoka udesno (J_R). Ovakav sustav naziva se *Hatano-Nelson model* [6] i jednočestični hamiltonian ovog sustava glasi [2]

$$H = \sum_n (-J_L a_n^\dagger a_{n+1} - J_R a_{n+1}^\dagger a_n) \quad J_L, J_R \in \mathbb{R} \quad (6)$$

gdje operator a_n^\dagger (a_n) stvara (poništava) stanje na n -tom čvoru ([7]) lanca. Kada je lanac beskonačno dug, energijski spektar se dobije kao

$$E_k = (J_L + J_R) \cos(k) + i(J_L - J_R) \sin(k). \quad (7)$$

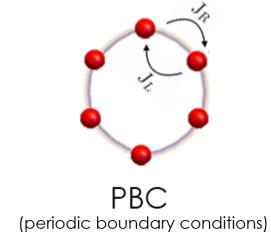
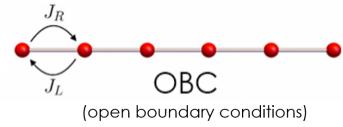
Energije su očekivano kompleksne, te vidimo da u slučaju $J_L = J_R$ dobijemo dobro poznati energijski spektar 1D TBA lanca.

A. Rubni uvjeti

Pravi efekti nehermitske prirode ovog sustava se počinju vidjeti kada dopustimo da lanac nije beskonačan, nego da ima konačan broj čvorova L . Tada nam bitnu ulogu igraju rubni uvjeti koje izaberemo. Dva standardna slučaja koja promatramo su (vidi sliku 2)

- *periodični rubni uvjeti* (PBC), gdje vrijedi da su dva kraja lanca prvi susjedi
- *otvoreni rubni uvjeti* (OBC) gdje krajevi lanca nisu povezani jedan s drugim.

Ponašanje ovog jednočestičnog sustava analizirano je promatranjem energijskih spektara i gustoća vjerojatnosti uz metode opisane u sljedećem potpoglavlju.



Slika 2: Shematski prikaz otvorenih rubnih uvjeta (gore) i periodičnih rubnih uvjeta (dolje) u Hatano-Nelson modelu.

1. Numeričke metode

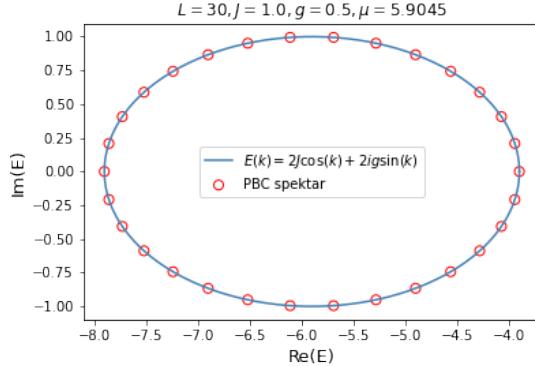
Kako bismo pomoću programskih paketa *scipy*, *numpy*, *matplotlib* u *Pythonu* analizirali energijske spektre i gustoće vjerojatnosti ovog sustava (a kasnije i sustava s više čestica); J_L , J_R parametriziramo pomoću *hermitskog* J i *nehermitskog* g [8] tako da vrijedi $J_L = J - g$, a $J_R = J + g$, te zbog numeričke stabilnosti dodamo kemijski potencijal μ koji fizikalno daje samo pomak u energiji. Hamiltonian tada izgleda

$$H = \sum_{n=1}^L [-(J - g)a_n^\dagger a_{n+1} - (J + g)a_{n+1}^\dagger a_n - \mu \hat{n}_n] \quad (8)$$

gdje $\hat{n}_n = a_n^\dagger a_n$ broj čestica na n -tom čvoru lanca, a L broj čvorova lanca. Kroz čitav račun koristimo $J = 1.0$, $\mu = 5.9045$. Energijeske spektre prikazujemo u kompleksnoj ravnini. Gustoće vjerojatnosti promatramo za sva stanja sustava, u ovisnosti o položaju, i računamo kao $|\psi(x)|^2$, gdje je $\psi(x)$ neko svojstveno stanje sustava.

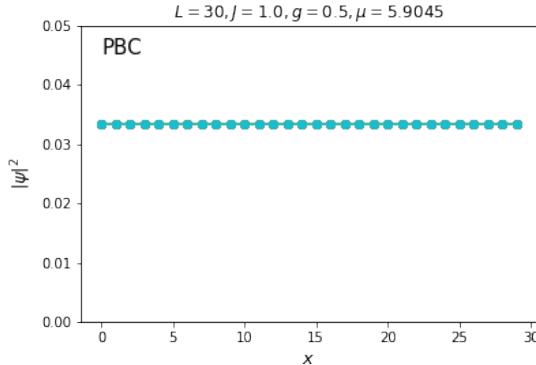
2. Periodični rubni uvjeti (PBC)

Na slici 3 vidimo kako izgleda jednočestični spektar lanca s periodičnim rubnim uvjetima, prikazan u kompleksnoj ravnini, u odnosu na jednočestični spektar beskonačno dugog lanca. Ponašanje je u skladu s očekivanim te vidimo da bi za $L \rightarrow \infty$, spektar bio jednak spektru beskonačno dugog lanca.



Slika 3: Prikaz jednočestičnog energijskog spektra u lancu s $L = 30$ čvorova i periodičnim rubnim uvjetima (crveno), u odnosu na energijski spektar beskonačnog lanca (plavo). Nehermitski parametar g iznosi $g = 0.5$.

Gustoća vjerojatnosti u ovisnosti o položaju u sustavu s periodičnim rubnim uvjetima (Slika 4) je uniformna i iznosi $\frac{1}{L}$. Rezultat je u skladu s očekivanjima jer je ovakav sustav translacijski invarijantan.

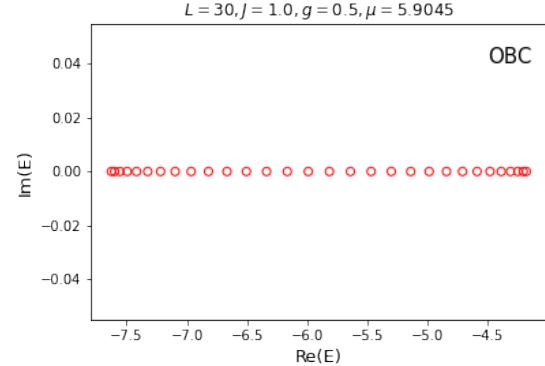


Slika 4: Prikaz gustoće vjerojatnosti svih eigenstanja u ovisnosti o položaju u jednočestičnom sustavu s periodičnim rubnim uvjetima. Gustoća je uniformna za svako eigenstanje i iznosi $\frac{1}{L}$.

3. Otvoreni rubni uvjeti (OBC) i nehermitski skin efekt

Situacija je drastično različita u slučaju otvorenih rubnih uvjeta. Energije više nisu kompleksne već u potpunosti leže na realnoj osi (Slika 5). Posljedica toga je da se *PBC* spektar i *OBC* spektar ne poklapaju u $L \rightarrow \infty$ limesu. Energije OBC spektra, odnosno spektra sustava s otvorenim rubnim uvjetima ostaju realne.

Matematičko objašnjenje ovog fenomena kaže da postoji preslikavanje koje nehermitski OBC hamiltonijan pretvara u hermitsku matricu [9]. No, za fizikalno razumijevanje potrebno je pogledati što se događa s valnim funkcijama svojstvenih stanja, odnosno gustoćama vjerojatnosti (Slika 6). Sva eigenstanja lokalizirana su na



Slika 5: Energijski spektar u jednočestičnom Hatano-Nelson modelu s otvorenim rubnim uvjetima uz $L = 30, g = 0.5$.

nekoliko zadnjih čvorova lanca. Povećavanjem nehermit-skog parametra g , lokalizacija na zadnjem čvoru lanca se povećava.

U slučaju $g = 1.0$, odnosno $J_L = 0, J_R = 2.0$, vjerojatnost pronalaska čestice bilo gdje osim na zadnjem čvoru lanca bila bi jednaka nuli. Sva eigenstanja se *sjedine* i sustav se nalazi u EP-u. Ta pojava, jedinstvena nehermitskim sustavima, se naziva *nehermitski skin efekt* [5]. Dakle, fizikalno, lokalizacija potiskuje nehermitske parametre sustava s otvorenim rubnim uvjetima te se zbog toga sustav efektivno ponaša kao hermitski i spektar je isključivo realan.

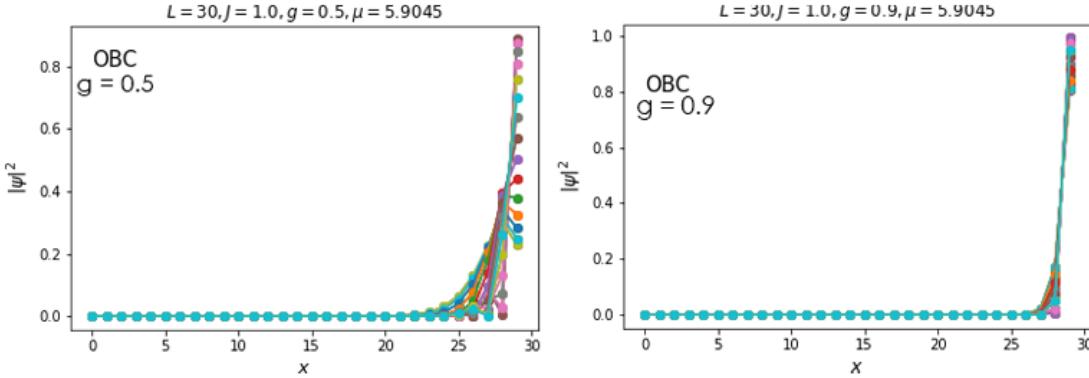
III. DVA INTERAGIRAJUĆA BOZONA NA LANCU

Dosada smo promatrali sustav sa samo jednom česticom i vidjeli kako dolazi do efekata koji nemaju svoje ekvivalente u *hermitskoj* kvantnoj mehanici. U ovom poglavlju nas zanima što bi se dogodilo kada bismo u sustav, umjesto jedne, stavili dvije čestice i dopustili da međusobno interagiraju. Točnije, zanima nas kako interakcija utječe na nehermitske efekte viđene u jednočestičnom slučaju te kako ti isti nehermitski efekti utječu na interakciju među česticama.

Kako bismo konkretnizirali problem, uzimamo da nam se na lancu nalaze dva interagirajuća bozona. Hamiltonijan tada zapisujemo

$$H = \sum_{n=1}^L [-(J-g)a_n^\dagger a_{n+1} - (J+g)a_{n+1}^\dagger a_n + \frac{U}{2}\hat{n}_n(\hat{n}_n - 1) - \mu\hat{n}_n] \quad (9)$$

gdje smo, u odnosu na prije, dodali član $\frac{U}{2}\hat{n}_n(\hat{n}_n - 1)$, koji predstavlja tzv. *on-site* interakciju među bozonima, odnosno bozoni interagiraju samo kada se nalaze na istom



Slika 6: Prikaz gustoće vjerojatnosti svih svojstvenih stanja u jednočestičnom sustavu s otvorenim rubnim uvjetima za $g = 0.5$ (lijevo) i $g = 0.9$ (desno). Kako povećavamo nehermitski parametar g čestice se sve više lokaliziraju na zadnjem čvoru lanca

čvoru lanca. Jakost interakcije određena je parametrom U , operatori a_i^\dagger, a_j zadovoljavaju bozonske komutacijske relacije ([10], [11]), dok su svi ostali parametri isti kao i prije.

A. Metode računa i analiza

Utjecaj interakcije među česticama na nehermitske efekte promatrati ćemo analizom PBC i OBC energijskih spektara i gustoća vjerojatnosti te uspoređujući rezultate s jednočestičnim slučajem i slučajem bez interakcije. Kako nehermitski efekti utječu na interakciju među česticama promatrati ćemo u kanonskom ansamblu na konačnoj temperaturi T s periodičnim rubnim uvjetima (PBC) pomoću dvočestične korelacijske funkcije te rezultate usporediti s hermitskim slučajem.

1. Numeričke metode

Uz standardne Python pakete *numpy*, *scipy*, *matplotlib*, za konstrukciju hamiltonijana koristili smo paket QuSpin [12], razvijen za analizu višečestičnih problema u aproksimaciji čvrste veze. Kroz čitav numerički račun korištene su vrijednosti parametara $J = 1.0$, $\mu = 5.9045$, odbojna interakcija ($U > 0$) i temperatura $k_B T = 0.1J$ (niskotemperaturni limes).

2. Energijski spektri i gustoća vjerojatnosti

Energijske spekture opet prikazujemo u kompleksnoj ravnini, dok gustoću vjerojatnosti $|\psi(x)|^2$ za eigenstanje

$\psi(x_1, x_2)$ računamo prema formuli

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^2 &= \sum_{x_2} |\psi(x, x_2)|^2 + \sum_{x_1} |\psi(x_1, x)|^2 = \\ &= \{\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)\} = 2 \cdot \sum_{x_2} |\psi(x, x_2)|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Gustoća vjerojatnosti normirana je na broj čestica $N = 2$.

3. Dvočestična korelacijska funkcija

Dvočestičnu korelacijsku funkciju $g^{(2)}(x_1, x_2)$ definiramo izrazom

$$g^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\langle a_{x_1}^\dagger a_{x_2}^\dagger a_{x_2} a_{x_1} \rangle}{\langle a_{x_1}^\dagger a_{x_1} \rangle \langle a_{x_2}^\dagger a_{x_2} \rangle}. \quad (11)$$

Kako bismo ovaj izraz preveli u izraz pogodniji za računanje i lakše intuitivno razumijevanje ove funkcije, koristimo bozonske komutacijske relacije [10] uz prepoznavanje operatora broja čestica na čvoru x , $\hat{n}_x = a_x^\dagger a_x$. Korelacijska funkcija tada postaje

$$g^{(2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\langle \hat{n}_{x_1} (\hat{n}_{x_1} - 1) \rangle}{\langle \hat{n}_{x_1} \rangle^2}, & x_1 = x_2 \\ \frac{\langle \hat{n}_{x_1} \hat{n}_{x_2} \rangle}{\langle \hat{n}_{x_1} \rangle \langle \hat{n}_{x_2} \rangle}, & x_1 \neq x_2 \end{cases}. \quad (12)$$

Ugrubo, iz ovog izraza vidimo da nam dvočestična korelacijska funkcija odgovara na pitanje: "Ako se jedna čestica nalazi na x_1 , koja je vjerojatnost da ćemo drugu česticu naći na x_2 ?".

Za izračun korelacijske funkcije uzimamo da se naš sustav nalazi na konačnoj temperaturi $k_B T = 1/\beta = 0.1J$ i periodične rubne uvjete (PBC). Kako imamo konstantan broj čestica $N = 2$, za račun očekivanih vrijednosti koristimo kanonski ansambl.

Vrijedi:

$$\langle a_{x_1}^\dagger a_{x_2}^\dagger a_{x_2} a_{x_1} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_j e^{-\beta E_j} \langle j | a_{x_1}^\dagger a_{x_2}^\dagger a_{x_2} a_{x_1} | j \rangle$$

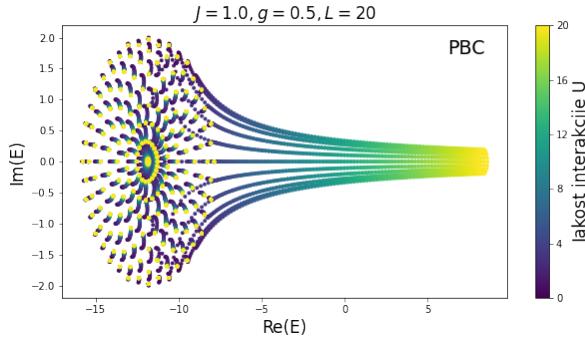
$$\langle a_x^\dagger a_x \rangle = \frac{1}{Z} \sum_j e^{-\beta E_j} \langle j | a_x^\dagger a_x | j \rangle,$$

gdje $Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$ kanonska particijska funkcija, E_j energija j -og stanja, $|j\rangle$ ($\langle j|$) desni (lijevi) svojstveni vektor. Suma ide po svim eigenstanjima. Zbog translacijske invarijantnosti sustava s periodičnim rubnim uvjetima, korelacijska funkcija ovisi samo o udaljenosti $|x_1 - x_2|$, odnosno $g^{(2)}(x_1, x_2) = g^{(2)}(|x_1 - x_2|)$ i simetrična je oko $|x_1 - x_2| = L/2$.

B. Rezultati i diskusija

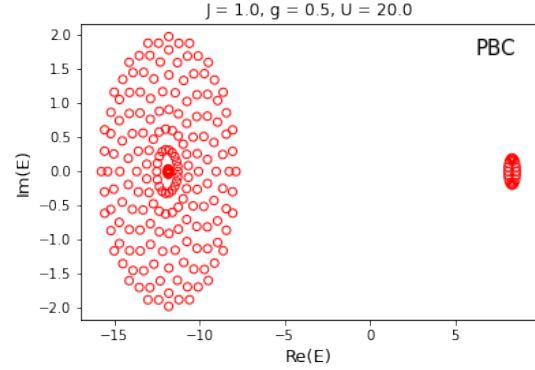
1. Energijski spektri

Na slici (Slika 7) prikazana je ovisnost energijskog spektra sustava s periodičnim rubnim uvjetima (ali isto vrijedi za otvorene rubne uvjete) o jakosti interakcije U . Energije polagano mijenjaju svoje pozicije u kompleksnoj ravnini, kada u jednom trenutku prelazimo u režim jake interakcije, gdje se jedan manji dio stanja počinje odvajati od ostalih.



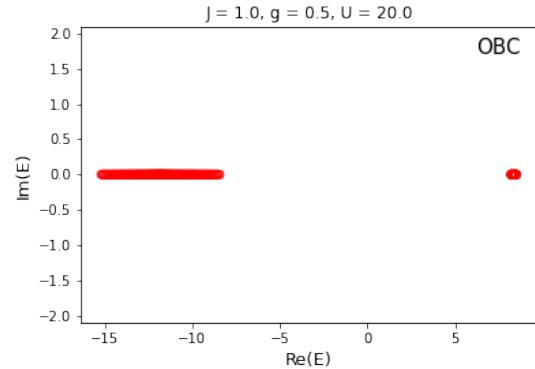
Slika 7: Prikaz energijskog spektra sustava s periodičnim rubnim uvjetima u ovisnosti o jakosti interakcije (ljubičasta) $0.0 \leq U \leq 20.0$ (žuta). Broj čvorova $L = 20$, nehermitski parametar $g = 0.5$.

Tada se i slučaju s periodičnim rubnim uvjetima (Slika 8) i otvorenim rubnim uvjetima (Slika 9) energijski spektar razdvaja na dva *skupa*. Jedan *skup* centriran je oko energije -2μ , dok je drugi centriran oko $U - 2\mu$. U *skupu* centriranom oko $U - 2\mu$ nalazi se L stanja. To su stanja u kojima se obje čestice nalaze na istom čvoru lanca. Ponašanje je očekivano, s obzirom da imamo odbojnu *on-site* interakciju te je energetska *skuplja* imati dvije čestice na istom čvoru.



Slika 8: Energijski spektar sustava s dvije čestice i periodičnim rubnim uvjetima, jakosti interakcije $U = 20.0$ i nehermitskog parametra $g = 0.5$. Broj čvorova lanca $L = 20$.

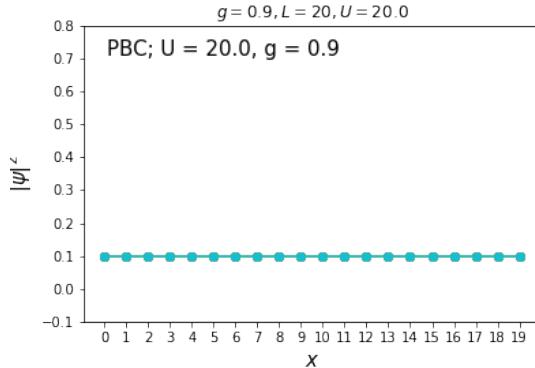
Kao i u jednočestičnom slučaju, PBC spektar ima kompleksne energije, dok energije u OBC spektru u potpunosti leže na realnoj osi.



Slika 9: Energijski spektar sustava s dvije čestice i otvorenim rubnim uvjetima, jakosti interakcije $U = 20.0$ i nehermitskog parametra $g = 0.5$. Broj čvorova lanca $L = 20$.

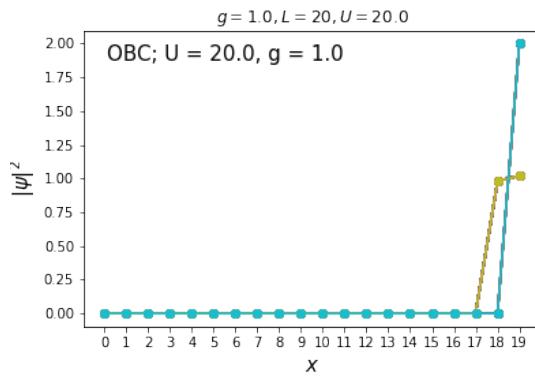
2. Gustoće vjerojatnosti

Gustoća vjerojatnosti za sustav s periodičnim rubnim uvjetima (Slika 10) ostaje uniformna i iznosi $\frac{N}{L}$, neovisno o jakosti interakcije među česticama. Kod otvorenih rubnih uvjeta (Slika 11) i dalje primjećujemo lokalizaciju na nekoliko zadnjih čvorova lanca, no dolazi do djelomičnog potiskivanja nehermitskog skin efekta. Stanja u kojima je efekt potisnut su stanja u *skupu* centriranom oko -2μ , dok u stanjima centriranim oko $U - 2\mu$ vidimo da, iako imamo odbojnu interakciju, prevladava lokalizacija na zadnjem čvoru lanca.



Slika 10: Prikaz gustoća vjerojatnosti u ovisnosti o položaju na lancu za sva eigenstanja dvočestičnog sustava za jakost interakcije $U = 20.0$, $g = 0.9$ i $L = 20$ uz periodične rubne uvjete.

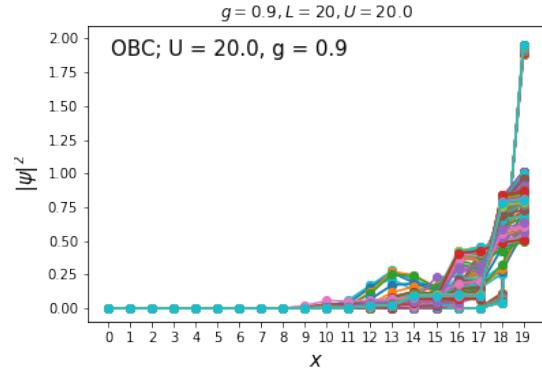
Ovaj efekt je još bolje vidljiv kada uzmemo $g = 1.0$, odnosno da nam preskok uljevo iznosi $J_L = 0$ (Slika 12). Možemo prepoznati kako nam se stanja *skupa* centriranog oko -2μ sjedine u jednu valnu funkciju, u kojoj je nehermitski skin efekt potisnut. Stanja *skupa* centriranog oko $U - 2\mu$ se sjedine u drugu valnu funkciju u kojoj nema potisnuća nehermitskog skin efekta i obje čestice se nalaze na zadnjem čvoru lanca, unatoč odbojnoj interakciji među njima. Za razliku od jednočestičnog slučaja, sustav sada ima dva *exceptional pointa*; jedan u točki -2μ , drugi u $U - 2\mu$, kao direktnu posljedicu interakcije među česticama.



Slika 12: Prikaz gustoća vjerojatnosti u ovisnosti o položaju na lancu za sva eigenstanja dvočestičnog sustava za jakost interakcije $U = 20.0$, $g = 1.0$ i $L = 20$ uz otvorene rubne uvjete.

3. Korelacijska funkcija

Promatranjem korelacijske funkcije u ovisnosti o udaljenosti među česticama (Slika 13) možemo primijetiti kako se uključivanjem interakcije, čestice žele što više međusobno udaljiti ([13]). Ponašanje je očekivano s ob-



Slika 11: Prikaz gustoća vjerojatnosti u ovisnosti o položaju na lancu za sva eigenstanja dvočestičnog sustava za jakost interakcije $U = 20.0$, $g = 0.9$ i $L = 20$ uz otvorene rubne uvjete.

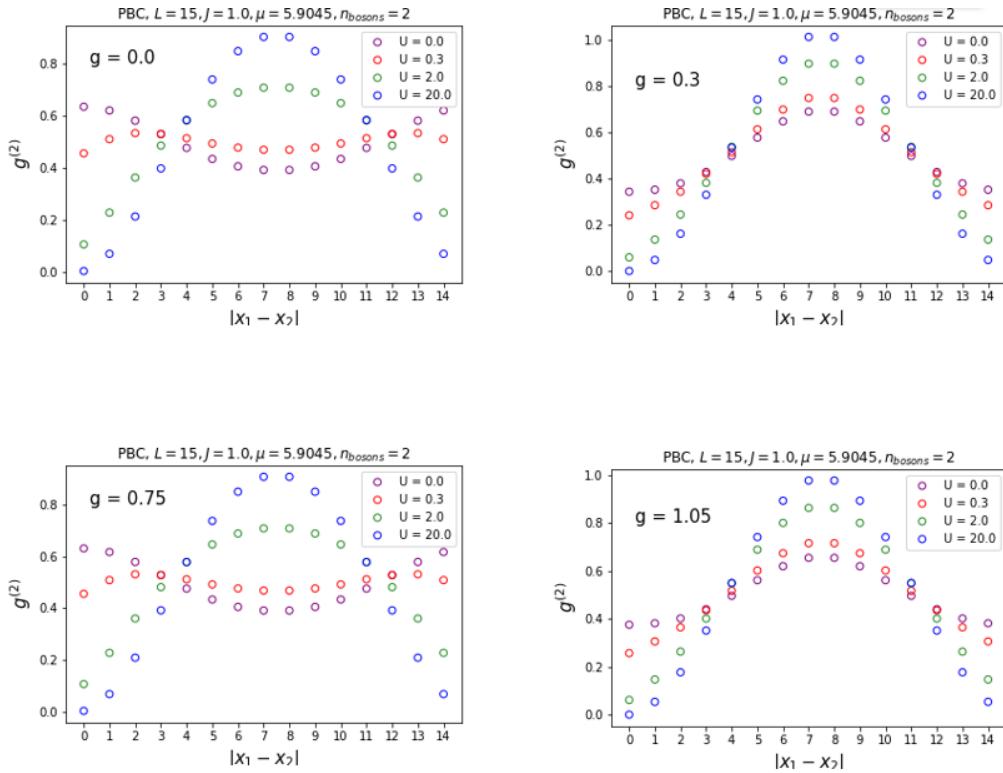
zirom da imamo odbojnu interakciju. Promjenom nehermitinskog parametra g , grafovi općenito ne izgledaju identično, no i dalje je izražen efekt udaljavanja čestica zbog odbojne interakcije. Isto tako, možemo primijetiti da za određene vrijednosti g , grafovi jesu identični. Zapravo se događa to da korelacijska funkcija $g^{(2)}(x_1, x_2; g)$ oscilira u ovisnosti o g . Period oscilacija približno iznosi $P = \frac{L}{2\beta}$ i posljedica je konačne temperature sustava.

Kako bismo to vidjeli, pogledajmo spektar jednočestičnog beskonačnog lanca (jednadžba (7)). Ako nam je sustav dovoljno velik, kada imamo periodične rubne uvjete, valni broj možemo diskretizirati kao $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$. Imaginarni dio energije tada izgleda $\text{Im}(E_n) = 2g \sin(2\pi n/L) \approx \{L \gg 1\} \approx \frac{4\pi g \cdot n}{L}$. Kako se nalazimo u niskotemperaturnom limesu, najveću ulogu nam igraju osnovno i prvo pobuđeno stanje, odnosno $n = -1, 0, 1$ [14]. Interakcija ne igra ulogu jer se nalazimo u *skupu* centriranom oko -2μ , gdje se čestice nalaze na različitim čvorovima lanca. Znači da, u prvoj aproksimaciji, energije dvočestičnog sustava gradimo superpozicijom jednočestičnih energija, odnosno energije iznose $E_0 = -4J$, $E_{\pm 1} \approx -4J \pm i \frac{4\pi g}{L}$. Uvrštanjem tih izraza u particijsku funkciju dobijemo

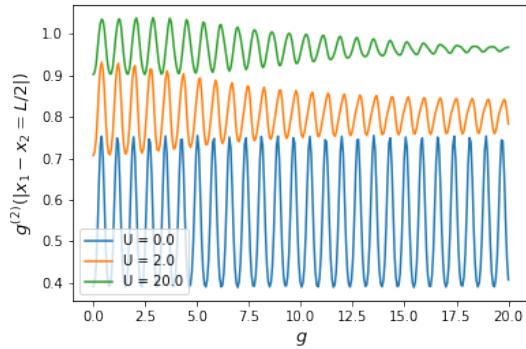
$$Z \cdot e^{4\beta J} \approx (1 + e^{-\beta \cdot \frac{4\pi g}{L}} + e^{+\beta \cdot \frac{4\pi g}{L}}) = (1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi\beta}{L} \cdot g\right)).$$

Particijska funkcija oscilira periodom $\frac{L}{2\beta}$ u ovisnosti o g i ista stvar se događa kada računamo očekivane vrijednosti u definiciji korelacijske funkcije. Dakle, kao što je rečeno, oscilacije korelacijske funkcije su potpis konačne temperature sustava.

Gledajući dugodosežne korelaciije u ovisnosti o g , odnosno $g^{(2)}(|x_1 - x_2| = \frac{L}{2}; g)$ (Slika 14), primjećujemo da oscilacije trnu i da se brzina trnjenja povećava kako raste jakost odbojne interakcije, dok kada nemamo interakcije ne opažamo nikakvo trnjenje oscilacija. Zaključujemo da postoji neko vezanje između parametara g i U , koje izaziva gušenje oscilacija izazvanih temperaturom.



Slika 13: Prikaz dvočestične korelacijske funkcije u ovisnosti o udaljenosti među česticama, za različite jakosti interakcije i vrijednosti nehermitskog parametra g , uz $L = 15$.



Slika 14: Prikaz dugodosežnih korelacija, odnosno $g^{(2)}(|x_1 - x_2| = \lfloor L/2 \rfloor)$ u ovisnosti o nehermitskom parametru g , uz $L = 15$ i $U = 0.0, 2.0, 20.0$.

IV. ZAKLJUČAK

U ovom seminaru predstavili smo osnovne principe nehermitske kvantne mehanike, koja pruža novi i pojednostavljeni okvir za opis otvorenih sustava. Kroz jednos-

tavan sustav s dva nivoa i 1D lanac Hatano-Nelson modela, istražili smo učinke uvođenja nehermitskih hamiltonijana i pojave efekata poput biortogonalne baze, *exceptional point*-ova, nehermitskog skin efekta, itd. Analizom energijskih spektara, valnih funkcija i dvočestične korelacijske funkcije pokazali smo kako se ti efekti mijenjaju dodavanjem dva interagirajuća bozona te kako ti isti nehermitski fenomeni utječu na interakciju. Pokazali smo da dolazi do razdvajanja energija, djelomičnog potisnuća nehermitskog skin efekta i vezanja između nehermitskih parametara sustava i interakcije.

Nehermitska kvantna mehanika ostaje područje puno neistraženih mogućnosti i potencijala za nova istraživanja.

V. ZAHVALE

Zahvaljujem prof. dr. sc. Hrvoju Buljanu i prof. dr. sc. Dariju Jukiću na njihovom vremenu, strpljenju i odgovorima na moja brojna pitanja, kao i na pomoći, kako u vezi sa seminarom, tako i izvan njega.

[1] G. Lindblad, Communications in Mathematical Physics **48**, DOI:10.1007/BF01608499 (1976).

[2] E. J. Bergholtz, J. C. Budich, and F. K. Kunst, Exceptional topology of non-hermitian systems, Rev. Mod. Phys.

- 93**, 015005 (2021).
- [3] Eng. *coalesce*.
- [4] Nažalost ne postoji dobar prijevod na hrvatski.
- [5] F. K. Kunst, E. Edvardsson, J. C. Budich, and E. J. Bergholtz, Biorthogonal bulk-boundary correspondence in non-hermitian systems, Phys. Rev. Lett. **121**, 026808 (2018).
- [6] N. Hatano and D. R. Nelson, Localization transitions in non-hermitian quantum mechanics, Phys. Rev. Lett. **77**, 570 (1996).
- [7] Eng. *site*.
- [8] Koriste se takvi nazivi jer za $g = 0$ sustav je hermitski.
- [9] F. Herbert, M. Schram, R. Scalettar, W. Chen, and Z. Bai, Hatano-nelson model with a periodic potential, The European Physical Journal B **79**, 10.1140/epjb/e2011-10875-9 (2011).
- [10] F. Utermohlen, Tight-binding model in the second quantization formalism, URL: <https://www.physics.rutgers.edu/pythtb/about.html> (2018).
- [11] U jednočestičnom slučaju nam nije bilo bitno je li čestica fermion ili bozon, tako da nismo morali specificirati zadovoljava li (anti)komutacijske relacije.
- [12] P. Weinberg and M. Bukov, QuSpin: a Python package for dynamics and exact diagonalisation of quantum many body systems. Part II: bosons, fermions and higher spins, SciPost Phys. **7**, 020 (2019).
- [13] U PBC najveća udaljenost među česticama je $L/2$.
- [14] G. Sun and S.-P. Kou, Aufbau principle for non-hermitian systems (2023).