Termodinamika crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja

David Leko*
Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek, Bijenička cesta 32, 10000, *Zagreb*
mentor: dr. sc. Tajron Jurić†
Institut Ruđer Bošković, Zavod za teorijsku fiziku, Bijenička cesta 54, 10000, *Zagreb*
(Dated: 21. siječnja 2023.)

Ukratko predstavljamo područje istraživanja termodinamike crnih rupa i navodimo glavne rezultate. Zatim predstavljamo formalizam kovarijantnog faznog prostora koji su razvili Wald i suradnici. Izvodimo općenite relacije za varijacije prvog reda očuvanih veličina u teorijama koje je moguće izvesti od lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam. Tada se fokusiramo na Einstein-Maxwellov lagranžijan. Prvi zakon termodinamike crnih rupa za Einstein-Maxwellovu teoriju izvodimo na dva načina. Prvo uspoređujemo dvije infinitezimalno bliske crne rupe, tzv. verzija ravnotežnog stanja, a zatim proučavanjem djelovanja infinitezimalnog fizikalnog procesa na crnu rupu, tzv. verzija fizikalnog procesa.

I. UVOD

Iznenađujuće otkriće u području istraživanja crnih rupa bila je analogija između zakona termodinamike i zakona mehanike crnih rupa. Ovdje su kratko predstavljena četiri zakona [1]:

(0) Nulti zakon: Površinska gravitacija κ je konstantna na horizontu. Budući da se u ovome radu govori o termodinamici u prisustvu elektromagnetskih polja, vrijedi istaknuti da su u tom slučaju i električni potencijal, Φ_H konstantan na horizontu [2].

(I) Prvi zakon: Za dva bliska rješenja za stacionarne crne rupe koja se razlikuju tek za male varijacije u parametrima M, J i Q, vrijedi:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \ ,$$

pri čemu je M masa, κ površinska gravitacija, A površina horizonta, Ω_H angularna brzina horizonta, J angularni moment, Φ_H električni potencijal na horizontu, a Q naboj stacionarne crne rupe.

(II) Drugi zakon: Površina horizonta crne rupe nikad se ne smanjuje:

$$\delta A \geq 0$$

(III) Treći zakon: Ne postoji proces kojim bi se površinska gravitacija κ svela na nulu u konačnom broju koraka.

Zakoni su zapisani u prirodnom sustavu jedinica, $G = \hbar = c = k = 1$.

1973. Bardeen, Carter i Hawking [3] predstavili su dokaz četiri zakona mehanike crnih rupa za stacionarne, asimptotski ravne crne rupe u četiri dimenzije, jedinstveno određene masom, angularnim momentom i nabojem. Zakoni su koncipirani i numerirani na ovaj način da bi se istaknula analogija sa zakonima termodinamike pri čemu površinska gravitacija κ igra ulogu temperature, a površina horizonta A entropiju. Unatoč tome, Bardeen, Carter i Hawking [3] ističu da treba razlikovati temperaturu od površinske gravitacije κ (kao i entropiju od površine horizonta A). Promatrano klasično, temperatura crne rupe je apsolutna nula. To se može vidjeti [1] u kontaktu crne rupe s toplinskim spremnikom temperature različite od nula. Energija će prelaziti u crnu rupu, ali nikada iz nje.

Tek kada je Hawking [4] u obzir uzeo kvantne efekte, pokazalo se da je analogija fizikalne prirode. Hawking je 1974. [4] otkrio da je fizikalna temperatura crne rupe različita od apsolutne nule. Kao rezultat kvantnih efekata nastanka čestica, crna rupa zrači kao crno tijelo na temperaturi:

$$T = \frac{\hbar}{2\pi}\kappa$$

Tim je izrazom fizikalna temperatura crne rupe T na jednostavan način povezana s površinskom gravitacijom κ.

Drugi zakon termodinamike kao i drugi zakon mehanike crnih rupa opisuju veličine koje se ne smanjuju s vremenom. Temeljem toga, analogija između entropije i površine horizonta može se činiti površnom budući da drugi zakon mehanike crnih rupa ima pozadinu u diferencijalnoj geometriji, a drugi zakon termodinamike ima statističko podrijetlo [5]. Značajan doprinos po tom pitanju dao je Bekenstein [6, 7] predloživši proporcionalnost između entropije crne rupe i površine horizonta. Također, vođen idejom da je informacija nepovratno izgubljena kada tijelo upadne u crnu rupu [5], predložio je poopćenu verziju drugog zakona [7]: zbroj entropije materije izvan crne rupe i entropije crne rupe izražene kao višekratnik površine horizonta nikad se ne smanjuje. U slučaju opće

* dleko.phy@pmf.hr
† tjuric@irb.hr

relativnosti, konstanta proporcionalnost iznosi 1/4 [5]:

$$S_{bh} = \frac{A}{4G\hbar}$$

pri čemu je S_{bh} entropija crne rupe. Vrijedi primijetiti da entropija crne rupe ovisi i o Planckovoj i o Newtonovoj konstanti što može upućivati na kvantno-gravitacijsko podrijetlo ovog izraz [1].

Budući da smo kratko komentirali analogiju između zakona mehanike crnih rupa i zakona termodinamike, promotrit ćemo detaljnije prvi zakon budući da će se ovaj rad baviti egzaktnim izvodom prvog zakona u slučaju opće relativnosti u prisustvu elektromagnetskih polja. U originalnom izvodu [3], perturbacije crne rupe bile su stacionarne, a korištena su mnoga svojstva Einsteinovih jednadžbi. Od tada su napravljena neka poopćenja: pokazalo se da prvi zakon vrijedi i za ne-stacionarne perturbacije [8], [9] ako se promjena površine horizonta promatra na bifurkacijskoj površini. Također, pokazalo se da prvi zakon vrijedi i za sve jednadžbe polja koje se mogu izvesti iz lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam [9]. Takav lagranžijan moguće je zapisati kao:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(g_{ab}; R_{abcd}, \nabla_a R_{abcd}, \dots; \psi, \nabla_a \psi, \dots)$$

pri čemu je ∇_a operator derivacije povezan s metrikom g_{ab}, R_{abcd} Riemannov tenzor, a ψ predstavlja sva polja koja promatramo. Također, dozvoljen je proizvoljan, ali konačan broj derivacija R_{abcd} i ψ. Poopćenu verziju prvog zakona moguće je napisati na sljedeći način:

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi}\delta S_{bh} + \Omega \delta J + \dots$$

pri čemu je s "..." označen doprinos svih dalekosežnih polja koja promatramo te pri čemu

$$S_{bh} = -2\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{\delta L}{\delta R_{abcd}} n_{ab} n_{cd}$$

pri čemu je n_{ab} binormalan na bifurkacijsku površinu $\mathcal{C}$ (normalizirana tako da $n_{ab}n^{ab} = -2$) [5].

Prema Waldu [10], postoje dvije verzije prvog zakona: verzija ravnotežnog stanja i verzija fizikalnog procesa. Verzija ravnotežnog stanja uspoređuje površinu dva proizvoljno bliska stacionarna rješenja za crne rupe, dok verzija fizikalnog procesa uspoređuje stanja crnih rupa prije i poslije nekog infinitezimalnog fizikalnog procesa. Pretpostavlja se da će se crna rupa svesti na neko novo stacionarno konačno stanje. U ovom radu izvedene su obje verzije prvog zakona mehanike crnih rupa za Einstein-Maxwellov lagranžijan. Također, predstavljen je formalizam tzv. kovarijantnog faznog prostora koji su razvili Wald i suradnici.

II. FORMALIZAM

Ovdje će ukratko biti predstavljen formalizam koji je predložio Wald [11], a razvili Wald i Iyer [9]. Formalizam koji je ovdje predstavljen pratit će notaciju korištenu u [11] i [9], a odnosi se na stacionarne crne rupe. Iako će u ovom radu biti riječ o općoj, Einsteinovoj relativnosti, formalizam vrijedi za općenitu $n-$dimenzionalnu teoriju gravitacije izvedivu od lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam. Formalizam koji ćemo ovdje pratiti u svezi lagranžijana, kao i teorije polja detaljno je razvijen u [12] uz razliku da se ovdje (kao i u [11] i [9]), lagranžijan L shvaća kao $n-$forma, a ne skalarna gustoća. Isto vrijedi i za druge tenzorske gustoće iz [12].

Prije izlaganja formalizma, korisno je navesti osnovne pretpostavke i definicije. Formalizam se bavi teorijama definiranima na $n-$dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$ pri čemu su dinamička polja koja promatramo metrika g_{ab}, ali i druga polja tako da je jednadžbe gibanja moguće izvesti iz lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam (o tome detaljnije u nastavku). Prostorvrijeme s kojim radimo je asimptotski ravno. Za takvo prostorvrijeme, područje crne rupe definira se kao komplement prošlosti asimptotskog područja. Formalnije, područje crne rupe, $\mathcal{B}$, asimptotski ravnog prostorvremena, $(\mathcal{M}, g_{ab})$ definira se kao

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{M} - \mathcal{I}^{-}(\mathcal{I}^{+})$$

pri čemu je $\mathcal{I}^{-}$ kronološka prošlost, a $\mathcal{I}^{+}$ buduća nul-beskonačnost [5]. Nadalje, horizont stacionarnih crnih rupa kojima se možemo baviti mora biti Killingovog tipa odnosno, nul-ploha na koju je normalno neko vektorsko polje Killingovog tipa. To svojstvo vrijedi za opću teoriju relativnosti, a detalji izvoda dostupni su u [13]. Komentirajmo ovdje kratko i bifurkacijski horizont Killingovog tipa kao što je učinjeno u [5]. Bifurkacijski horizont Killingovog tipa je skup dvije nul-plohe, $\mathcal{K}_A$ i $\mathcal{K}_B$, koje se sijeku na $(n-2)-$dimenzionalnoj plohi, $\mathcal{C}$, koja je prostornoga tipa tako da su $\mathcal{K}_A$ i $\mathcal{K}_B$ horizonti Killingovog tipa s obzirom na isto Killingovo polje, ξ^a. $\mathcal{C}$ zovemo i bifurkacijska ploha. Iz toga slijedi da ξ^a iščezava na $\mathcal{C}$, ali vrijedi i obrat: ako Killingovo polje, ξ^a iščezava na $(n-2)-$dimenzionalnoj plohi prostornoga tipa, $\mathcal{C}$, tada je $\mathcal{C}$ bifurkacijska ploha bifurkacijskog horizonta Killingovog tipa pridruženog ξ^a.

Prvi korak je uvesti fiksni odnosno ne-dinamički operator derivacije ∇_a u prostorvremenu. Zavisno od slučaja, uvode se i ne-dinamička pozadinska polja, γ, poput zakrivljenosti operatora ∇_a. Takva polja jedinstveno su određena s operatorom ∇_a. Budući da ćemo rabiti notaciju iz [11] i [9], sva polja (g_{ab}, ψ) označavat ćemo s ϕ. Lagranžijani na koje možemo primijeniti ovaj formalizam su invarijantni na difeomorfizam, to znači da za svaki difeomorfizam $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vrijedi

$$\boldsymbol{L}[\psi^*(\phi)] = \psi^* \boldsymbol{L}[\phi] \tag{1}$$

pri čemu je s ψ^* označeno djelovanje difeomorfizma na polja. Ovdje je važno istaknuti da difeomorfizam ne djeluje na ∇_a i γ. Odnosno, iako je potrebno uvesti ne-dinamički operator derivacije i ne-dinamička polja, lagranžijan ovisi samo o dinamičkim poljima [11]. Uvjeti koji su za ovaj formalizam nametnuti na lagranžijan detaljno su diskutirani u [9], gdje je pokazano da ako je lagranžijan invarijantan u smislu (1), isti može biti zapisan kao

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(g_{ab}; R_{abcd}, \nabla_a R_{abcd}, \dots; \phi, \nabla_a \phi, \dots) \tag{2}$$

gdje je ∇_a operator derivacije pridružen g_{ab}. Valja ponoviti da je dozvoljen proizvoljan, ali konačan broj derivacija R_{abcd} i ϕ. Također, vrijedi primijetiti da lagranžijan zapisan kao (2) ne ovisi o pozadinskim poljima.

Varijaciju lagranžijana s obzirom na dinamička polja uvijek je moguće zapisati u obliku

$$\delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}(\phi)\delta\phi + d\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi) \tag{3}$$

pri čemu je $\boldsymbol{E}(\phi)$ lokalno konstruiran od ϕ i njegovih derivacija, a $\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)$ lokalno konstruiran od ϕ, $\delta\phi$ i njihovih derivacija (detaljnije u [12]). Jednadžbe gibanja tada su

$$\boldsymbol{E}(\phi) = 0 \tag{4}$$

$(n-1)-$forma $\boldsymbol{\Theta}$ naziva se formom simplektičkog potencijala. Jednadžba (3) jedinstveno određuje formu jednadžbi gibanja, $\boldsymbol{E}(\phi)$, ali forma simplektičkog potencijala $\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)$ određena je jednadžbom (3) tek do na zatvorenu $(n-1)-$formu. $(n-1)-$forma simplektičke struje, $\boldsymbol{\omega}$, definirana je s obzirom na dvije varijacije, δ_1 i δ_2

$$\boldsymbol{\omega}(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \delta_1\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta_2\phi) - \delta_2\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta_1\phi) \tag{5}$$

Neka je ξ^a neko glatko vektorsko polje na prostorvremenu. Promotrimo varijaciju polja $\hat{\delta}\phi = \mathcal{L}_\xi\phi$, tada imamo

$$\hat{\delta}\boldsymbol{L} = \mathcal{L}_\xi \boldsymbol{L} = d(\xi \cdot \boldsymbol{L}) \tag{6}$$

pri čemu je "$\cdot$" kontrakcija vektorskog polja ξ^a s prvim indeksom diferencijalne forme $\boldsymbol{L}$. Jednadžba (6) govori da vektorska polja na prostorvremenu tvore skup infinitezimalnih lokalnih simetrija, kako je to opisano u [12]. To nam omogućuje da svakom vektorskom polju ξ^a pridružimo $(n-1)-$formu, Noetherinu struju $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ definiranu kao

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \boldsymbol{L} \tag{7}$$

iz čega slijedi [12]

$$d\boldsymbol{\mathcal{J}} = -\boldsymbol{E}(\phi)\mathcal{L}_\xi\phi \tag{8}$$

tako da je $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ zatvorena forma kada su jednadžbe gibanja zadovoljene. Budući da je $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ zatvorena za svaki ξ^a, postoji $(n-2)-$forma $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ koja se naziva Noetherin naboj, a lokalno je konstruirana od ϕ, ξ^a i njihovih derivacija tako da

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}[\xi] = d\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] + \xi^a \boldsymbol{C}_a \tag{9}$$

pri čemu je $\boldsymbol{C}_a$ $(n-1)-$forma lokalno konstruirana od dinamičkih polja tako da je $\boldsymbol{C}_a = 0$ kada su zadovoljene jednadžbe gibanja [14]. Notacijom se ovdje želi istaknuti da su Noetherina struja, $\boldsymbol{\mathcal{J}}[\xi]$, i Noetherin naboj, $d\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi]$, određeni spram polja ξ. Odnosno, da je polje ξ^a infinitezimalna lokalna simetrija koju promatramo.

Do važne relacija na kojoj je izgrađen formalizam dolazimo varijacijom jednadžbe (7) s obzirom na proizvoljnu varijaciju dinamičkog polja $\delta\phi$

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{J}} = \delta\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi) - \xi \cdot \delta\boldsymbol{L} \tag{10}$$

iz jednadžbe (3) slijedi

$$\begin{aligned} \xi \cdot \delta\boldsymbol{L} &= \xi \cdot [\boldsymbol{E}\delta\phi + d\boldsymbol{\Theta}] \\ &= \mathcal{L}_\xi\boldsymbol{\Theta} - d(\xi \cdot \boldsymbol{\Theta}) \end{aligned} \tag{11}$$

pri čemu je korišteno $\boldsymbol{E} = 0$ te formula

$$\mathcal{L}_\xi\boldsymbol{\Lambda} = \xi \cdot d\boldsymbol{\Lambda} + d(\xi \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \tag{12}$$

gdje je Λ diferencijalna forma, a "$\cdot$" kontrakcija vektorskog polja s prvim indeksom diferencijalne forme. To je pogodni zapis Cartanove magične formule iz diferencijalne geometrije koja se može zapisati i na sljedeći način

$$\mathcal{L}_\xi = di_\xi + i_\xi d = \{i_\xi, d\}$$

pri čemu i_ξ označuje kontrahiranje diferencijalne forme s vektorom [15].

Konačno, uvrštavanjem (11) u (10) dobivamo

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{J}} = \delta\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi) - \mathcal{L}_\xi[\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)] + d(\xi \cdot \boldsymbol{\Theta}) \tag{13}$$

pri čemu nikakva ograničenja nisu nametnuta na $\delta\phi$ i ξ^a.

Očekujemo da će ∇_a biti invarijantan s obzirom na difeomorfizam generiran ξ^a. U tom slučaju [11], prva dva člana na desnoj strani jednadžbe (13) zajedno daju

$$\delta\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi) - \mathcal{L}_\xi[\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)] = \boldsymbol{\omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \tag{14}$$

te jednadžba (13) postaje

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{\omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d(\xi \cdot \boldsymbol{\Theta}) \tag{15}$$

Fokus rasprave sada ćemo staviti na slučajeve asimptotski ravnog prostorvremena pri kojima za svaku asimptotsku simetriju prostorvremena (u ovom slučaju ξ^a) postoji pravi hamiltonijan te očuvana veličina H_ξ. Detalje je moguće pronaći u [16], "Case I". Ako $\delta\phi$ zadovoljava linearizirane jednadžbe gibanja, $\delta\boldsymbol{E}(\phi) = 0$, u blizini beskonačnosti, ali ne nužnu u čitavom prostorvremenu, varijacija očuvane veličine H_ξ povezane s ξ^a dana je u [16] sa

$$\delta H_\xi = \int_\infty (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi \cdot \boldsymbol{\Theta}) \tag{16}$$

Pri čemu je korištena notacija iz [17]. "$\bar{\delta}$" označava varijaciju koja ne utječe na ξ^a budući da se u (16) ξ^a tretira kao fiksirana pozadina. Ovdje treba komentirati granice integracije u integralu, to je detaljno učinjeno u [14, 16]. Neka je Σ hiperploha koja se prostire u beskonačnost s unutarnjim rubom $\partial\Sigma$. Integracija u (16) se vrši po $(n-2)-$plohi u Σ kada ta $(n-2)-$ploha ide u beskonačnost uz Σ.

Koristeći Stokesov teorem, jednadžbu (16) možemo zapisati kao

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma (\bar{\delta} d\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - d(\xi\cdot\boldsymbol{\Theta})) + \int_{\partial\Sigma} (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \quad (17)$$

Ograničimo se sada na slučaj u kojemu je $\boldsymbol{\omega}(\phi,\delta\phi,\mathcal{L}_\xi\phi) = 0$. Tada korištenjem jednadžbi (15) i (9) jednadžbu (17) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\delta H_\xi &= \int_\Sigma (\bar{\delta} d\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \delta\boldsymbol{\mathcal{J}}[\xi] + \int_{\partial\Sigma} (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \\ &= -\int_\Sigma \xi^a \delta \boldsymbol{C}_a + \int_{\partial\Sigma} (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \qquad (18)\end{aligned}$$

Jednadžba (18) općeniti je oblik varijacije prvog reda očuvane veličine. Ona vrijedi za teorije gravitacije koje se mogu izvesti iz lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam u prostorvremenu koje ispunjava ranije navedene uvjete (detaljno u [16], "Case I") te ako vrijedi $\mathcal{L}_\xi\phi = 0$ i ako $\delta\phi$ zadovoljava linearizirane jednadžbe gibanja blizu beskonačnosti [14]. Ako $\delta\phi$ zadovoljava linearizirane jednadžbe gibanja u čitavom prostorvremenu, tada je $\delta\boldsymbol{C}_a = 0$ i integral po Σ u jednadžbi (18) iščezava. Formalizam koji smo predstavili između jednadžbi (16) i (18) općenitiji je od onog predstavljenog u Waldovim prvim člancima [11], [9] te je razvijen 2000. u članku [16]. Uz uvjete da $\delta\phi$ zadovoljava linearizirane jednadžbe gibanja u čitavom prostorvremenu te da je $\partial\Sigma$ bifurkacijska ploha, lako se vraćamo na raspravu iz [11] i [9]. Jednadžba (18) predstavlja korisno poopćenje.

Nastavak ovog poglavlja slijedi u tom režimu. Promotrit ćemo teorije koje dopuštaju prikladnu definiciju kanonske energije, $\mathcal{E}$, pri čemu je ξ^a asimptotska vremenska translacija, t^a, te kanonskog angularnog momenta, $\mathcal{J}$, pri čemu je ξ^a asimptotska rotacija, φ^a, tada su varijacije tih veličina izražene kao

$$\delta\mathcal{E} = \int_\infty (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[t] - t\cdot\boldsymbol{\Theta}) \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J} &= -\int_\infty (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\varphi] - \varphi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \\ &= -\int_\infty \bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\varphi] \qquad (20)\end{aligned}$$

budući da pretpostavljamo da je asimptotska rotacija, φ^a, tangentna na $(n-2)-$plohu integracije [11]. Nadalje, fokusirajmo se na stacionarnu crnu rupu s bifurkacijskim horizontom Killingovog tipa te bifurkacijskom $(n-2)-$plohom Λ. Izaberimo ξ^a tako da iščezava na Λ i da je normaliziran na način

$$\xi^a = t^a + \Omega_H \varphi^a \qquad (21)$$

pri čemu je t^a stacionarno Killingovo polje. Operator ∇_a izabran je za operator derivacije rješenja koje promatramo pa je ∇_a invarijantan na izometrije koje generira ξ^a. To je upravo ranije opisani slučaj koji omogućuje pojednostavljenje opisano jednadžbom (14), dodatno, budući da je $\mathcal{L}_\xi\phi = 0$, $\boldsymbol{\omega}(\phi,\delta\phi,\mathcal{L}_\xi\phi) = 0$ te jednadžba (15) poprima jednostavan oblik

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{\mathcal{J}}) &= d(\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \\ d(\delta\boldsymbol{\mathcal{Q}}) &= d(\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \qquad (22)\end{aligned}$$

Integraciju jednadžbe (22) izvodimo po asimptotski ravnoj hiperplohi $\mathcal{C}$ odabranoj tako da je Λ njen unutarnji rub. Integriranjem jednadžbe (22) po hiperplohi $\mathcal{C}$ te koristeći jednadžbe (19),(20) i (21) dobivamo

$$\delta\int_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{Q}} = \delta\mathcal{E} - \Omega_H \delta\mathcal{J} \qquad (23)$$

što je oblik prvoga zakona mehanike crnih rupa. Preostaje lijevu stranu jednadžbe (23) izraziti kao umnožak površinske gravitacije κ i varijacije lokalne, geometrijske veličine na Λ [11].

III. PRVI ZAKON MEHANIKE CRNIH RUPA U EINSTEIN-MAXWELLOVOJ TEORIJI

Prvi korak u daljem razmatranju jest izvesti eksplicitne izraze za varijacije mase i angularnog momenta u Einstein-Maxwellovoj teoriji, to je detaljno učinjeno u [14], a ovdje ćemo ponoviti taj izvod. Einstein-Maxwellov lagranžijan glasi

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{16\pi}(\boldsymbol{\epsilon}R - \boldsymbol{\epsilon}g^{ac}g^{bd}F_{ab}F_{cd}) \qquad (24)$$

gdje je $\boldsymbol{\epsilon}$ volumni element povezan s metrikom. Izračunom varijacije prvog reda Einstein-Maxwellovog lagranžijana (24) dobivamo

$$\delta\boldsymbol{L} = \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}(-G^{ab} + 8\pi T^{ab}_{EM})\delta g_{ab} + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\epsilon}(\nabla_a F^{ab})\delta A_b + d\boldsymbol{\Theta}$$

pri čemu je T^{ab}_{EM} tenzor energije-impulsa elektromagnetskog polja zadan sa

$$(T_{EM})_{ab} = \frac{1}{4\pi}(F_{ac}F_c{}^b - \frac{1}{4}g_{ab}F_{de}F^{de}) \qquad (25)$$

a forma simplektičkog potencijala $\boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{\Theta}_{abc}(\phi,\delta\phi) = \frac{1}{16\pi}\epsilon_{dabc}v^d \qquad (26)$$

pri čemu je

$$v_d = \nabla^b\delta g_{db} - g^{ce}\nabla_d\delta g_{ce} - 4F_d{}^b\delta A_b \qquad (27)$$

Na temelju varijacije jednadžbe (24) možemo pročitati jednadžbe gibanja (u slučaju bez izvora):

$$\begin{aligned}G^{ab} - 8\pi T^{ab}_{EM} &= 0 \qquad (28)\\ \nabla_a F^{ab} &= 0 \qquad (29)\end{aligned}$$

Budući da je poznata forma $\mathbf{\Theta}$, iz jednadžbe (7) možemo odrediti Noetherinu struju, $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J}_{abc} = d\mathcal{Q}^{GR}_{abc} + \frac{1}{16\pi}\epsilon_{dabc}(2G^d_{\ e}\xi^e + \xi^d F_{fg}F^{fg}) - \frac{1}{4\pi}\epsilon_{abcd}F^{df}(\xi^e\nabla_e A_f + A_e\nabla_f\xi^e)$$

pri čemu je

$$\mathcal{Q}^{GR}_{ab} = -\frac{1}{16\pi}\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d$$

nadalje, zapisujemo $\nabla_e A_b$ kao $F_{eb} + \nabla_b A_e$ u zadnjem članu Noetherine struje te dobivamo

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{abc} &= d\mathcal{Q}^{GR}_{abc} + \frac{1}{8\pi}\epsilon_{dabc}(G^{ab} - 8\pi T^{ab}_{EM})\xi_e \\ &- \frac{1}{4\pi}\nabla_g(\epsilon_{dabc}F^{dg}A_e\xi^e) + \frac{1}{4\pi}\epsilon_{dabc}A_e\xi^e\nabla_f F^{df} \\ &= (d\mathcal{Q})_{abc} + \frac{1}{8\pi}\epsilon_{dabc}(G^{ab} - 8\pi T^{ab}_{EM})\xi_e \\ &+ \frac{1}{4\pi}\epsilon_{dabc}A_e\xi^e\nabla_f F^{df}\end{aligned} \tag{30}$$

Time konačno dobivamo Noetherin naboj [14]

$$\mathcal{Q}_{ab} = -\frac{1}{16\pi}\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d - \frac{1}{8\pi}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\xi^e \tag{31}$$

Izrazi (26), (27) i (31) bit će važni u daljnjem računu.

A. Ravnotežno stanje

Neka je (g_{ab}, A_a) stacionarno rješenje Einstein-Maxwellovih jednadžbi. Uvjet koji se nameće u izvodu je sljedeći: ako crna rupa ima bifurkacijsku plohu, tada tražimo da je povlačenje A_a na budućnost bifurkacijske plohe glatko, ali ne nužno glatko na bifurkacijskoj plohi [17]. Izabiremo ξ^a tako da

$$\xi^a = t^a + \Omega_H\varphi^a \tag{32}$$

pri čemu je ξ^a vektorsko polje Killingovog tipa. Nadalje, neka je Σ asimptotska hiperploha koja iščezava na dijelu horizonta $\mathcal{H}$ koji se nalazi u budućnosti u odnosu na bifurkacijsku plohu. Presjek horizonta označavat ćemo s $S_{\mathcal{H}}$, kao što je učinjeno i u [17]. $\mathcal{H}$ je unutarnji rub hiperplohe Σ. Sada promatramo stacionarnu perturbaciju $\delta\phi$. Pogodnim odabirom se pokazalo [17] promatrati jednake hiperplohe, horizonte, kao i Killingove vektore t^a i φ^a za dva rješenja. Tada slijedi

$$\delta t^a = 0 = \delta\varphi^a \tag{33}$$
$$\delta\xi^a = \delta\Omega_H\varphi^a \tag{34}$$

Ovdje treba primijetiti da se uvjeti zadani iznad (33) ne mogu primijeniti na bifurkacijsku plohu budući da tamo ξ^a iščezava, no u izvodu se ne koristi bifurkacijska ploha.

Kombiniranjem izraza (18), (19), (20) i (32) dobivamo

$$\delta\mathcal{E} = \Omega_H\delta\mathcal{J} + \int_{S_H}(\bar{\delta}\mathbf{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi\cdot\mathbf{\Theta}) \tag{35}$$

Ovdje valja primijetiti vezu između $\mathcal{E}$ i "Arnowitt-Deser-Misner" (AMD) mase iz opće teorije relativnosti. $\mathcal{E}$ predstavlja AMD masu te dodatne doprinose od dalekosežnih polja koji mogu, ali ne moraju biti prisutni [11]. Bez gubitka općenitosti, možemo pretpostaviti da elektromagnetska polja ne pridonose ni $\delta\mathcal{E}$ ni $\delta\mathcal{J}$ te stoga možemo $\delta\mathcal{E}$ poistovjetiti s varijacijom AMD mase δM. Jednadžba (35) tada poprima oblik

$$\delta M = \Omega_H\delta\mathcal{J} + \int_{S_H}(\bar{\delta}\mathbf{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi\cdot\mathbf{\Theta}) \tag{36}$$

Promatrat ćemo odvojeno doprinose elektromagnetskim i gravitacijskih polja. Noetherin naboj i formu simplektičkog potencijala možemo zapisati kao

$$\mathcal{Q}_{ab} = \mathcal{Q}^{GR}_{ab} + \mathcal{Q}^{EM}_{ab} \tag{37}$$

pri čemu

$$\mathcal{Q}^{GR}_{ab} = -\frac{1}{16\pi}\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d \tag{38}$$
$$\mathcal{Q}^{EM}_{ab} = -\frac{1}{8\pi}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\xi^e \tag{39}$$

Na sličan način

$$\Theta_{abc} = \Theta^{GR}_{abc} + \Theta^{EM}_{abc} \tag{40}$$

pri čemu

$$\Theta^{GR}_{abc} = \frac{1}{16\pi}\epsilon_{dabc}(\nabla^b\delta g_{db} - g^{ce}\nabla_d\delta g_{ce}) \tag{41}$$
$$\Theta^{EM}_{abc} = \frac{1}{16\pi}\epsilon_{dabc}(-4F_d^{\ b}\delta A_b) \tag{42}$$

Integral u jednadžbi (36) sada je moguće zapisati kao zbroj dva člana

$$\int_{S_H}(\bar{\delta}\mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] - \xi\cdot\Theta^{GR}_{ab}) + \int_{S_H}(\bar{\delta}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] - \xi\cdot\Theta^{EM}_{ab})$$

Potrebno je izvrijedniti četiri integrala.

Na horizontu [9], imamo relaciju

$$\nabla_c\xi_d = \kappa\epsilon_{cd} \tag{43}$$

pri čemu je ϵ_{cd} binormala na S_H. Promotrimo

$$\begin{aligned}\int_{S_H}\mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] &= \int_{S_H} -\frac{1}{16\pi}\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d \\ &= -\frac{\kappa}{16\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}\epsilon_{cd} \\ &= \frac{\kappa}{8\pi}A\end{aligned} \tag{44}$$

pri čemu je A površina crne rupe. U ovom trenutku, potreban nam je jedan identitet iz [17]

$$\bar{\delta}\int_{S_H} \mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] = \delta\int_{S_H} \mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] - \int_{S_H} \mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] \tag{45}$$

što onda uz (33) daje

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\int_{S_H} \mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] &= \frac{1}{8\pi}\delta(\kappa A) + \frac{1}{16\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}\nabla^c\delta\xi^d \\ &= \frac{1}{8\pi}\delta(\kappa A) + \frac{\delta\Omega_H}{16\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}\nabla^c\varphi^d \\ &= \frac{1}{8\pi}\delta(\kappa A) + \delta\Omega_H J_H \end{aligned}\tag{46}$$

pri čemu je $J_H = \int_{S_H}\epsilon_{abcd}\nabla^c\varphi^d$ prepoznato kao angularni moment crne rupe [17, 18]. Nadalje, drugi član gravitacijskog doprinosa detaljno je izračunat u [3]

$$\begin{aligned}&\int_{S_H}\xi\cdot\Theta^{GR}_{ab} = \\ &= \frac{1}{16\pi}\int_{S_H}\xi^a\epsilon_{dabc}(\nabla^b\delta g_{db} - g^{ce}\nabla_d\delta g_{ce}) \\ &= \frac{1}{8\pi}A\delta\kappa + \delta\Omega_H J_H \end{aligned}\tag{47}$$

Konačno, kombiniranjem izraza (46) i (47) dobivamo

$$\begin{aligned}&\int_{S_H}(\bar{\delta}\mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] - \xi\cdot\Theta^{GR}_{ab}) = \\ &= \frac{1}{8\pi}\delta(\kappa A) + \delta\Omega_H J_H - \frac{1}{8\pi}A\delta\kappa - \delta\Omega_H J_H \\ &= \frac{\kappa}{8\pi}\delta A \end{aligned}\tag{48}$$

što predstavlja ukupni gravitacijski doprinos. Preostaje odrediti elektromagnetski doprinos. Uz pretpostavku o glatkom povlačenju A_a i uz stacionarnost, vrijedi nulti zakon termodinamike crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja (detaljnije u Dodatku B) te je $\Phi^{EM} = -\xi^a A_a|_H$ konstanta izvrijednjeno na dijelu horizonta koji se nalazi u budućnosti bifurkacijske plohe [14]. U slučaju da je A_a glatko na čitavom horizontu, Φ^{EM} iščezava na horizontu budući da ξ^a iščezava na bifurkacijskoj plohi. Računamo

$$\begin{aligned}\int_{S_H}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] &= -\frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\xi^e \\ &= \frac{\Phi^{EM}}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}\end{aligned}\tag{49}$$

U [18], ukupni naboj u asimptotskoj regiji prepoznat je kao $\frac{1}{8\pi}\int_\infty \epsilon_{abcd}F^{cd}$, a budući da radimo slučaj bez izvora (28), isti rezultat mora ostati očuvan ako integral izvrijednimo na horizontu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd} = Q \\ &\int_{S_H}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] = \Phi^{EM}Q\end{aligned}\tag{50}$$

Kao i u gravitacijskom slučaju, koristimo identitet (45) i izraz (33)

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\int_{S_H}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] &= \delta\int_{S_H}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] - \int_{S_H}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] \\ &= \delta(\Phi^{EM}Q) + \frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\delta\xi^e \\ &= \delta(\Phi^{EM}Q) + \frac{\delta\Omega_H}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\varphi^e\end{aligned}\tag{51}$$

Nadalje, koristit ćemo proceduru opisanu u [17] za izračun

$$\int_{S_H}\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}^{EM} = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_H}\epsilon_{cdab}F^{ce}\xi^d\delta A_e \tag{52}$$

Volumni element ϵ_{cdab} izrazit ćemo kao formu

$$\epsilon_{cdab} = \xi_c\wedge N_d\wedge\epsilon_{ab} \tag{53}$$

pri čemu je ϵ_{ab} volumni element na presjeku $S_{\mathcal{H}}$, a N_a buduće orijentirana nul-normala na $S_{\mathcal{H}}$ normalizirana tako da $N^a\xi_a = -1$ [18].

$$\begin{aligned}\int_{S_H}\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}^{EM} &= -\frac{1}{4\pi}\int_{S_H}\xi_c N_d\epsilon_{ab}F^{ce}\xi^d\delta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{S_H}\epsilon_{ab}F^{ce}\xi_c\delta A_e\end{aligned}\tag{54}$$

U ovom trenutku, koristimo $F^{ce}\xi_c \propto \xi^e$, što je pokazano u Dodatku B, te uz zadanu normalizaciju slijedi

$$F^{ce}\xi_c = F^{cf}\xi_c\xi_f\xi^e \tag{55}$$

te

$$\int_{S_H}\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}^{EM} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_H}\epsilon_{ab}F^{cf}\xi_c\xi_f\xi^e\delta A_e \tag{56}$$

s druge strane

$$\begin{aligned}Q\delta\Phi^{EM} &= -\frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}\delta(A_e\xi^e) \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}\delta(A_e)\xi^e \\ &- \frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\delta(xi^e) \\ &= (33) = -\frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}\delta(A_e)\xi^e \\ &- \frac{\delta\Omega_H}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\varphi^e\end{aligned}\tag{57}$$

drugi član u jednadžbi (59) prepoznajemo iz jednadžbe (51). Članovi su jednaki, ali suprotnih predznaka. Preostaje izvrijedniti prvi član u izrazu (59)

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}\delta(A_e)\xi^e = \\
&=\frac{1}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{ab}\wedge N_c\wedge\xi_d F^{cd}\xi^e\delta A_e = \\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{S_H}\epsilon_{ab}F^{cd}N_c\xi_d\xi^e\delta A_e \qquad (58)
\end{aligned}$$

što vidimo da odgovara jednadžbi (56). Konačno možemo pisati

$$Q\delta\Phi^{EM}=\int_{S_H}\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}^{EM}-\frac{\delta\Omega_H}{8\pi}\int_{S_H}\epsilon_{abcd}F^{cd}A_e\varphi^e \quad (59)$$

Sada se vraćamo na izraz (51) te dobivamo

$$\bar{\delta}\int_{S_H}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi]=\Phi^{EM}\delta Q+\int_{S_H}\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}^{EM} \quad (60)$$

te konačno rješavamo integral

$$\begin{aligned}
&\int_{S_H}(\bar{\delta}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi]-\xi\cdot\Theta^{EM}_{ab}) = \\
&=\Phi^{EM}\delta Q+\int_{S_H}\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}^{EM}-\int_{S_H}\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}^{EM} \\
&=\Phi^{EM}\delta Q \qquad (61)
\end{aligned}$$

Kombiniranje izraza (36), (48) i (61) dobivamo konačnu verziju prvog zakona mehanike crnih rupa

$$\delta M=\frac{\kappa}{8\pi}\delta A+\Omega_H\delta\mathcal{J}+\Phi^{EM}\delta Q \quad (62)$$

što je očekivani rezultat za Einstein-Maxwellovu teoriju.

B. Fizikalni proces

Da bismo izveli drugu verziju prvog zakona mehanike crnih rupa, tzv. verziju fizikalnog procesa u kojem se stacionarna crna rupa promijeni u nekom infinitezimalnom fizikalnom procesu, moramo proširiti formalizam opisan u prethodnim poglavljima. Iz jednadžbe (30) pročitali smo Noetherin naboj te uz taj izraz i formu simplektičkoga potencijala, proveli daljnji račun. Iz (30) možemo pročitati i $\boldsymbol{C}_a$ iz jednadžbe (9):

$$C_{bcda}=\frac{1}{8\pi}\epsilon_{dabc}(G^{ab}-8\pi T^{ab}_{EM})\xi_e+\frac{1}{4\pi}\epsilon_{dabc}A_e\xi^e\nabla_f F^{df} \quad (63)$$

U slučaju da je $\boldsymbol{C}_a=0$, imali bismo jednake jednadžbe gibanja kao u prethodnom slučaju, a to odgovara slučaju bez izvora. Ako imamo izvore, možemo pisati [14]

$$8\pi T^{ab}=G^{ab}-8\pi T^{ab}_{EM} \quad (64)$$

$$4\pi j^a=\nabla_b F^{ab} \quad (65)$$

pri čemu je $T^{ab}=T^{ab}_{total}-T^{ab}_{EM}$, ne-elektromagnetski doprinos stres-energijskom tenzoru, a j^a struja Maxwellovih izvora. Ekvivalentno možemo pisati

$$C_{bcda}=\epsilon_{dabc}(T^{e}_{\ a}+j^eA_a) \quad (66)$$

Sada promatramo rješenje (28), slučaj bez izvora (g_{ab},A_a). Neka je $(\delta g_{ab},\delta A_a)$ linearizirana perturbacija koja zadovoljava linearizirane jednadžbe s izvorima δT^{ab} i δj^a, tada imamo

$$\delta C_{bcda}=\epsilon_{dabc}(\delta T^{e}_{\ a}+\delta(j^e)A_a) \quad (67)$$

što uvrštavamo u (18) te dobivamo

$$\delta H_\xi=-\int_\Sigma\epsilon_{dabc}(\xi^a\delta T^{e}_{\ a}+\xi^a\delta(j^e)A_a)+\int_{\partial\Sigma}(\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi]-\xi\cdot\boldsymbol{\Theta}) \quad (68)$$

Izabiremo ξ^a tako da

$$\xi^a=t^a+\Omega_H\varphi^a \quad (69)$$

pri čemu je ξ^a vektorsko polje Killingovog tipa. Nadalje, neka je Σ asimptotska hiperploha koja ovaj put iščezava na horizontu događaja crne rupe, $\mathcal{H}$. Nadalje, zahtijevamo da δT^{ab} i δj^a iščezavaju u blizini beskonačnosti te da početno stanje za δg_{ab} i δA_a iščezava na Σ u blizini horizonta, $\mathcal{H}$ što Σ ostavlja neperturbiranom. Osnovne pretpostavke su da će s sva materija i naboj eventualno završiti u crnoj rupi da se crna rupa svede na neko novo stacionarno rješenje (28). Budući da perturbacije iščezavaju na unutarnjem rubu hiperplohe $\partial\Sigma$ [14], za promatrani slučaj vrijedi

$$\delta M=\Omega_H\delta J-\int_\Sigma\epsilon_{dabc}(\xi^a\delta T^{e}_{\ a}+\xi^aA_a\delta j^e) \quad (70)$$

pa i perturbacije mase i angularnog momenta konačne crne rupe zadovoljavaju relaciju (70). Izraz pod integralom može se zapisati kao struja, α te uz N_a, definirano kao u prethodnome poglavlju imamo

$$\delta M=\Omega_H\delta J-\int_\Sigma\alpha^dN_d\tilde{\epsilon}_{abc} \quad (71)$$

pri čemu je $\tilde{\epsilon}_{abc}=N^d\epsilon_{dabc}$. Budući da pretpostavljamo da u konačnici sva masa i naboj završe u crnoj rupi, integral po Σ možemo izvrijedniti po horizontu, $\mathcal{H}$

$$\delta M=\Omega_H\delta J-\int_{\mathcal{H}}\alpha^dk_d\tilde{\epsilon}_{abc} \quad (72)$$

pri čemu je k^a tangenta na afino-parametrizirane generatore nul-geodezika horizonta događaja, $\mathcal{H}$, neperturbirane crne rupe i vrijedi [14]

$$\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}=-k_{[a}\tilde{\epsilon}_{bcd]} \quad (73)$$

Sada rješavamo integral iz izraza (71). Prvo promatramo dio struje koji je proporcionalan s δj^a

$$I=\int_{\mathcal{H}}\xi^aA_a\delta j^ek_d\tilde{\epsilon}_{abc} \quad (74)$$

Kako je diskutirano u slučaju ravnotežnog stanja, $\Phi^{EM} = -\xi^a A_a|_{\mathcal{H}}$ je konstanta na horizontu crne rupe (nulti zakon termodinamike crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja, detaljnije u Dodatku B). Pišemo

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\mathcal{H}} \Phi^{EM} \delta j^e k_d \tilde{\epsilon}_{abc} \\ &= -\Phi^{EM} \int_{\mathcal{H}} \delta j^e k_d \tilde{\epsilon}_{abc} \end{aligned} \tag{75}$$

pri čemu integral prepoznajemo kao promjenu toka naboja u crnu rupu, δQ, te konačno $I = \Phi^{EM}\delta Q$.

Preostaje odrediti promjenu površine crne rupe. Za to će nam biti potrebna Raychaudhurijeva jednadžba [18]

$$\frac{d\theta}{dV} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - R_{ab}k^a k^b \tag{76}$$

pri čemu je Θ ekstenzija, V afin parametar od k^a, a σ^{ab} tenzor smicanja. U stacionarnom prostorvremenu θ i σ_{ab} iznose 0 pa $[T_{total}]_{ab}k^a k^b|_{\mathcal{H}} = 0$.

Ranije smo spomenuli da je k^a tangenta na afino-parametrizirane generatore nul-geodezika horizonta događaja. Neka je λ afin parametar generatora nul-geodezika horizonta i neka je ϑ takav generator, $p \in \vartheta$. Ekspanzija, θ, generatora nul-geodezika u p definirana je kao $\theta = \nabla_a k^a$. Ekvivalent je (detaljnije u [10])

$$\theta = \frac{1}{A}\frac{dA}{d\lambda} \tag{77}$$

Detalje o Raychaudhurijevoj jednadžbi može se pronaći u Dodatku A.

U ovom trenutku napravljen je jedan izbor koji će znatno pojednostaviti daljnji račun. Pozadinsko prostorvrijeme slagat će se s prostorvremenom perturbirane crne rupe te se stoga generatori nul-geodezika ne mijenjaju [14]. Posljedica takvog izbora je da perturbacija na horizontu nestaje, a $\delta k^a \propto k^a$. Taj nam izbor dopušta invarijantnost promatranog slučaja na difeomorfizam. Sada promatramo varijaciju jednadžbe (76)

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\theta)}{dV} &= -8\pi\delta([T_{total}]_{ab}k^a k^b)|_{\mathcal{H}} \\ &= -8\pi\delta([T_{EM}]_{ab})k^a k^b|_{\mathcal{H}} - 8\pi(\delta T_{ab})k^a k^b|_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{78}$$

pri čemu je korišteno $\delta k^a \propto k^a$ (Dodatak B) i $[T_{total}]_{ab}k^a k^b|_{\mathcal{H}} = 0$ te su tako otpali članovi proporcionalni s δk^a. Detaljnije ćemo pogledati prvi član

$$\begin{aligned} &\delta([T_{EM}]_{ab})k^a k^b|_{\mathcal{H}} \\ &= (2F_{ac}\delta F_b{}^c - \frac{1}{4}\delta g_{ab}F_{de}F_{de} - \frac{1}{2}g_{ab}F_{de}F^{de})k^a k^b \end{aligned} \tag{79}$$

Odmah vidimo da zadnja dva člana otpadaju budući da je k^a nul tipa i u perturbiranom i u neperturbiranom prostorvremenu. Za prvi član koristimo $F_{ac}k^c \propto k_a$ [14]

$$F_{ac}\delta F_b{}^c k^a k^b \propto \delta F_b{}^c k^a k^b = 0$$

zbog asimetrije $\delta F_b{}^c$. Preostaje

$$\frac{d(\delta\theta)}{dV} = -8\pi(\delta T_{ab})k^a k^b|_{\mathcal{H}} \tag{80}$$

Izraz iznad integrirat ćemo preko horizonta. Prije toga, k^a zamijenit ćemo s

$$\begin{aligned} k^a &= (\frac{\partial}{\partial V})^a \\ &= \frac{1}{\kappa V}(\frac{\partial}{\partial v})^a \\ &= \frac{1}{\kappa V}\xi^a \end{aligned} \tag{81}$$

te ćemo izraz (80) s obje strane pomnožiti s κV

$$\kappa \int_{\mathcal{H}} V\frac{d(\delta\theta)}{dV} = -8\pi\int_{\mathcal{H}}(\delta T^b_{\ a})\xi^a k_b$$

Integral po horizontu možemo razdvojiti na integral po presjeku i po afinom parametru V. Lijevu stranu rješavamo parcijalnom integracijom

$$\begin{aligned} &\kappa\int d^2S\int_0^\infty V\frac{d(\delta\theta)}{dV} = \\ &\int d^2S(\theta V)|_0^\infty - \int d^2S\int_0^\infty \delta\theta dV \end{aligned} \tag{82}$$

prvi dio iščezava budući da je $V = 0$ u donjoj granici, a θ trne brže od $1/V$ kako V ide u beskonačnost budući da se crna rupa svede na novo stacionarno rješenje. Koristeći jednadžbu (77) konačno slijedi

$$\kappa\delta A = 8\pi\int_{\mathcal{H}}(\delta T^b_{\ a})\xi^a k_b \tag{83}$$

Kombiniranjem izraza (71), (75) i (83) imamo

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H\delta\mathcal{J} + \Phi^{EM}\delta Q \tag{84}$$

što je rezultat koji smo željeli pokazati.

IV. DISKUSIJA I ZAKLJUČAK

Otkriće sličnosti između poznatih zakona termodinamike i zakona mehanike crnih rupa bilo je iznenađujuće u počecima razvoja ovog područja. Crne rupe na klasičnoj razini imaju tek nekoliko stupnjeva slobode pa je upitno podrijetlo entropije crnih rupa [19]. Slično opasku daje i Wald [5] te primjećuje da je drugi zakon mehanike crnih rupa teorem u diferencijalnoj geometriji, a drugi zakon termodinamike ima statističko podrijetlo. S vremenom je istraživanje počelo pronalaziti veze između gravitacije, termodinamike i kvantne fizike. Termodinamika crnih rupa je područje putem kojega imamo najviše iskustva s kvantnim fenomenima u jakom gravitacijskom polju [5].

U ovom radu kratko smo predstavili četiri zakona mehanike crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja odnosno u Einstein-Maxwell teoriji. U Dodatku B, izveden je nulti zakon termodinamike, s time da je posebna pažnja posvećena površinskoj gravitaciji κ. Nulti zakon može se dokazati na više načina (dobar pregled, kao i generalizacija za nelinearna elektromagnetska polja u [20]). Prvi način se oslanja na Einsteinovu jednadžbu i dominantni energetski uvjet. Taj je način demonstriran u Dodatku B. Nadalje, postoji dokaz za Killingove horizonte bifurkacijskog tipa [20, 21]. Oni se lako translatiraju i na nulti zakon u prisustvu elektromagnetskih polja u Einstein-Maxwellovoj teoriji, a u [2, 22] je moguće pronaći kvalitetan pregled. Nulti zakon se koristi u izvodu prvog zakona termodinamike crnih rupa što je bila središnja tema ovog rada. Predstavljen je formalizam koji su razvili Wald i suradnici. Taj formalizam ima važno mjesto u modernom proučavanju termodinamike crnih rupa budući da obuhvaća teorije koje je moguće izvesti od lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam oblika

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(g_{ab}; R_{abcd}, \nabla_a R_{abcd}, \ldots; \psi, \nabla_a \psi, \ldots)$$

Također, valja istaknuti da formalizam ne nameće gornju granicu na broj derivacija, sve dok je isti konačan.

Ovdje smo Waldov formalizam, formalizam kovarijantnog faznog prostora, primijenili na Einstein-Maxwellovu teoriju i izveli dvije verzije prvog zakona mehanike crnih rupa. Verziju ravnotežnog stanja, u kojoj uspoređujemo površinu dvaju infinitezimalno bliskih rješenja za crne rupe, te verzija fizikalnoga procesa, u kojoj se stacionarna crna rupa mijenja pod utjecajem nekog infinitezimalnog fizikalnog procesa, a rezultat se dobije uspoređujući konačno i početno stanje (pretpostavlja se da se crna rupa svede na novo stacionarno stanje) te je pokazano

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta \mathcal{J} + \Phi^{EM}\delta Q \tag{85}$$

Mnoge generalizacije u odnosu na Einstein-Maxwellovu teoriju već su napravljene. U [8] učinjeno je poopćenje na Einstein-Young-Mills teoriju, a isto je učinjeno je i u [17]. U [20] napravljeno je poopćenje za nelinearnu elektrodinamiku, izvedene su obje verzije prvog zakona - verzija fizikalnog procesa i verzija ravnotežnog stanja.

V. DODACI

A. Raychaudhurijeva jednadžba

Raychaudhurijeva jednadžba predstavljena je u Raychaudhurijevu radu iz 1955. [23], a od tada je našla primjenu u mnogim područjima fizike. Ključna je jednadžba u dokazima teorema o singularitetu, gdje se prvi put pojavila u radu Penrosea [24] i Hawkinga [25, 26]. U ovom radu Raychaudhurijeva jednadžba se koristi kako bi se izračunala promjena površine crne rupe u verziji fizikalnog procesa prvog zakona mehanike crnih rupa, ali također se koristi i u pokazivanju nultog zakona mehanike crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja (Dodatak B). Jednadžba opisuje kongruenciju vremenskih i svjetlosnih geodezika [27], a u nastavku razjašnjavamo pojmove i predstavljamo izvod jednadžbe. U izvodu ćemo pratiti poglavlja 9.2 u [18] i 2.3.4 u [27].

Neka je $\mathcal{M}$ mnogostrukost i neka je O otvoreni podskup mnogostrukosti $\mathcal{M}$. Kongruencijom u O nazivamo skupinu krivulja tako da kroz svaku točku $p \in O$ prolazi jedna i samo jedna krivulja iz kongruencije [18]. Tangente na kongruenciju tvore vektorsko polje u O, ali vrijedi i obrat: svako neprekidno vektorsko polje generira kongruenciju. Kongruencija je glatka ako je i pridruženo vektorsko polje glatko. Promotrimo glatku kongruenciju geodezika vremenskog tipa parametriziranih vlastitim vremenom, τ, tada za pridruženo (tangentno) vektorsko polje vrijedi $\xi^a \xi_a = -1$. Uvodimo tenzorsko polje

$$B_{ab} = \nabla_b \xi_a \tag{86}$$

za koje vrijedi

$$B_{ab}\xi^a = B_{ab}\xi^b = 0 \tag{87}$$

U [18], dana je fizikalna interpretacija tenzorskog polja B_{ab}: za skupinu glatkih jednoparametarskih geodezika, $\gamma_s(\tau)$, koja je podskup kongruencije, promatramo vektor ortogonalnog odstupanja od nekog geodezika γ_0, η^a. Uz $\mathcal{L}_\xi \eta^a = 0$ imamo

$$\xi^b \nabla_b \eta^a = \eta^b \nabla_b \xi^a = B^a{}_b \eta^b \tag{88}$$

te $B^a{}_b$ predstavlja mjeru neuspjeha paralelnog transfera vektora η^a. Uvodimo prostornu metriku:

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b \tag{89}$$

pri čemu je $h^a{}_b = g^{ac}h_{cb}$ operator projekcije na podprostor tangentnog prostora okomitog na ξ^a.

Sada smo stekli sve preduvjete da definiramo ključne veličine: ekspanziju Θ, smicanje σ_{ab} i vrtloženje ω_{ab} pomoću ranije uvedenih B_{ab} i h_{ab}

$$\theta = B^{ab}h_{ab} \tag{90}$$

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\Theta h_{ab} \tag{91}$$

$$\omega_{ab} = B_{[ab]} \tag{92}$$

B_{ab} je sada moguće prikazati kao

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \tag{93}$$

Ekspanzija, θ, mjeri prosječno širenje infinitezimalno bliskog okruženja geodezika, vrtloženje, ω_{ab}, neparni je dio B_{ab} te mjeri rotaciju, a σ_{ab} mjeri smicanje odnosno promjenu oblika inicijalne površine (npr. iz sfere u elipsoid).

Računamo

$$\begin{aligned}\xi^c\nabla_c B_{ab} &= \xi\nabla_c\nabla_b\xi_a = \xi\nabla_b\nabla_c\xi_a + R_{cba}{}^d\,\xi^c\xi_d \\ &= \nabla_b(\xi^c\nabla_c\xi_a) - (\nabla_b\xi^c)(\nabla_c\xi_a) + R_{cba}{}^d\,\xi^c\xi_d \\ &= -B^a_{\ b}B_{ac} + R_{cba}{}^d\,\xi^c\xi_d \end{aligned} \tag{94}$$

kontrakcijom (94) s h_{ab} izračunavamo trag te dobivamo

$$\xi^c\nabla_c\theta = \frac{d\theta}{dV} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab}\xi^a\xi^b \tag{95}$$

čime smo došli do kraja izvoda.

Jednadžba (95) može otkriti neka svojstva stacionarnih crnih rupa. Ponajprije, polazeći od izraza (87), primjenom Frobeniusova teorema, proizlazi da je kongruencije svjetlosnih geodezika lokalno ortogonalna na hiperplohu jedino ako je vrtloženje $\omega_{ab} = 0$ [18, 27], a to je slučaj za stacionarne crne rupe. Rayachaudhurijeva jednadžba također nameće $\sigma_{ab} = 0$ za svjetlosne generatore horizonta događaja [27], a ove smo činjenice koristili u izvodu verzije fizikalnog procesa. Nadalje, da bi horizont događaja bio stacionaran, mora vrijediti $\theta = 0$ i $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ te uvrštavanjem Einsteinovih jednadžbi polja i prikladnoga energetskoga uvjeta [27] slijedi

$$T_{ab}\xi^a\xi^b = 0 \tag{96}$$

B. Nulti zakon mehanike crnih rupa

Nulti zakon mehanike crnih rupa predstavili smo u uvodu, a rezultatima nultog zakona mehanike crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja služili smo se u izvodu obje verzije prvog zakona: verzije ravnotežnog stanja i verzije fizikalnog procesa. U uvodu smo spomenuli dvije veličine, površinsku gravitaciju *kappa* i električni potencijal Φ_{bh}. Ovdje ćemo razmotriti obje veličine.

Površinska gravitacija κ: Za stacionarnu crnu rupu, postoji Killingovo polje ξ^a koje je normalno na horizont crne rupe. Budući da je horizont svjetlosna ploha, na horizontu vrijedi

$$\xi^a\xi_a = 0|_H \tag{97}$$

te slijedi da je $\nabla^a(\xi^b\xi_b)$ također normalno na horizont što nam dopušta definirati funkciju κ za koju vrijedi [18]

$$\nabla^a(\xi^b\xi_b) = -2\kappa\xi^a \tag{98}$$

što se može izvrijedniti te uz primjenu Killingove jednadžbe

$$\nabla_b\xi_c = -\nabla_c\xi_b \tag{99}$$

daje

$$\xi^b\nabla_a\xi^b = -\xi^b\nabla_b\xi^a = -\kappa\xi_a \tag{100}$$

Budući da je ξ^a okomito na hiperplohu, iz Frobeniusovog teorema slijedi [18]

$$\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]} = 0 \tag{101}$$

te koristeći relaciju (99) izvrijednimo na horizontu

$$\xi_c\nabla_a\xi_b = -2\xi_{[a}\nabla_{b]}\xi_c \tag{102}$$

Jednadžbu (102) sada možemo kontrahirati s $\nabla^a\xi^b$ te računamo

$$\begin{aligned}\xi_c(\nabla^a\xi^b\nabla_a\xi_b) &= -2\xi_a\nabla^a\xi^b\nabla_b\xi_c \\ &= -2(\xi_a\nabla^a\xi^b)(\nabla_b\xi_c)\end{aligned} \tag{103}$$

kao prvi faktor s lijeve strane jednadžbe (103) prepoznajemo jednadžbu (100) pa

$$\begin{aligned}\xi_c(\nabla^a\xi^b\nabla_a\xi_b) &= -2\kappa\xi^b\nabla_b\xi_c \\ &= -2\kappa^2\xi_c\end{aligned} \tag{104}$$

što se može zapisati na prepoznatljiv način

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^a\xi^b)(\nabla_a\xi_b) \tag{105}$$

Jednadžba (105) se u literaturi često koristi kao definicijska relacija površinske gravitacija κ. Jedna od opcija dokaza bila bi derivirati jednadžbu (105) što je detaljno učinjeno u [27]. Tom bi se derivacijom odmah pokazalo je κ konstantna uzduž generatora horizonta te bi preostalo pokazati da je κ konstantna i između generatora čime bi bilo pokazano da je površinska gravitacija konstantna na horizontu. Ovdje će biti prikazan izvod po uzoru na [18].

Na jednadžbu (100) djelujemo s $\xi_{[d}\nabla_{c]}$

$$\begin{aligned}&\xi_{[d}\nabla_{c]}(\xi^b\nabla_b\xi^a) = \xi_{[d}\nabla_{c]}(\kappa\xi_a) \\ &(\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi^b)(\nabla_b\xi^a) + \xi^b\xi_{[d}\nabla_{c]}\nabla_b\xi^a = \\ &\xi_a\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa + \kappa\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi_a\end{aligned} \tag{106}$$

U sljedećem koraku potreban nam je identitet iz diferencijalne geometrije

$$\nabla_a\nabla_b\xi_c = -R_{bca}{}^d\,\xi_d \tag{107}$$

koji vrijedi za svako Killingovo polje ξ^a [18]. Pomoću relacije (107) raspisujemo drugi član na lijevoj strani jednadžbe (106)

$$\begin{aligned}&(\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi^b)(\nabla_b\xi^a) - \xi^b R_{ba[c}{}^e\,\xi_{d]}\xi_e = \\ &= \xi_a\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa + \kappa\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi_a\end{aligned} \tag{108}$$

primijetimo sada da uz pomoć relacije (102) prvi član s lijeve strane možemo pisati

$$\begin{aligned}(\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi^b)(\nabla_b\xi^a) &= -\frac{1}{2}(\xi^b\nabla_{d]}\xi_c)(\nabla_b\xi^a) \\ &= -\frac{1}{2}\kappa\xi_a\nabla_d\xi_c \\ &= \kappa\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi_a\end{aligned} \tag{109}$$

pri čemu smo koristili jednadžbu (100). Vidimo da se ovaj član krati s drugim članom s desne strane te preostaje

$$-\xi^b R_{ba[c}{}^{e}\,\xi_{d]}\xi_e = \xi_a \xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa \qquad (110)$$

Također možemo promotriti djelovanje $\xi_{[d}\nabla_{e]}$ na jednadžbu (100)

$$\begin{aligned}(\xi_{[d}\nabla_{e]}\xi_c)\nabla_a\xi_b + \xi_c\xi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_a\xi_b = \\ = -2(\xi_{[d}\nabla_{e]}\xi_{[a})\nabla_{b]}\xi_c - 2(\xi_{[d}\nabla_{e]}\nabla_{[b}\xi_{|c|})\xi_{a]}\end{aligned} \qquad (111)$$

primjenom relacija (102) i (107) dobivamo

$$-\xi_c R_{ab[e}{}^{f}\,\xi_{d]}\xi_f = 2\xi_{[a}R_{b]cd}{}^{f}\,\xi^c\xi_f \qquad (112)$$

sada vršimo kontrakciju po indeksima c i e množeći jednadžbu (112) s g^{ce} te dobivamo

$$-\xi_{[a}R_{b]}{}^{f}\,\xi_f\xi_d = \xi_{[a}R_{b]cd}{}^{f}\,\xi^c\xi_f \qquad (113)$$

te sada direktnom usporedbom s jednadžbom (110) dobivamo

$$\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = \xi_{[a}R_{b]}{}^{f}\,\xi_f \qquad (114)$$

Do sada je jedina pretpostavka u izvodu bila stacionarnost crne rupe, a izvod smo proveli na temelju teorema iz diferencijalne geometrije. Da bismo pokazali da desna strana jednadžbe (114) iščezava, koristit ćemo se Einsteinovom jednadžbom i dominantnim energetskim uvjetom. Pritom se vodimo diskusijom u [18]. Dominantni energetski uvjet zahtjeva da $-T^a_{\ b}\,\xi^b$ mora biti buduće orijentiran vektor vremenskoga tipa ili vektor svjetlosnoga tipa, no iz Einsteinove i Raychaudhurijeve jednadžbe slijedi $T^a_{\ b}\,\xi^b\xi_a = 0$, a to znači da se smjerovi $-T^a_{\ b}\,\xi^b$ i ξ^a poklapaju tj. $\xi_{[c}T_{a]b}\xi^b = 0$ što primjenom Einsteinove jednadžbe potvrđuje da je desna strana jednadžbe (114) jednaka 0, a stoga

$$\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = 0 \qquad (115)$$

što znači da je κ konstanta na horizontu, a to smo željeli pokazati.

Električni potencijal Φ_{bh}: postoji niz relevantnih izvora za detaljan dokaz nultog zakona mehanike crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja. Koristan pregled dokaza dan je u [2, 22], a nekoliko verzija dokaza poopćenih za nelinearna elektromagnetska polja dano je u [20]. Ovdje donosimo tek jedan kratak dokaza koji slijedi iz već razvijenog formalizma Raychaudhurijeve jednadžbe, a predstavljen je u [14]. Polazimo od definicijske relacije za električni potencijal, Φ_{bh}

$$\Phi_{bh} = -(\xi^a A_a)|_H \qquad (116)$$

pri čemu je A_a baždarno polje određeno sa $F = dA$ [2]. Promatramo

$$\nabla_a(A_b\xi^b) = \mathcal{L}_\xi A_a + \xi^b(dA)_{ab} \qquad (117)$$

$$= \mathcal{L}_\xi A_a + \xi^b F_{ab} \qquad (118)$$

Budući da je ξ^a simetrija pozadinskog rješenja, liejeva derivacija iščezava $\mathcal{L}_\xi A_a = 0$. U ovom trenutku, trebat će nam diskusija s kraja Dodatka A o Raychaudrijevoj jednadžbi za stacionarnu crnu rupu. Jednadžba (96) u konkretnom slučaju postaje

$$[T_{EM}]_{ab}k^a k^b|_H = 0 \qquad (119)$$

pri čemu je k^a tangenta na afino-parametrizirane generatore nul-geodezika horizonta događaja. Raspisujemo dalje

$$[T_{EM}]_{ab}k^a k^b|_H = 0 = F_{ac}F_b{}^c k^a k^b \qquad (120)$$

Sada je $F_{ab}k^a$ svjetlosnog tipa te budući da je $F_{ab}k^a k^b = 0$, asimetričnost F_{ab} implicira $F_{ab}k^a \propto k_b$, što je jedan od rezultata koji često koristimo. Autori u [14] dalje argumentiraju da povlačenje $F_{ab}k^a$ na horizont iščezava te da stoga iščezava i povlačenje $\nabla_a\Phi_{bh}$ na horizont, odnosno da je Φ_{bh} konstanta na horizontu što je upravo nulti zakon mehanike crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja. Vrijedi istaknuti da se elegantno pojednostavljenje može pronaći u [2].

C. Diferencijalna geometrija

Rezultati koje predstavljamo u ovom radu izrečeni su jezikom diferencijalne geometrije. U ovom dodatku ciljamo sažeto predstaviti najvažnije koncepte iz diferencijalne geometrije koje susrećemo u radu te navesti neke važne rezultate.

Sve operacije koje vršimo događaju se na mnogostrukosti. Mnogostrukost predstavlja skup sačinjen od dijelova koji lokalno nalikuju na podskupove od $\mathbb{R}^n$. Preciznije [18]:

Definicija I n-dimenzionalna, C^∞, realna mnogostrukost M je skup s familijom podskupova $\{O_\alpha\}$ za koje vrijedi:

(i) Svaka točku $p \in M$ leži u barem jednom podskupu O_α; $\{O_\alpha\}$ pokriva M

(ii) Za svaki indeks α, postoji bijekcija $\psi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$ pri čemu je U_α otvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$

(iii) Ako $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, tada možemo promatrati preslikavanje $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ koje preslikava točke iz $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \in U_\alpha \in \mathbb{R}^n$ u točke u $\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \in U_\beta \in \mathbb{R}^n$. Tražimo da su U_α i U_β otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ te da je preslikavanje $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ klase C^∞.

Budući da je formalizam koji smo predstavili namijenjen teorijama koje se mogu izvesti iz lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam, zgodno je definirati što je difeomorfizam. Za početak nam treba definicija topološkog prostora.

Definicija II Difeomorfizam među glatkim mnogostrukostima $(M, \mathcal{A})$ i $(N, \mathcal{B})$ je glatko, neprekidno preslikvanje $f : M \to N$ čiji je inverz f^{-1} također glatka i neprekidna funkcija. Ako postoji difeomorfizam među mnogostrukostima, kažemo da su mnogostrukosti difeomorfne.

Definicija III Neka je M glatka $m-$mnogostrukost. Tangentni vektor u točki $p \in M$ je preslikavanje $X : C^\infty_p(M) \to \mathbb{R}$, koje za sve $f, g \in C^\infty_p(M)$ i $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ zadovoljava

(i) linearnost $X(\kappa f + \lambda g) = \kappa X(f) + \lambda X(g)$ te

(ii) Leibnizovo pravilo: $X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

Skup svih tangentnih vektora u točki $p \in M$ označavamo s T_pM, a skup svih tangentnih vektora na mnogostrukosti M s TM [15].

U svakoj točki $p \in M$ koordinatne karte glatke mnogostrukosti $(O, x^1, \ldots, x^n)$ moguće je definirati tangentne vektore na način

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p \equiv \partial_\mu$$

za $\mu = \{1, \ldots, n\}$. Definirajmo sada diferencijalne forme:

Definicija IV Neka je M glatka mnogostrukost. 1-forma ω u točki $p \in M$ je linearno preslikavanje $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$. Skup svih 1-formi u točki $p \in M$ označavamo s T^*_PM, a skup svih 1-formi na mnogostrukosti M s T^*M.

1-forma je linearni funkcional na prostoru tangentnih vektora. Skup T^*_pM s operacijama

(i) zbrajanja dualnih vektora

(ii) množenja skalarom

čini vektorski prostor dualan tangentnom vektorskom prostoru, a naziva se još i kotangentni vektorski prostor [15]. Za svaku glatku funkciju $f \in C^\infty_p(M)$ možemo definirati 1-formu $df \in T^*_pM$ na način

$$df(X) = X(f)$$

za svaki $X^a \in T_pM$. Primijetimo da smo tako konstruirali bazu tangentnog i kotangetnog vektorskog prostora $\{\partial_\mu\}$ i $\{dx^\mu\}$. Sada smo spremni definirati vektore.

Definicija V Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i V^* njegov dual. Tenzor tipa (r, s) je $\mathbb{K}-$multilinearno preslikavanje:

$$T : V^* \times \ldots V^* \times V \times \ldots V \to \mathbb{K}$$

pri čemu se preslikava r dualnih vektora i s vektora.

Tenzore možemo definirati i preko linearnih kombinacija vektora baza tangentnog i kotangentnog prostora, $\{\partial_\mu\}$ i $\{dx^\mu\}$. Za tenzor tipa (r, s) baza glasi

$$\{\partial_{\mu_1} \otimes \ldots \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \ldots dx^{\nu_s}\}$$

Tenzorsko polje je funkcija koja svakoj točki $p \in M$ pridružuje tenzor. Analogno za vektorsko polje.

Definicija VI Diferencijalna forma reda p ili $p-$forma je totalno antisimetrični tenzor ranga $(0, p)$.

Definicija VII Vanjska derivacija d, $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$

$$(d\omega)_{a_1 \ldots a_{p+1}} = (p+1)\nabla_{[a_1}\omega_{a_2 \ldots a_{p+1}]}$$

Definicija VIII Lijeva derivacija tenzorskog polja T s obzirom na glatko vektorsko polje X^a tangentno na orbite 1-parametarske grupe difeomorfizama ϕ_t definirana je kao

$$\mathcal{L}_X T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(\phi^*_\epsilon - \phi^*_0) T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s}$$

Lijeva derivacija automatski je definirana i za diferencijalne forme. Najčešće se koristimo Cartanovom magičnom formulom (12) koju smo i mi koristili u ovom radu. Za kraj ovog kratkog pregleda diferencijalne geometrije, spomenut ćemo i Frobeniusov teorem koji se koristi u izvodu relacije (102). Detaljnije upoznavanje s Frobeniusovim teoremom traži formalizam svežnjeva što je van fokusa ovog rada. Detalje je moguće pronaći u [15, 18].

[1] S. Carlip, Black Hole Thermodynamics, gr-qc/1410.1486 (2014).

[2] I. Smolić, Killing Horizons as Equipotential Hypersurfaces, Class. Quantum Grav. **29**, 2007002 (2012), gr-qc/1205.1071.

[3] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking, The Four Laws of Black Hole Mechanics, Commun. math. Phys. **31**, 161 (1973).

[4] S. Hawking, Particle Creation by Black Holes, Commun. math. Phys. **43**, 199 (1975).

[5] R. Wald, The Thermodynamics of Black Holes, LivingRev.Rel. (2001).

[6] J. Bekenstein, Black Holes and Entropy, Phys.Rev. **D7**, 2333 (1973).

[7] J. Bekenstein, Generalized Second Law of Thermodynamics in Black-Hole Physics, Phys.Rev. **D9**, 3292 (1974).

[8] D. Sudarsky and R. Wald, Extrema of Mass, Stationarity and Staticity, and Solutions to the Einstein-Young-Mills Equations, Phys.Rev. **D46**, 1453 (1992).

[9] V. Iyler and R. Wald, Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dynamical Black Hole Entropy, Phys.Rev. **D50**, 846 (1994).

[10] R. Wald, Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics (University of Chicago Press, Chicago, 1994).

[11] R. Wald, Black Hole Entropy is Noether Charge, Phys.Rev. **48**, 3427 (1993).

[12] J. Lee and R. Wald, Local Symmetries and Constraints, J.Math.Phys. **31**, 725 (1990).

[13] S. Hawking and G. Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).

[14] S. Gao and R. Wald, The 'phyisical process version' of the first law and the generalized second law for charged and rotating black holes, Phys.Rev. **D64** (2001).

[15] I. Smolić, Diferencijalna geometrija u fizici (skripta, 2022).

[16] R. Wald and A.Zoupas, General definition of 'conserved quantities' in general relativity and other theories of gravity, Phys.Rev. **D61**, 084027 (2000).

[17] S. Gao, First law of black hole mechanics in Einstein-Maxwell and Einstein-Yang-Mills theories, Phys.Rev. **D68**, 044016 (2003).

[18] R. Wald, General Relativity (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[19] A. Wall, A Survey of Black Hole Thermodynamics, gr-qc/1804.10601 (2018).

[20] I. S. A. Bokulić and T. Jurić, Black hole thermodynamics in the presence of nonlinear electromagnetic fields, Phys.Rev. **D103**, 124059 (2021), gr-qc/2102.06213.

[21] B. Kay and R. Wald, Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon, Phys.Rept. **207**, 49 (1991).

[22] I. Smolić, On the various aspects of electromagnetic potentials in spacetimes with symmetries, Class. Quantum Grav. **31**, 235002 (2014), gr-qc/1404.1936.

[23] A. Raychaudhuri, Relativistic Cosmology i., Phys.Rev. **98**, 1123 (1955).

[24] R. Penrose, Gravitational Collapse and Space-Time Singularities, Phys.Rev.Lett. **14**, 57 (1965).

[25] S. Hawking, Occurrence of Singularities in Open Universes, Phys.Rev.Lett. **15**, 689 (1965).

[26] S. Hawking, Singularities in the Universes, Phys.Rev.Lett. **17**, 444 (1966).

[27] E. Poisson, A Relativist's Toolkit (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).