

# Fazni prijelazi QCD-a u DSE modelu s Polyakovljevom petljom

Eugen Hukić

Mentor: izv. prof. dr. sc. Davor Horvatić

*Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb*

Pomoću pojednostavljenog Dyson-Schwingerovog modela proučavane su ovisnosti mase kvarkova o temperaturi i kiralni fazni prijelazi za  $u$ ,  $d$  i  $s$  kvark. Uvedena je Polyakovljeva petlja kao parametar uređenja za fazni prijelaz oslobođenja. Proučavao se utjecaj uključenja Polyakovljeve petlje u Dyson-Schwingerov model na pseudokritične temperature kiralnog faznog prijelaza. Uključenjem Polyakovljeve petlje pseudokritične temperature kiralnog faznog prijelaza za lake kvarkove i  $s$  kvark su se značajno približile, no nije dobivena potpuna sinkronizacija temperatura.

## I. UVOD

Dio kvantne kromodinamike koji se bavi proučavanjem masa kvarkova, te kiralnog faznog prijelaza i faznog prijelaza oslobođenja spada u neperturbativni režim QCD-a, tj. QCD-a na niskim energijama. Na niskim energijama je konstanta vezanja u QCD-u velika,  $\alpha_S \sim \mathcal{O}(1)$ , pa se ne može koristiti perturbacijski razvoj koji se koristi na visokim energijama. U neperturbativnom režimu QCD-a, područje energija nižih od 1 GeV, koriste se razne neperturbativne metode, kao račun na rešetki, renormalizacijska grupa, Dyson-Schwingerov pristup i razni efektivni modeli.

### I.1. Kiralni fazni prijelaz i fazni prijelaz oslobođenja

Jedna od posljedica neperturbativnosti QCD na niskim energijama je dinamički lom kiralne simetrije. Ako je masa kvarka  $m = 0$ , lagranžijan QCD ima dodatnu simetriju, kiralnu. To se može vidjeti tako da se promotri lagranžijan QCD-a:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f^\alpha (i\gamma_\mu D_{\alpha\beta}^\mu - m_f \delta_{\alpha\beta}) \psi_f^\beta - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (1)$$

gdje su  $\psi_f$  kvarkovska polja okusa  $f$ , a indeks  $\alpha, \beta$  idu po bojama, od 1 do 3.  $D_{\alpha\beta}$  je kovarijantna derivacija, a  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  je tenzor gluonskog polja, gdje je  $A_\mu^a$  baždarno gluonsko polje, te indeks  $a$  ide od 1 do 8. Kada u lagranžijanu s poljem  $\psi$  razdvojimo lijevu  $\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi$  i desnu  $\psi_D = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi$  projekciju, jedini član koji smeta da se lagranžijan razdvoji na dva nezavisna polja je član uz masu. Znači, ako je  $m = 0$ , lagranžijan je invarijantan na globalne unitarne rotacije u prostoru okusa, gdje se nezavisno transformiraju  $\psi_L$  i  $\psi_R$ . Ukupna simetrija lagranžijana je  $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$  i naziva se kiralna simetrija.

Iako lagani kvarkovi ( $u$  i  $d$  kvark), te  $s$  kvark nisu bezmaseni, njihova strujna (lagranžijanska) masa je dovoljno mala da se može zanemariti, te se može reći da je kiralna simetrija približna simetrija sustava. Kvarkovi u hadronima su podložni nekoj vrsti dinamičkog generiranja mase kroz gluonsku interakciju, tj. u hadronima

kvarkovi su masivniji. Ta konstituentna masa kvarkova je približno 100 puta veća od strujne mase kvarka. Dakle, imamo dvije faze, u kiralno simetričnoj fazi masa kvarka je jednaka strujnoj masi, a u fazi s narušenom kiralnom simetrijom kvark ima veliku konstituentnu masu. Kao parametar uređena za kiralni prijelaz može se uzeti konstituentna masa kvarka.

Značajan aspekt QCD je hipoteza zatočenja. U prirodi su uočena samo stanja koja su bojno-neutralna, tj. svi hadroni su bojni singleti. No, ne postoji analitički dokaz zatočenja boja. Danas se smatra da na vrlo visokim temperaturama, termalne fluktuacije postaju dovoljno jake da razbiju vezana stanja hadrona, te dolazi do faznog prijelaza gdje kvarkovi i gluoni tvore kvark-gluon plazmu. Kvark-gluon plazma se može ostvariti i u sustavima s velikom gustoćom materije. Moguće je uvesti parametar uređenja koji kvantitativno govori o faznom prijelazu iz faze zatočenja boje u fazu slobodnih kvarkova. Takav parametar je Polyakovljeva petlja, koji je povezan sa spontanom lomom centralne simetrije.

Računi na QCD rešetki i efektivni modeli pokazuju da se temperatura na kojoj dolazi do faznog prijelaza oslobođenja poklapa ili je jako blizu temperaturi na kojoj dolazi do kiralnog prijelaza. To ukazuje da postoji veza između ova dva prijelaza, no zbog neperturbativne dinamike ju je teško proučavati.

### I.2. Funkcionalni integrali u QCD-u

U kvantnoj teoriji polja, pomoću jednadžbi polja može se izvesti sistem vezanih integralnih jednadžbi koji povezuje sve Greenove funkcije teorije. Taj skup jednadžbi se nazivaju Dyson-Schwingerove jednadžbe (DSE). On je beskonačan niz neperturbativnih, vezanih jednadžbi, koji je nemoguće egzaktno riješiti. U QCD-u se interakcije između kvarkova i gluona opisuju Dyson-Schwingerovim jednadžbama.

Moderni pristup kvantizacije teorija poput QCD-a je pomoću formalizma integrala po putevima. Ovdje ćemo uvesti samo neke veličine pomoću kojih se dolazi do jednadžbi za kvarkovski propagator. U kvantnoj teoriji polja amplitude prijelaza mogu se dobiti iz Greenovih funkcija, a one se pak dobe iz veličine koja se naziva generirajućim funkcional  $W$ , koji u QCD-u ima oblik:

$$W[\Xi, \bar{\Xi}, J_\mu] = \int [D\bar{\psi}][D\psi][DA_\mu] \exp\left\{iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^4x \left(\bar{\psi}^f(x)\Xi^f(x) + \bar{\Xi}^f(x)\psi^f(x) + J^\mu(x)A_\mu(x)\right)\right\} \quad (2)$$

gdje je  $S = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}$  QCD akcija.  $J_\mu$  predstavlja izvor vektorskog polja, dok  $\Xi$  i  $\bar{\Xi}$  služe kao izvor fermiona i koji su Grassmannove varijable. Ta polja izvora su dodana u lagranžijan za lakše računanje Greenovih funkcija.

Greenove funkcije se mogu prikazati u reprezentaciji integrala po putevima

$$\langle 0 | T \bar{\psi}(x) \psi(y) | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}] \bar{\psi}(x) \psi(y)}{\int \mathcal{D}[\bar{\psi}\psi A] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}]} \quad (3)$$

Iz prethodne jednadžbe se vidi da se do Greenovih funkcija može doći funkcionalnom derivacijom po odgovarajućim strujama koje se potom izjednače s nulom:

$$\left. \frac{\delta^2 W[\bar{\Xi}, \Xi, 0]}{i \delta \bar{\Xi}(x) (-i) \delta \Xi(y)} \right|_{\bar{\Xi}=0=\Xi} =: \frac{\langle 0 | T \bar{\psi}(x) \psi(y) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \quad (4)$$

Generirajući funkcional za "povezane" Greenove funkcije,  $Z[\eta, \bar{\eta}, J]$ , je definiran kao:

$$W[J_\mu, \Xi, \bar{\Xi}] =: \exp\{iZ[J_\mu, \Xi, \bar{\Xi}]\}. \quad (5)$$

Generirajući funkcional za jednočestičnu ireducibilnu (1PI) Greenovu funkciju,  $\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$ , koji se dobije iz  $Z[J_\mu, \Xi, \bar{\Xi}]$  pomoću Legendrove transformacije, definiran je preko:

$$Z[J_\mu, \Xi, \bar{\Xi}] = \Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + \int d^4x [\bar{\psi}^f \Xi^f + \bar{\Xi}^f \psi^f + A_\mu J^\mu] \quad (6)$$

Iz jednadžbe (2) može se dobiti

$$\frac{\delta Z}{\delta A^\mu(x)} = -J_\mu(x), \quad \frac{\delta Z}{\delta \bar{\Xi}(x)} = \psi(x), \quad \frac{\delta Z}{\delta \Xi(x)} = -\bar{\psi}(x), \quad (7)$$

te prema izrazu (6) vrijedi da  $\Gamma$  mora zadovoljavati:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} = -J_\mu(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}^f(x)} = -\bar{\Xi}^f(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^f(x)} = \Xi^f(x). \quad (8)$$

Može se pokazati da vrijedi:

$$S^f(x, y; [A_\mu]) = -\frac{\delta^2 Z}{\delta \Xi^f(y) \bar{\Xi}^f(x)} = \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\Xi}^f \Xi^f(y)}. \quad (9)$$

Pomoću jednadžbi (7) i (8), iz jednadžbe (9) se dobije:

$$S^f(x, y; [A])^{-1} = \left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(x) \delta \bar{\psi}^f(y)} \right|_{\psi=\bar{\psi}=0} \quad (10)$$

Sljedeće važan korak je da se iskoristi činjenica da integral od potpunog diferencijala iščezava:

$$0 = \int [DA_\mu][D\psi][D\bar{\psi}] \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}^f(x)} \exp\left(iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^4x [\bar{\psi} \Xi + \bar{\Xi} \psi + A_\mu J^\mu]\right). \quad (11)$$

Nastavljanjem ispisivanja prethodnog izraza, te uporabom Ward-Green-Takahashi identiteta i prijelaza u impulsni prostor, dobiva se DS jednadžba za kvarkovski propagator  $S_q(p)$ :

$$S_q(p)^{-1} = ip \cdot \gamma + \tilde{m}_q + \Sigma_q, \quad \Sigma_q \equiv \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{eff}(p-l) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} S_q(l) \Gamma_\nu^a(l, p). \quad (12)$$

Masa  $\tilde{m}_q$  je strujna masa kvarka okusa  $q$ ,  $g$  je jakost vezanja,  $D_{\mu\nu}^{eff}(p-l)$  je puni gluonski propagator, te  $\Gamma_\mu^a(l, p)$  je puni kvark-gluon verteks. Prethodna jednadžba je napisana u euklidskoj konvenciji,  $u \cdot v = \delta_{\mu\nu} v^\mu u^\nu$ .  $\Sigma_q$  predstavlja fermionsku samoenergiju.

### I.3. Dyson-Schwingerov model u vakuumu

Ovdje ćemo koristiti tzv. "rainbow-ladder" aproksimaciju, gdje se puni verteksi zamjenjuju točkastim interakcijama. Prvo ćemo promotriti račun u vakuumu. Uz navedenu aproksimaciju, obučeni kvarkovski propagator  $S_q(p)$  je:

$$S_q(p)^{-1} = i\gamma \cdot p + \tilde{m}_q + \frac{4}{3} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}^{eff}(p-\ell) \gamma_\mu S_q(\ell) \gamma_\nu. \quad (13)$$

U kiralnom limesu vrijedi  $\tilde{m}_q = 0$ . Koristi se model gluonskog propagatora, koji osigurava kratki doseg interakcije i kvarkovsko zatočenje  $g^2 D_{\mu\nu}^{eff}(p-\ell) \rightarrow \delta_{\mu\nu} D(p^2, \ell^2, p \cdot \ell)$ , u feynmanolikom baždarenju:

$$D(p^2, \ell^2, p \cdot \ell) = D_0 \mathcal{F}_0(p^2) \mathcal{F}_0(\ell^2) + D_1 \mathcal{F}_1(p^2) (p \cdot \ell) \mathcal{F}(\ell^2). \quad (14)$$

To je rank-2 separabilna interakcija s dva parametra  $D_i$  i odgovarajućim form faktorima  $\mathcal{F}_i(p^2)$ ,  $i = 1, 2$ . Te veličina izaberu se tako da najbolje opisuju masu lakih kvarkova, te je njihov izbor ograničen rješenjem DS jednadžbe za kvarkovski propagator:

$$S_q(p)^{-1} = i\gamma \cdot p A_q(p^2) + B_q(p^2) \equiv Z_q^{-1}(p^2) [i\gamma \cdot p + m_q(p^2)], \quad (15)$$

gdje je  $m_q(p^2) = B_q(p^2)/A_q(p^2)$  dinamička masa, te  $Z_q(p^2) = A_q^{-1}(p^2)$ . Funkcije  $A_q(p^2)$  i  $B_q(p^2)$  opisuju kvarkovsko oblačenje zbog interakcije propagirajućeg kvarka s punim gluonskim poljem. Ubacivanjem separabilnog ansatza (15) u jednadžbu (13), dobiju se jednadžbe procjepa za kvarkovske amplitude  $A_q(p^2)$  i  $B_q(p^2)$ , koje se mogu dodatno raspisati u feynmanolikom baždarenju

(14), te tada iznose:

$$\begin{aligned} B_q(p^2) - \tilde{m}_q &= \mathcal{F}_0(p^2) \frac{16D_0}{3} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{F}_0(\ell^2) B_q(\ell^2)}{\ell^2 A_q^2(\ell^2) + B_q^2(\ell^2)} \\ &= b_q \mathcal{F}_0(p^2), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A_q(p^2) - 1 &= \mathcal{F}_1(p^2) \frac{2D_1}{3} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2 \mathcal{F}_1(\ell^2) A_q(\ell^2)}{\ell^2 A_q^2(\ell^2) + B_q^2(\ell^2)} \\ &= a_q \mathcal{F}_1(p^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Nakon što se koeficijenti  $a_q$  i  $b_q$  odrede rješavanjem jednadžbi (16) i (17), ostaje parametar  $\tilde{m}_q$  i parametri u modelu gluonskog propagatora, koji se fiksiraju.

#### I.4. Dyson-Schwingerov model na konačnim temperaturama

Proširenje modela na konačne temperature se ostvaruje pomoću Matsubara formalizma, u kojem se realna varijabla vremena  $t$  (nulta u euklidskom prostoru) zamjenjuje imaginarnom  $-i\tau$ . Time se prelazi s 4-impulsa  $l$  na impuls u kojem je nulta komponenta diskretizirana,  $l \rightarrow l_n = (\nu_n, \vec{l})$ , gdje su  $\nu_n = (2n+1)\pi T$  Matsubara frekvencije. To znači da će u računu integral po  $\nu_n$  prijeći u sumu po svim modovima, pomnoženu s  $2\pi \times$  (temperatura). Sada se i kvarkovski propagator treba također korigirati jer se diskretna komponenta 4-impulsa mora tretirati drugačije od ostale tri kontinuirane komponente. To ustvari znači da se na konačnoj temperaturi slama  $O(4)$  simetrija. Ansatz za kvarkovski propagator tada postaje:

$$S^{-1}(p_n, T) = i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} A(p_n^2, T) + i\gamma_4 \omega_n C_q(p_n^2, T) + B_q(p_n^2, T), \quad (18)$$

gdje je  $p_n^2 = \omega_n^2 + \vec{p}^2$ . Uvrštavanjem ansatza za propagator u DS jednadžbu dobiju se jednadžbe za temperaturno ovisne koeficijente:

$$a_q(T) = \frac{8D_1 T}{9} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_1(p_n^2) \vec{p}^2 \frac{1 + a_q(T) \mathcal{F}_1(p_n^2)}{d_q(p_n^2, T)}, \quad (19)$$

$$c_q(T) = \frac{8D_1 T}{3} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_1(p_n^2) \vec{\omega}_n^2 \frac{1 + c_q(T) \mathcal{F}_1(p_n^2)}{d_q(p_n^2, T)}, \quad (20)$$

$$b_q(T) = \frac{16D_0 T}{3} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_0(p_n^2) \frac{\tilde{m}_q + b_q(T) \mathcal{F}_0(p_n^2)}{d_q(p_n^2, T)}, \quad (21)$$

gdje je  $d_q(p^2, T) = \vec{p}^2 A_q^2(p_n^2, T) + \omega_n^2 C_q^2(p^2, T) + B_q^2(p_n^2, T)$ . Koeficijenti u propagatoru su definirani kao:

$$\begin{aligned} B_q(p_n^2, T) &= \tilde{m}_q + b_q(T) \mathcal{F}_0(p_n^2) \\ A_q(p_n^2, T) &= 1 + a_q(T) \mathcal{F}_1(p_n^2) \\ C_q(p_n^2, T) &= 1 + c_q(T) \mathcal{F}_1(p_n^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Efektivna masa je dana relacijom  $m_q = B_q(p_n^2)/A_q(p_n^2)$ , gdje sada koeficijenti ovise i o temperaturi.

Koristit ćemo sljedeći oblik form faktora:

$$\mathcal{F}_0(p^2) = \exp(-p^2/\Lambda_0^2), \quad (23)$$

$$\mathcal{F}_1(p^2) = \frac{1 + \exp(-p_0^2/\Lambda_1^2)}{1 + \exp((p^2 - p_0^2)/\Lambda_1^2)}, \quad (24)$$

za koje vrijedi  $\mathcal{F}_0(0) = \mathcal{F}_1(0) = 1$  i  $\mathcal{F}_0(\infty) = \mathcal{F}_1(\infty) = 0$ . Form faktori se biraju tako da se dobivena ovisnost dinamičke funkcije mase  $M(p) = B(p)/A(p)$  o 4-impulsu slaže s računima na LQCD simulacijama.

## II. DYSON-SCHWINGEROV MODEL S POLYAKOVLJEVOM PETLJOM

### II.1. Polyakovljeva petlja

U ovom poglavlju želimo uvesti parametar koji nam govori o prijelazu iz faze zatočenja kvarkova u fazu gdje su kvarkovi slobodni, koji se naziva fazni prijelaz oslobođenja. Tom prijelazu se pridružuje spontani lom centralne simetrije, koji je onda povezan s pripadajućim parametrom uređenja. Za bolje razumijevanje prvo ćemo promotriti centralnu simetriju.

Na konačnoj temperaturi QCD ima još jednu simetriju koja se povezuje s faznim prijelazom oslobođenja. Promotrimo prvo sustav koji se sastoji samo od gluona. Na konačnoj temperaturi prostor-vrijeme nije više  $\mathbb{R}^4$  mnogostrukost, nego  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$ , četiri-dimenzionalni torus s kompaktnom imaginarnom vremenskom koordinatom  $\tau$ . Dvije točke  $(\vec{x}, \tau)$  i  $(\vec{x}, \tau + \beta)$  su zapravo jedna točka. Pri baždarnoj transformaciji gluonska polja se transformiraju kao:

$$gA_\mu(x) \rightarrow gA'_\mu(x) = U(x)(gA_\mu(x) + i\partial_\mu)U^\dagger(x), \quad (25)$$

te zbog periodičnosti vrijedi:

$$A'_\mu(\vec{x}, \tau + \beta) = A'_\mu(\vec{x}, \tau). \quad (26)$$

Ovu periodičnost će očuvati baždarnе transformacije koje su same periodične  $U(\vec{x}, \tau) = U(\vec{x}, \tau + \beta)$ . Pogledajmo može li se taj uvjet generalizirati. Pretpostavimo da transformacije  $U(x)$  pri namatanju oko vremenskog smjera dobije faktor  $c$  koji ne ovisi o prostornim i vremenskim koordinatama:

$$U(\vec{x}, \tau + \beta) = cU(\vec{x}, \tau). \quad (27)$$

Raspisivanjem, dobije se:

$$\begin{aligned} cU(\vec{x}, \tau)(gA_\mu(\tau) + i\partial_\mu)U^\dagger(\vec{x}, \tau)c^\dagger &= \\ &= U(\vec{x}, \tau)(gA_\mu(\tau) + i\partial_\mu)U^\dagger(\vec{x}, \tau). \end{aligned} \quad (28)$$

Gornja jednakost vrijedi ako  $c$  komutira sa svim elementima baždarnе grupe i poljem  $A_\mu(x)$

$$[c, U(x)] = 0. \quad (29)$$

Grupa svih elemenata koji komutiraju s elementima neke grupe naziva se centar grupe. Dakle,  $c$  je element centra  $Z(N_c)$  grupe  $SU(N_c)$ , te se može zapisati kao:

$$c = \exp \frac{2\pi n i}{N_c} I, \quad n = 0, 1, \dots, N_c - 1 \quad (30)$$

Gluonski sustav ima simetriju s obzirom na baždarnе transformacije koje zadovoljavaju uvjet (27). Ta simetrija se naziva centralna. Sada se dodaju kvarkovi u sustav, te vrijedi transformacija kvarkovskog polja:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x). \quad (31)$$

Kad se primjeni izraz (27) dobije se

$$\psi'(\vec{x}, \tau + \beta) = -c\psi'(\vec{x}, \tau), \quad (32)$$

tj. kvarkovsko polje nije invarijantno na centralne transformacije. Ako su u sustavu prisutni slobodni kvarkovi, centralna simetrija je spontano slomljena. U zatočenoj kvarkovskoj fazi nema slobodnih dinamičkih kvarkova. Antikvark pri transformaciji dobije faktor  $c^\dagger$ , pa ukupni sustav koji se sastoji od kvarka i antikvarka ostaje invarijantan pri centralnoj transformaciji. Za  $N_c = 3$ , sustav od tri kvarka također ostaje invarijantan zbog  $c^3 = I$ . U zatočenoj fazi centralna simetrija je očuvana i fazni prijelaz iz zatočene u slobodnu fazu povezujemo sa spontanom lomom te simetrije.

Sada ćemo u kratkim crtama objasniti kako se uvodi Polyakovljeva petlja. Promotrimo gluonski sustav u kojem smo stavili probni statički kvark  $\mu$  i antikvark  $\nu$ . Statički kvark je aproksimacija u kojoj imamo kvark beskonačne mase u točki  $\vec{x}$  i antikvark u  $\vec{y}$ , te je njihova dinamika ovisi samo i koordinati  $\tau$ . Polyakovljeva petlja se uvodi kao:

$$L(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \left[ \mathcal{T} \left( ig \int_0^\beta d\tau A_4(x) \right) \right], \quad (33)$$

gdje je  $\text{Tr}_c$  trag u prostoru boje,  $A_4(x)$  je četvrta komponenta gluonskog polja, i  $\mathcal{T}$  je operator imaginarno-vremenskog uređenja. Operator u uglatim zagradama je se u općem obliku naziva Wilsonova linija  $W(x_i, x_f)$ , te radi paralelni transport boje iz točke  $x_i$  u točku  $x_f$  po određenom putu. No, kako razmatramo slučaj statičkih kvarkova, krajnja i početna točka se razlikuju samo u koordinati  $\tau$ , te je put po kojem se integrira vektorsko polje paralelan imaginarno-vremenskoj osi. Sada promotrimo kako se Polyakovljeva petlja ponaša pri transformacijama

centralne simetrije. Wilsonova linija se pri baždarnim transformacijama transformira kao:

$$W(x_i, x_f) \rightarrow W'(x_i, x_f) = U(x_f)W(x_i, x_f)U^\dagger(x_i). \quad (34)$$

Transformirana Polyakovljeva petlja je:

$$\begin{aligned} L'(\vec{x}) &= \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \left[ U(\vec{x}, \beta) \mathcal{P} \exp \left( ig \int_0^\tau d\tau A_4(x) \right) U^\dagger(\vec{x}, 0) \right] \\ &= \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \left[ U^\dagger(\vec{x}, 0) cU(\vec{x}, 0) \mathcal{P} \exp \left( ig \int_0^\tau d\tau A_4(x) \right) \right] \\ &= cL(\vec{x}). \end{aligned} \quad (35)$$

Kada se napravi termalno usrednjenje, dobije se (renormalizirana) Polyakovljeva petlja:

$$\Phi = \langle L(\vec{x}) \rangle_\beta \quad (36)$$

U fazi zatočenja centralna simetrija je očuvana, pa i očekivanje Polyakovljeve petlje mora biti invarijantno. Znači da očekivanje Polyakovljeve petlje iščezava u zatočenoj fazi. U kvark-gluon plazmi nema više centralne simetrije i očekivanje Polyakovljeve petlje može poprimiti konačnu vrijednost.

## II.2. DS model s Polyakovljevom petljom

Sada ćemo pokazati kako se u jednadžbe procjepa ubacuje Polyakovljeva petlja. Prvo promotrimo kako se dolazi do jednadžba procjepa (19), (20) i (21) preko termodinamičkog potencijal. Uvodimo potencijal oblika:

$$\begin{aligned} \Omega(T) &= \frac{a_u(T)^2}{C_1^u} + \frac{c_u(T)^2}{C_2^u} + \frac{b_u(T)^2}{C_3^u} + \frac{a_s(T)^2}{C_1^s} + \frac{b_s(T)^2}{C_2^s} + \\ &+ \frac{c_s(T)^2}{C_3^s} - \\ &- 4T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \text{Tr}_c \ln \left[ \bar{p}^2 A_u^2(p_n^2, T) + \omega_n^2 C_u^2(p_n^2, T) + \right. \\ &+ B_u^2(p_n^2, T) \left. \right] - 2T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \text{Tr}_c \ln \left[ \bar{p}^2 A_s^2(p_n^2, T) + \right. \\ &+ \omega_n^2 C_s^2(p_n^2, T) + B_s^2(p_n^2, T) \left. \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Jednadžbe (19), (20) i (21) se mogu dobiti iz uvjeta minimuma na potencijal (37), tj. tako da deriviramo potencijal po varijablama  $b_q(t)$ ,  $a_q(T)$  i  $c_q(t)$ . Tako ćemo fiksirati konstante  $C_1^q$ ,  $C_2^q$  i  $C_3^q$ . Iz uvjeta:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega(T)}{da_u(T)} = 0, \quad \frac{d\Omega(T)}{dc_u(T)} = 0, \quad \frac{d\Omega(T)}{db_u(T)} = 0, \\ \frac{d\Omega(T)}{da_s(T)} = 0, \quad \frac{d\Omega(T)}{dc_s(T)} = 0, \quad \frac{d\Omega(T)}{db_s(T)} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

se dobije:

$$\begin{aligned} C_1^u = \frac{2D_1}{27}, \quad C_2^u = \frac{2D_1}{9}, \quad C_3^u = \frac{4D_0}{9}, \\ C_1^s = \frac{4D_1}{27}, \quad C_2^s = \frac{4D_1}{9}, \quad C_3^s = \frac{8D_0}{9}. \end{aligned} \quad (39)$$

Uključenjem Polyakovljeve petlje u potencijal dobiva se mode koji efektivno uključuju pozadinsko gluonsko polje, tj. povezuje kvarkovski i gluonski sektor. Ukupni termodinamički potencijal koji koristimo i koji uključuje dio s Polyakovljevom petljom ima oblik:

$$\Omega(t) = \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}) - T \text{Tr}_{\vec{p}, n, \alpha, f, D} \left[ \ln \{ S_f^{-1}(p_n^\alpha, T) \} - \Sigma_f(p_n^\alpha, t) \cdot S_f(p_n^\alpha, T) \right]. \quad (40)$$

Puni kvarkovski propagator, gdje  $f$  ide po okusima  $f = u, d, s$ , je:

$$\begin{aligned} S_f^{-1}(p_n^\alpha, T) &= S_{f,0}^{-1}(p_n^\alpha, T) + \Sigma_f(p_n^\alpha, T) \\ &= i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} A_f((p_n^\alpha)^2, T) + i\gamma_4 \omega_n C_f((p_n^\alpha)^2, T) + \\ &\quad + B_f((p_n^\alpha)^2, T). \end{aligned} \quad (41)$$

Član potencijala koji uključuje Polyakovljevu petlju uzet je u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})}{T^4} &= -\frac{1}{2} a(T) \bar{\Phi} \Phi + b(T) \ln [1 - 6 \bar{\Phi} \Phi + \\ &\quad + 4(\bar{\Phi}^3 + \Phi^3) - 3(\bar{\Phi} \Phi)^2], \end{aligned} \quad (42)$$

gdje je  $a(T) = a_0 + a_1(T_0/T) + a_2(T_0/T)^2$ , te  $b(T) = b_2(T_0/T)^3$ . Pripadajući parametri su  $a_0 = 3.51$ ,  $a_1 = -2.47$ ,  $a_2 = 15.22$ ,  $b_3 = -1.75$  i  $T_0 = 270$  MeV. Primjenom Matsubara formalizma, kvadrat od 4-impulsa postaje  $(p_n^\alpha)^2 = (\omega_n^\alpha)^2 + \vec{p}^2$ ,  $\omega_n^\alpha = \omega_n + \alpha\phi_3$ , gdje su  $\omega_n = (2n+1)\pi T$  fermionske Matsubarine frekvencije, a  $\alpha = -1, 0, +1$  indeks koji određuje tri boje kvarka i njihovo vezanje za parametar  $\phi_3$ . Polyakovljeva petlja dana je izrazom:

$$\begin{aligned} \Phi = \bar{\Phi} &= \frac{1}{N_c} \left( 1 + e^{i\frac{\phi_3}{T}} + e^{-i\frac{\phi_3}{T}} \right) \\ &= \frac{1}{N_c} \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{\phi_3}{T} \right) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Uzet je efektivni gluonski propagator u feynmanolikom baždarenju (14), stoga su jednadžbe za amplitude kvarkovskog propagatora:

$$\begin{aligned} B_q((p_n^\alpha)^2, T) &= \tilde{m}_q + b_q(T) \mathcal{F}_0((p_n^\alpha)^2) \\ A_q((p_n^\alpha)^2, T) &= 1 + a_q(T) \mathcal{F}_1((p_n^\alpha)^2) \\ C_q((p_n^\alpha)^2, T) &= 1 + c_q(T) \mathcal{F}_1((p_n^\alpha)^2), \end{aligned} \quad (44)$$

gdje su form faktori uzeti isto kao u izrazima (23) i (24). Temperaturno ovisne jednadžbe procjepa za  $a_f(T)$ ,  $b_f(T)$  i  $c_f(T)$  određene su kao rješenja DS jednadžbe za kvarkovsku samoenergiju, te iznose:

$$a_f(T) = \frac{8D_1}{27} T \sum_{n,\alpha} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_1((p_n^\alpha)^2) \frac{\vec{p}^2 A_f((p_n^\alpha)^2, T)}{d_f((p_n^\alpha)^2, T)}, \quad (45)$$

$$c_f(T) = \frac{8D_1}{9} T \sum_{n,\alpha} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_1((p_n^\alpha)^2) \frac{(\omega_n^\alpha)^2 C_f((p_n^\alpha)^2, T)}{d_f((p_n^\alpha)^2, T)}, \quad (46)$$

$$b_f(T) = \frac{16D_0}{9} T \sum_{n,\alpha} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_0((p_n^\alpha)^2) \frac{B_f((p_n^\alpha)^2, T)}{d_f((p_n^\alpha)^2, T)}, \quad (47)$$

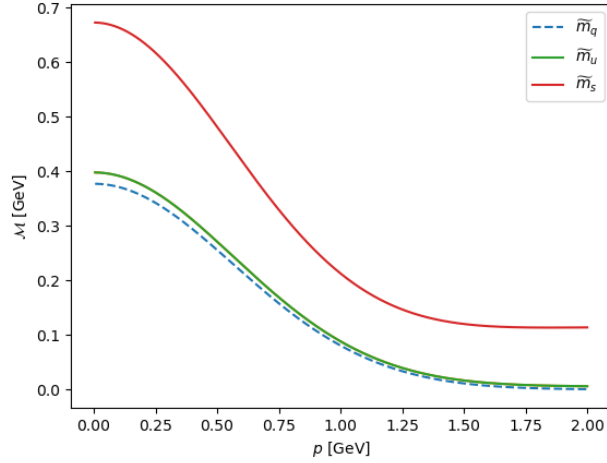
gdje je funkcija u nazivniku  $d_q((p_n^\alpha)^2, T) = \vec{p}^2 A_q^2((p_n^\alpha)^2, T) + (\omega_n^\alpha)^2 C_q^2((p_n^\alpha)^2, T) + B_q^2((p_n^\alpha)^2, T)$ . Jednadžbe (45), (46) i (47) odgovaraju minimumu termodinamičkog potencijala (40) s obzirom na temperaturno ovisne jednadžbe procjepa  $a_f(T)$ ,  $b_f(T)$  i  $c_f(T)$ , te se njima još dodaje odgovarajuća jednadžba procjepa za Polyakovljevu petlju koja se dobiva iz uvjeta  $\partial\Omega/\partial\Phi|_{min} = 0$ . Rješavanjem tih jednadžbe za različite temperature možu se proučavati kiralni fazni prijelaz i fazni prijelaz oslobođenja. Pomoću njih se određuju pseudokritične temperature na kojoj dolazi do kiralnog prijelaza i prijelaza iz faze zatočenja u slobodnu fazu, tako da se odredi maksimum odgovarajućih parametra uređenja. Parametar uređenja za kiralni fazni prijelaz je funkcija mase  $m_f(T) = [m_f^0 + b_f(T)]/[1 + a_f(T)]$ , a za fazni prijelaz zatočenja je Polyakovljeva petlja  $\Phi(T)$ .

### III. REZULTATI I DISKUSIJA

Slobodni parametri u modelu se odrede tako da na  $T = 0$  reproduciraju poznate rezultate za mase, konstante raspada i širine prijelaza mezona u vakuumu. Onu su postavljeni na sljedeće vrijednosti:  $m_u^0 = m_d^0 = m_q^0 = 5.49$  MeV ( $m_q$  za bezmaseni kvark),  $m_s^0 = 115$  MeV,  $D_0\Lambda_0^2 = 219$ ,  $D_1\Lambda_0^4 = 69$ ,  $\Lambda_0 = 0.758$  GeV,  $\Lambda_1 = 0.961$  GeV i  $p_0 = 0.6$  GeV.

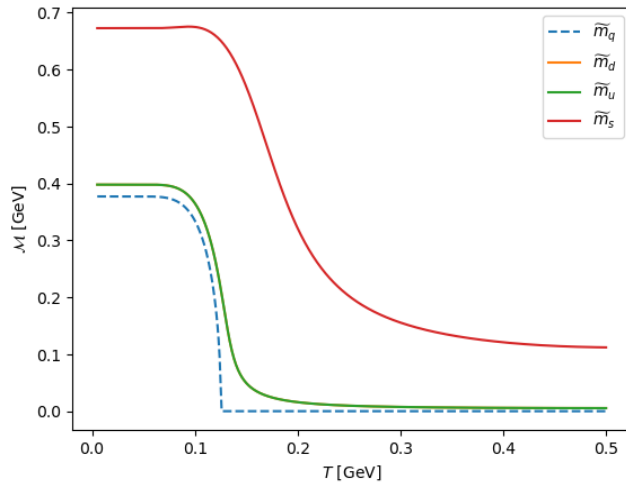
Promotrimo prvo mase kvarkova u vakuumu. Pomoću jednadžbi (16) i (17), koje se rješavaju numerički, se odrede vrijednosti amplituda  $A_q(p^2)$  i  $B_q(p^2)$ , te se izračuna masa prema jednadžbi  $\mathcal{M}_q(p^2) = B_q(p^2)/A_q(p^2)$ . Grafovi ovisnosti mase kvarka o impulsu za  $u$  i  $s$  kvark, te za hipotetski kvark koji ima strujnu masu  $\tilde{m}_q = 0$  prikazani su na slici 1. Sa slike se vidi da kvarkovi na visokim energijama imaju mase jednake njihovim strujnim masama, a na niskim energijama kvarkovi imaju veliku konstitutentnu masu koja uzrokuje slamanje kiralne simetrije. To vrijedi i za kvark strujne mase nula.

Na konačnim temperaturama rješavamo jednadžbe (19), (20) i (21). Jednadžbe su riješene numerički, te se pomoću njih odredila ovisnost mase kvarkova o temperaturi prema formuli  $\mathcal{M}_q(p_n^2, T) = B_q(p_n^2, T)/A_q(p_n^2, T)$ . Te ovisnosti su prikazane na slici 2. Za besmaseni kvark dobiven je oštri prijelaz, tj. fazni prijelaz drugog reda, dok za  $s$ ,  $d$  i  $u$  kvark imamo glatki prijelaz. Sa slike je vidljivo da postoji neka temperatura prijelaza ispod koje

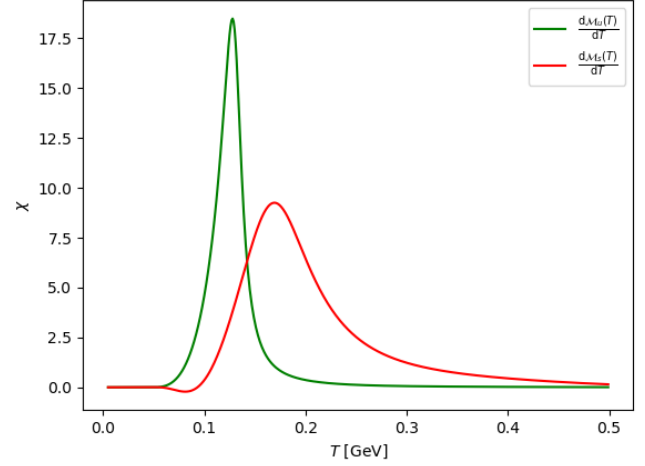


Slika 1. Ovisnost efektivnih masa  $\mathcal{M}$  kvarkova o impulsu. Crvena linija predstavlja efektivnu masu  $s$  kvarka, zelena efektivnu masu lakih kvarkova, a iscrtkana efektivnu masu bezmasenog kvarka.

kvarkovi poprimaju veliku efektivnu masu. Ta temperatura je različita za  $s$  i za  $u$ , odnosno  $d$  kvark. Točne vrijednosti za temperature prijelaza se mogu dobiti promatranjem generaliziranih susceptibilnosti, koje se definiraju kao derivacije parametra uređenja po temperaturi,  $\chi_q = d\mathcal{M}_q/dT$ . Ovisnosti susceptibilnosti o temperaturi prikazane su na slici 3. Iz maksimuma susceptibilnosti dobivene su temperature na kojima dolazi do kiralnog prijelaza. Za  $u$  kvark (jednako kao i za  $d$  kvark) temperatura prijelaza je  $T_\chi = 128$  MeV, a za  $s$  kvark  $T_\chi = 169$  MeV.

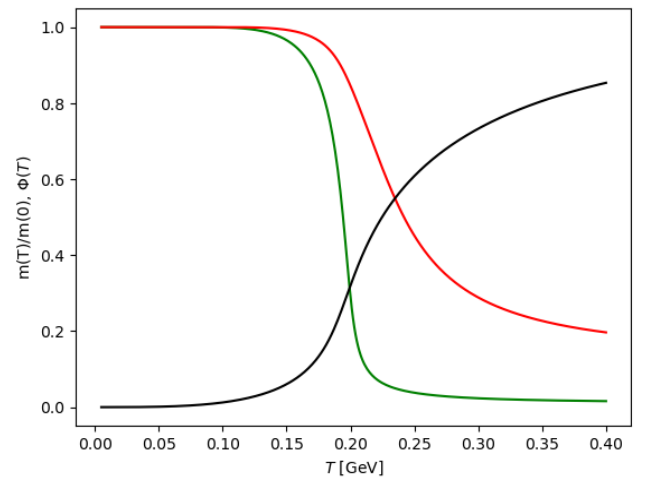


Slika 2. Ovisnosti efektivne mase kvarkova  $\mathcal{M}$  o temperaturi  $T$ . Crvena linija predstavlja efektivnu masu  $s$  kvarka, zelena efektivnu masu  $u$  kvarkova, koja se podudara s linijom za  $d$  kvark, a iscrtkana efektivnu masu bezmasenog kvarka.



Slika 3. Ovisnosti susceptibilnosti  $\chi$  o temperaturi  $T$ , za  $s$  i  $u$  kvark. Crvena linija predstavlja vrijednosti za  $s$  kvark, dok zelena za  $u$  kvark.

Sada promotrimo model u kojem je Polyakovljeva petlja uključena u termodinamički potencijal. Ponove se numerički riješe jednadžbe procjepa, no sada su one povezane preko parametra  $\phi_3$  s Polyakovljevom petljom, tj. dane su izrazima (45), (46), i (47). Na slici 4 prikazana je ovisnost parametra uređenja, (normirane) konstitutivne mase  $m(T)/m(0)$  za kiralni prijelaz i Polyakovljeve petlje  $\Phi(T)$  za prijelaz oslobodjenja, o temperaturi. Na niskim temperaturama Polyakovljeva petlja je jednaka nulu, što ukazuje na fazu zatočenja boje. Susceptibilnosti za kiralni fazni prijelaz i fazni prijelaz oslobodjenja dobiju se kao derivacije pripadnih parametara uređenja po temperaturi. Susceptibilnosti su prikazane na slici 5.

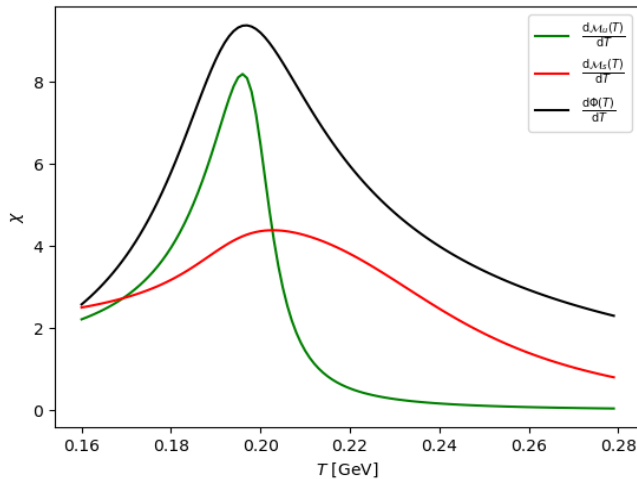


Slika 4. Ovisnosti parametara uređenja, mase  $m(T)/m(0)$  za kiralni fazni prijelaz i  $\Phi(T)$  (crna linija) za fazni prijelaz oslobodjenja, o temperaturi  $T$ . Crvena linija predstavlja tu ovisnost za  $s$  kvark, dok zelena za  $u$  kvark.

Sa slike 5 se vidi utjecaj Polyakovljeve petlje na pseudokritične temperature kiralnog prijelaza za lake kvarkove i za  $s$  kvark. Za temperature kiralnog prijelaza dobivene su vrijednosti  $T_\chi = 196$  MeV za  $u$  kvark (isto je i za  $d$  kvark) i  $T_\chi = 203$  MeV za  $s$  kvark, a za pseudokritičnu temperaturu faznog prijelaza oslobođenja dobiveno je  $T_d = 197$  MeV.

Uključivanjem Polyakovljeva petlja u potencijal temperature kiralnog prijelaza za lake kvarkove i za  $s$  kvark se značajno približe. Dobivena pseudokritična temperatura kiralnog prijelaza za lake kvarkove je skoro na jednakoj temperaturi kao i dobivena pseudokritična temperatura za fazni prijelaz oslobođenja, dok je dobiveno da je temperatura kiralnog prijelaza za  $s$  kvark nešto viša.

Iako nije dobivena željena sinkronizacija kiralnih temperatura prijelaza za lake kvarkove i  $s$  kvark, vidljivo je kakav utjecaj uključenje Polyakovljeve petlje ima na njih.



Slika 5. Ovisnosti susceptibilnosti  $\chi$  o temperaturi  $T$ , za kiralni prijelaz, za  $s$  (crvena linija) i  $u$  (zelena linija) kvark i za fazni prijelaz oslobođenja.

#### IV. ZAKLJUČAK

U ovom radu bavili smo se kiralnim faznim prijelazom i faznim prijelazom oslobođenja, koji pripadaju u neperturbativni režim QCD-a. Kao parametar uređenja za kiralni fazni prijelaz promatrana je masa kvarkova, a Polyakovljeva petlja je uzeta kao parametar uređenja za fazni prijelaz oslobođenja.

Rješavanjem rank 2 separabilnog Dyson-Schwingerovog modela na konačnoj temperaturi dobivene su jednadžbe procjepa za koeficijente  $a_f(T)$ ,  $b_f(T)$  i  $c_f(T)$ , pomoću kojih se proučavala ovisnost mase kvarka o temperaturi. Na nižim temperaturama kvarkovi imaju velike konstituentne mase. Na temperaturama višim od temperature na kojim se događa kiralni fazni prijelaz, kvarkovi poprimaju očekivane strujne mase. Dobiveno je da je temperatura na kojoj dolazi do kiralnog faznog prijelaza za lake kvarkove jednaka  $T_\chi = 128$  MeV, a za  $s$  kvark ona iznosi  $T_\chi = 169$  MeV.

Uvedena je Polyakovljeva petlja kao parametar uređenja za fazni prijelaz oslobođenja, te je pokazano kako je ona povezana s centralnom simetrijom. Uključenjem Polyakovljeve petlje u DS model dobiveno je da se temperature kiralnog faznog prijelaza za lake kvarkove i za  $s$  kvark značajno približe, no nije se uspjelo dobiti da se one podudaraju. Dobivene su sljedeće pseudokritične temperature za kiralni fazni prijelaz, za lake kvarkove  $T_\chi = 196$  MeV i za  $s$  kvark  $T_\chi = 203$  MeV. Iz ovisnosti Polyakovljeve petlje o temperaturi vidi se područje faze zatočenja i fazni prijelaz na kojem dolazi do oslobođenja kvarkova. Pomoću derivacije Polyakovljeve petlje po temperaturi određena je i pseudokritična temperatura za fazni prijelaz oslobođenja, te ona iznosi  $T_d = 197$  MeV.

[1] A. Höll, C.D. Roberts and S.V. Wright, nucl-th/0601071, arXiv:nucl-th/0601071  
[2] D. Horvatic, D. Blaschke, D. Klabucar and O. Kaczmarek, arXiv:1012.2113  
[3] D. Blaschke, D. Horvatic, D. Klabucar and A. E. Radzhabov, arXiv:hep-ph/0703188.  
[4] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995.

[5] Ana Juričić, *Parametri uređenja za kvarkovsku materiju s generaliziranim rubnim uvjetima*  
[6] Cambridge University Press; Mark Thomson (2013). *Modern Particle Physics*  
[7] Craig D., Roberts and Anthony G. Williams, arXiv:hep-ph/9403224  
[8] Kenji Fukushima and Tetsuo Hatsuda, arXiv:1005.4814