Razmatranje Hohenberg-Mermin-Wagnerovog argumenta o 2D magnetskim uređenjima

Grgur Palle
Fizički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Bijenička cesta 32, 10000 Zagreb
(Datum: 3. veljače 2020.)

Prezentiramo dokaz Hohenberg-Mermin-Wagnerovog teorema za jedno- i dvodimenzionalan Heisenbergov i XY model. Zatim analiziramo osjetljivost Hohenberg-Mermin-Wagnerovog argumenta na smetnje koje se linearno vežu za spinove sustava.

I. UVOD

U ovome članku razmatramo jedan od rijetkih rigoroznih rezultata teorije faznih prijelaza: Hohenberg-Mermin-Wagnerov teorem (HMW teorem) koji kaže da za kratkodosežni jedno- ili dvodimenzionalan Heisenbergov i XY model pri temperaturama većim od apsolutne nule ne dolazi do spontane magnetizacije u ravnini simetrije.[1] U HMW teoremu su ključne Bogoljubovljeva metoda ispitivanja nastupanja spontane magnetizacije i Bogoljubovljeva nejednakost kojom se izvode rigorozne ocjene magnetizacije. Budući da u HMW teoremu također bitnu ulogu igra točan oblik Hamiltonijana, prirodno je pitati se koliko je osjetljiv na smetnje. Tim pitanjem se bavimo pri kraju članka gdje prezentiramo vlastitu analizu učinka smetnji na HMW argument.

Prethodno Hohenberg-Mermin-Wagnerovom teoremu [1] postojali su razni argumenti koji su također sugerirali da u 2D sustavima ne dolazi do dugodosežnog uređenja, ali niti jedan on tih argumenata nije bio konkluzivan. Jedan od takvih argumenata je bila analiza spinskih valova u kojoj se nakon zbrajanja doprinosa svih spinskih valova fluktuaciji magnetizacije dobilo da fluktuacije u 2D divergiraju, što sugerira da fluktuacije razbijaju uređeno stanje [2, 3].[2]

Pierre Hohenberg je bio prvi koji se dosjetio kako koristiti Bogoljubovljevu nejednakost da bi dokazao nepostojanje dalekodosežnog uređenja u kontekstu 2D supratekućina i supravodiča [5, 6]. David Mermin i Herbert Wagner su potaknuti Hohenbergovim rezultatom ubrzo nakon osmislili kako primijeniti sličan argument na 2D magnetske sustave. Od tada je napisano iznimno puno članaka koji se temelje na Hohenbergovoj ideji (izvorni članci [7–11], revijalni [12–16]).

Članak započinjemo uvođenjem predznanja nužnog za dokaz HMW teorema. U odjeljku II uvodimo Bogoljubovljevu metodu kvaziprosjeka kojom se ispituje dolazi li do spontanog narušenja simetrije, dok u odjeljku III uvodimo Bogoljubovljevu nejednakost iz više perspektiva. Nakon što smo uveli potrebnu pozadinu, u odjeljku IV prezentiramo dokaz Hohenberg-Mermin-Wagnerovog teorema. Članak završavamo s analizom osjetljivosti HMW argumenta na smetnje, koja je prema saznanjima autora nova, i raspravom rezultata.

[1] HMW teorem ostavlja otvorenom mogućnost da dođe do faznih prijelaza drugih vrsta, primjerice u kojem korelacijska funkcija mijenja svoju ovisnost o udaljenosti s eksponencijalno u potencijski opadajuću.

[2] Ovaj argument se kasnije poopćio na spontano narušenje neprekidnih grupa simetrije u dvodimenzionalnim relativističkim kvantnim teorijama polja [4]. Tada Nambu-Goldstoneovi bozoni igraju ulogu spinskih valova.

SADRŽAJ

II. BOGOLJUBOVLJEVI KVAZIPROSJECI

Sustavi koje teorijski razmatramo često posjeduju egzaktne simetrije. Dvije bitne posljedice tih simetrija su pojava *očuvanih veličina* i pojava *degeneracije* stacionarnih stanja sustava koja je tim veća što je sama grupa simetrija veća. Za neprekidne simetrije očuvane veličine su aditivne po podsustavima u smislu da je ukupna očuvana veličina jednaka zbroju očuvanih veličina od svih podsustava (npr. količina gibanja), dok su za diskretne simetrije očuvane veličine multiplikativne, tj. ukupna očuvana veličina je jednaka umnošku očuvanih veličina podsustava (npr. paritet). Ako sada dođe do toga da osnovno stanje (ili pri temperaturama većim od nule ansambl stanja) više nije invarijantan na tu grupu simetrija sustava u cjelini kažemo da ja ta simetrija *spontano narušena ili slomljena*. Spontanost se ovdje referira na činjenicu da u sustavu nema međudjelovanja koje manifestno narušava danu simetriju.

Teško je precijeniti značaj te ideje spontanog loma simetrije koja prožima sva područja fizike, od statističke fizike i fizike kondenzirane tvari do fizike elementarnih čestica. U ovome članku ćemo se ograničiti na razmatranja spontanog narušenja simetrija u sklopu teorije faznih prijelaza. Lev D. Landau je u svojoj slavnoj teoriji fazne prijelaze objasnio kao posljedicu narušenja simetrija. Narušenje simetrija je on kvantificirao uvođenjem *parametra uređenja*. Ako nadalje termodinamički potencijal razvijemo u varijabli parametra uređenja blizu točke faznog prijelaza dobivamo fenomenološku teoriju faznih prijelaza. Ta Landauova teorija se može dalje poboljšati time što uzimamo u obzir prostorne fluktuacije parametra uređenja čime dobivamo Ginzburg-Landauovu teoriju. Međutim, osim fenomenološkog opisa faznih prijelaza mi bismo također htjeli razotkriti kako u mikroskopskoj teoriji dolazi do spontanog loma simetrije.

Ovdje u igru dolazi *metoda kvaziprosjeka* koju je Nikolaj N. Bogoljubov početkom šezdesetih godina prošloga stoljeća osmislio kako bi opisao spontani lom simetrija [17]. Njegov ključni uvid je taj da su prosjeci po ansamblu spontano narušenih veličina *u termodinamičkom limesu* iznimno osjetljivi na perturbacije Hamiltonijana koje eksplicitno narušavaju danu simetriju sustava. Odnosno, infinitezimalno mala perturbacija Hamiltonijana koja eksplicitno narušava simetriju sustava dovodi do *konačne* vrijednosti prosjeka spontano narušenih fizikalnih veličina. Ovdje je bitno primijetiti da se ova konačnost pojavljuje samo ako smo prvo uzeli termodinamički limes, a tek onda uveli perturbaciju u sustav. Ova činjenica je blisko povezana s tim da se spontani lom simetrija u kvantnoj mehanici može dogoditi samo ako imamo beskonačan broj stupnjeva slobode, odnosno kvantnu teoriju polja. U našim teorijskim modelima s konačnim brojem stupnjeva slobode to se reflektira u činjenici da oni nikada nemaju istinski fazni prijelaz u smislu da susceptibilnosti i korelacijske duljine koje bi trebale divergirati zapravo samo postižu iznimno velike vrijednosti za makroskopske sustave. Za određene magnetske modele je to nepostojanje divergencija rigorozno dokazano (Lee-Yangov teorem [18, 19]).

A. Matematički formalizam kvaziprosjeka

Promotrimo sustav čiji je Hilbertov prostor stanja $\mathcal{H}$ i čija je dinamika opisana Hamiltonijanom H. Osim toga neka nam je dana grupa transformacija G i njena unitarna reprezentacija $\chi\colon G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$, $g \mapsto \chi_g$. Onda zbog Maschkeovog teorema znamo da Hilbertov prostor možemo podijeliti na direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija, $\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha \mathcal{H}^{(\alpha)}$. Nadalje neka s $\alpha, \beta, \ldots$ imenujemo te pojedine ireducibilne reprezentacije $\chi^{(\alpha)}\colon G \to \mathrm{U}(\mathcal{H}^{(\alpha)})$, $\chi^{(\beta)}\colon G \to \mathrm{U}(\mathcal{H}^{(\beta)})$, itd. Iz definicije znamo da unutar jedne ireducibilne reprezentacije možemo sva stanja $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}^{(\alpha)}$ povezati djelovanjem nekog člana grupe:

$$\exists g \in G\colon \quad \chi_g^{(\alpha)} |\phi\rangle = |\psi\rangle \ .$$

Za sustav kažemo da je simetričan naspram grupe transformacije G ako i samo ako je Hamiltonijan sustava H invarijantan naspram djelovanja grupe:

$$\forall g \in G\colon \quad \chi_g^{-1} H \chi_g = H \iff [H, \chi_g] = 0\,. \tag{1}$$

Iz ovoga slijedi da sva stanja iz dane ireducibilne reprezentacije imaju istu energiju E_α. Do degeneracije dolazi ako neke od ireducibilnih reprezentacija imaju dimenziju veću od jedan.

Sljedeći nam je korak uvesti parametar uređenja koji opisuje tu grupu simetrija G. Kao parametar uređenja uzimamo n-torku $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ koja se sastoji od očekivanih vrijednost n-torke Hermitskih operatora $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$: $\lambda_i := \langle \Lambda_i \rangle$. Tu očekivanu vrijednost općenito uzimamo po nekakvom ansamblu koji se opisuje pomoću operatora gustoće ρ, $\langle A \rangle = \mathrm{tr}(\rho A)$. Prirodno je očekivati da se prilikom transformacije sustava $\rho \mapsto \rho' = \chi_g \rho \chi_g^{-1}$ taj parametar uređenja također transformira na kovarijantan način. U tu svrhu uvodimo novu (matričnu) reprezentaciju $M\colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto M(g)$. Iz zahtjeva kovarijantnosti parametara uređenja:

$$\lambda'_i = \sum_j \lambda_j M_{ji}(g)\,, \tag{2}$$

dobivamo uvjete kovarijantnosti operatora uređenja:

$$\chi_g \Lambda_i \chi_g^{-1} = \sum_j \Lambda_j M_{ji}(g)\,. \tag{3}$$

Za sustav kažemo da se nalazi u stanju koje je čuva simetriju opisanu grupom G ako i samo ako je operator gustoće sustava ρ invarijantan naspram djelovanja grupe:

$$\forall g \in G\colon \quad \chi_g^{-1} \rho \chi_g = \rho \iff [\rho, \chi_g] = 0\,. \tag{4}$$

Iz pravila transformacije parametra uređenja (2) slijedi da je za simetrična stanja $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ jer je jedino nulvektor netrivijalnih reprezentacija invarijantan na sva djelovanja grupe G.

Sad smo došli do problema u opisu spontanog narušenja simetrije. Naime, u statističkoj fizici mi obično promatramo ansamble u kojima vjerojatnost zauzimanja stanja ovisi isključivo energiji, odnosno operator gustoće ima oblik $\rho = f(H)$. Međutim, kako znamo da za sve g vrijedi $[H, \chi_g] = 0 \implies [\rho, \chi_g] = 0$, tj. svi ti ansambli su također invarijantni naspram djelovanja grupe. Stoga u svim našim ansamblima parametar uređenja uvijek iščezava.

Bogoljubovljeva ideja je bila ispitati koliko je taj prosjek po ansamblu osjetljiv na perturbaciju Hamiltonijana $H \mapsto H + H'_\nu$ takvu da H'_ν eksplicitno naruši simetriju, odnosno $[H'_\nu, \chi_g] \neq 0$ za barem neke g. Parametar ν opisuje jakost perturbacije te je $\lim_{\nu\to 0} H'_\nu = 0$. U tu svrhu uvodimo $\rho_\nu = f(H + H'_\nu)$, $\langle A\rangle_\nu = \mathrm{tr}(\rho_\nu A)$ i *Bogoljubovljev kvaziprosjek*:

$$\langle\!\langle A\rangle\!\rangle := \lim_{\nu\to 0} \langle A\rangle_\nu \,. \tag{5}$$

Taj Bogoljubovljev kvaziprosjek može biti različit od nule čak i kad je prosjek (bez perturbacije) nula. Ta razlika između prosjeka i kvaziprosjeka nam onda govori hoće li doći do spontanog narušenja simetrije. Naime, ako smo odredili da su kvaziprosjeci $\langle\!\langle \lambda_i\rangle\!\rangle \neq 0$ za barem neke i onda zasigurno znamo da je simetrija sustava slomljena. Treba napomenuti da uzimanje termodinamičkog limesa i limesa $\nu \to 0$ u (5) ne komutira te kako bi nam kvaziprosjek bilo što rekao o spontanom lomu simetrije moramo prvo uzeti termodinamički limes, a tek onda limes $\nu \to 0$.

III. BOGOLJUBOVLJEVA NEJEDNAKOST

Bogoljubovljeva nejednakost je jedna opća nejednakost koja povezuje termalne prosjeke višečestičnih operatora. U ovome odjeljku članka ju dokazujemo iz više perspektiva, dok ju u sljedećem odjeljku članka koristimo kako bi ocijenili kvaziprosjek magnetizacije i time dokazali Hohenberg-Mermin-Wagnerovom teoremu.

Bogoljubovljeva nejednakost vrijedi i za kanonski i za velekanonski ansambl, stoga ćemo umjesto Hamiltonijana H u sljedećem radi općenitosti koristiti operator:

$$K := \begin{cases} H, & \text{za kanonski ansambl,} \\ H - \mu N, & \text{za velekanonski ansambl.} \end{cases} \tag{6}$$

Ovdje je μ kemijski potencijal velekanonskog ansambla, a N operator broja čestica u sustavu. Particijska funkcija danog ansambla je onda naravno:

$$Z := \mathrm{tr}\big(\mathrm{e}^{-\beta K}\big)\,, \tag{7}$$

gdje je $\beta = 1/k_B T$ termodinamička beta ansambla. Prosjek po ansamblu od nekog proizvoljnog višečestičnog operatora A je onda:

$$\langle A\rangle := \frac{1}{Z}\,\mathrm{tr}\big(\mathrm{e}^{-\beta K} A\big)\,, \tag{8}$$

gdje se trag uzima po svim višečestičnim stanjima fiksnog broja čestica (Hilbertov prostor) za kanonski ansambl ili po svim višečestičnim stanjima proizvoljnog broja čestica (Fockov prostor) za velekanonski ansambl. Sada smo u stanju izraziti Bogoljubovljevu nejednakost.

Lema (Bogoljubov)**.** *Neka su A i C proizvoljni višečestični operatori. Onda pri temperaturama većim od apsolutne nule vrijedi:*

$$|\langle [C, A]\rangle|^2 \leq \tfrac{1}{2}\beta\, \big\langle \{A, A^\dagger\}\big\rangle\, \big\langle \big[[C, K], C^\dagger\big]\big\rangle\,. \tag{9}$$

Bogoljubovljeva nejednakost se može dokazati na više načina. U ovom odjeljku prezentiramo četiri različita pristupa dokazivanju Bogoljubovljeve nejednakosti. Sva četiri pristupa se temelje na prikladnom korištenju Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti za novouveden skalarni umnožak nad prostorom operatora.

A. Bogoljubovljev skalarni produkt

U literaturi postoji više definicija Bogoljuvbovljevog skalarnog produkta koje se međusobno razlikuju do na konstantu i za jedan član koji iščezava prilikom izvoda same Bogoljubovljeve nejednakosti. Mi ćemo koristiti najelegantniju varijantu koja za dva proizvoljna višečestična operatora A i B glasi:

$$\langle A|B\rangle := \frac{1}{Z}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \mathrm{tr}\Big(\mathrm{e}^{-(1-\tau)\beta K} A^\dagger \mathrm{e}^{-\tau\beta K} B\Big)\,. \tag{10}$$

Ovaj skalarni produkt se može interpretirati kao poopćenje korelacijske funkcije operatora $A^\dagger$ i B s običnog prosjeka $\big\langle A^\dagger B\big\rangle$ na prosjek koji još dodatno usrednjava po svim mogućim razlikama u imaginarnome vremenu.[3] Ako sada raspišemo ovaj trag te još umetnemo rezoluciju identiteta $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$, onda možemo dobiti eksplicitni izraz Bogoljubovljevog skalarnog umnoška u bazi:

$$\langle A|B\rangle = \sum_{n,m} \big\langle n\big|A^\dagger\big|m\big\rangle\, \langle m|B|n\rangle\, w_{nm}\,, \tag{11}$$

gdje su $|n\rangle$ i $|m\rangle$ mnogočestična stanja koja su vlastita stanja operatora K, tj. $K\,|n\rangle = K_n\,|n\rangle$), te je težinski faktor po definiciji:

$$w_{nm} := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\beta K_n}}{Z}, & \text{za } K_n = K_m, \\[2ex] \dfrac{1}{Z}\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta K_n} - \mathrm{e}^{-\beta K_m}}{\beta(K_m - K_n)}, & \text{za } K_n \neq K_m. \end{cases} \tag{12}$$

Lako se uoči da je ovaj težinski faktor simetričan, $w_{mn} = w_{nm}$, te pozitivan, $w_{nm} > 0$. Često ćemo koristiti pokratu:

$$w_n := w_{nn} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta K_n}}{Z}\,, \tag{13}$$

[3] Ovaj skalarni umnožak bi se također mogao izraziti preko putnih integrala po imaginarnom vremenu, ali nama to neće koristiti pa ćemo se zadržati na operatorskom formalizmu.

putem koje termalni prosjek višečestičnog operatora (8) postaje:

$$\langle A\rangle = \sum_n \langle n|A|n\rangle\, w_n\,. \tag{14}$$

Iz definicije Bogoljubovljevog skalarnog umnoška (10) se jasno vidi da on zadovoljava sva tri aksioma potrebna da bi bio matematički ispravan skalarni produkt:

- Konjugirano je simetričan:

$$\overline{\langle A|B\rangle} = \langle B|A\rangle\ .$$

  Ovo se lako vidi iz izraza (11), simetričnosti težinskih faktora w_{nm} i činjenice da je $\overline{\langle n|A|m\rangle} = \left\langle m\middle|A^\dagger\middle|n\right\rangle$. Alternativno koristimo definiciju (10) i cikličnost traga.

- Antilinearan je u prvo argumentu i linearan drugom argumentu:

$$\langle \lambda A + \mu B|C\rangle = \overline{\lambda}\,\langle A|C\rangle + \overline{\mu}\,\langle B|C\rangle\ ,$$
$$\langle A|\lambda B + \mu C\rangle = \lambda\,\langle A|B\rangle + \mu\,\langle A|C\rangle\ .$$

  Ovo očito slijedi iz linearnosti traga u definiciji (10).

- Pozitivno je definitan:

$$\langle A|A\rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \langle A|A\rangle = 0 \iff A = 0\,.$$

  Za dokaz ovoga je najzgodnije koristiti jednadžbu (11) koja se u ovom slučaju svodi na:

$$\langle A|A\rangle = \sum_{n,m} |\langle m|A|n\rangle|^2\, w_{nm}\,.$$

  Kako je $w_{nm} > 0$, iz prethodnog izraza se jasno vidi da je norma uvijek nenegativna kao i to da je $\langle A|A\rangle = 0$ ako i samo ako za sve n, m vrijedi $\langle m|A|n\rangle = 0$ odnosno $A = 0$.

Alternativne definicije se razlikuju utoliko što za definiciju skalarnog umnoška uzimaju raspis po mnogočestičnim stanjima (11) te u njemu ne zbrajaju po stanjima s $K_n = K_m$. Zbog toga u izrazu za $\langle A|A\rangle$ suma prestaje ići po svim matričnim elementima pa skalarni umnožak prestaje biti definitan. Odnosno, skalarni umnožak prelazi iz pozitivno-definitnog u pozitivno-semidefinitan. Neki još cijeli izraz množe s β. U dvjema relacijama koje su ključne za Bogoljubovljevu nejednakost ti $K_n = K_m$ članovi otpadaju neovisno pa ova razlika nije previše bitna.

Još neki zgodni izrazi koji se lako pokažu su:

$$\langle \mathbb{1}|\mathbb{1}\rangle = 1\,, \quad \langle \mathbb{1}|A\rangle = \langle A\rangle\ , \quad \langle A|\mathbb{1}\rangle = \langle A^\dagger\rangle\,,$$
$$\langle A|KB\rangle = \langle KA|B\rangle\ , \quad \langle A|BK\rangle = \langle AK|B\rangle\ .$$

B. Dokaz Bogoljubovljeve nejednakosti

Ideja dokaza je da se na prethodno definiran Bogoljubovljev skalarni umnožak primjeni Cauchy-Bunjakovski-Schwarzova nejednakost:

$$|\langle A|B\rangle|^2 \leq \langle A|A\rangle\,\langle B|B\rangle\ . \tag{15}$$

Kako bismo se riješili pojavljivanja skalarnih umnožaka u korist termalnih prosjeka trebat će nam dvije tvrdnje:

- Prva je jednadžba:

$$\beta\,\langle A|[K,B]\rangle = \left\langle [A^\dagger, B]\right\rangle\ . \tag{16}$$

  Ona slijedi iz izraza:

$$\langle m|[K,B]|n\rangle = (K_m - K_n)\,\langle m|B|n\rangle\ ,$$
$$\beta(K_m - K_n) w_{nm} = w_n - w_m\,,$$

  temeljem kojih raspisivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}\beta\,\langle A|[K,B]\rangle &= \sum_{n,m} \left\langle n\middle|A^\dagger\middle|m\right\rangle \langle m|B|n\rangle\,(w_n - w_m)\\ &= \sum_n \left\langle n\middle|A^\dagger B\middle|n\right\rangle w_n - \sum_m \left\langle m\middle|BA^\dagger\middle|m\right\rangle w_m\\ &= \left\langle A^\dagger B - BA^\dagger\right\rangle = \left\langle [A^\dagger, B]\right\rangle\ .\end{aligned}$$

- Druga je nejednakost:

$$\langle A|A\rangle \leq \tfrac{1}{2}\left\langle \{A, A^\dagger\}\right\rangle\ . \tag{17}$$

  U njenom je dokazu ključna nejednakost:

$$w_{nm} \leq \tfrac{1}{2}(w_n + w_m)\,,$$

  koja je očito istinita za $K_n = K_m$, dok se za općeniti slučaj raspisivanjem dokaže:

$$\begin{aligned}w_{nm} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\beta(K_m - K_n)}(\mathrm{e}^{-\beta K_n} - \mathrm{e}^{-\beta K_m})\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\beta K_n} + \mathrm{e}^{-\beta K_m}}{2}\cdot\frac{2}{\beta(K_m - K_n)}\,\frac{\mathrm{e}^{-\beta K_n} - \mathrm{e}^{-\beta K_m}}{\mathrm{e}^{-\beta K_n} + \mathrm{e}^{-\beta K_m}}\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\beta K_n} + \mathrm{e}^{-\beta K_m}\right)\cdot\frac{\tanh(\beta(K_m - K_n)/2)}{\beta(K_m - K_n)/2}\\ &= \tfrac{1}{2}(w_n + w_m)\cdot\frac{\tanh x}{x} \leq \tfrac{1}{2}(w_n + w_m)\,,\end{aligned}$$

  jer je $\tanh(x)/x \leq 1$ za sve x pa tako i za $x = \beta(K_m - K_n)/2$. Nakon uvrštavanja u raspis (11) dobivamo traženu tvrdnju:

$$\begin{aligned}\langle A|A\rangle &\leq \sum_{n,m} \left\langle n\middle|A^\dagger\middle|m\right\rangle \langle m|A|n\rangle\,\tfrac{1}{2}(w_n + w_m)\\ &= \tfrac{1}{2}\sum_n \left\langle n\middle|A^\dagger A\middle|n\right\rangle w_n + \tfrac{1}{2}\sum_m \left\langle m\middle|AA^\dagger\middle|m\right\rangle w_m\\ &= \tfrac{1}{2}\left\langle A^\dagger A + AA^\dagger\right\rangle = \tfrac{1}{2}\left\langle \{A, A^\dagger\}\right\rangle\ .\end{aligned}$$

Uz ove dvije tvrdnje Bogoljubovljeva nejednakost trivijalno slijedi iz Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti (15) uz supstituciju $B = [K, C^\dagger]$. Po redu za svaki pojedini član iz Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti (15) imamo:

$$\begin{aligned}
\beta \langle A|B\rangle &= \beta \left\langle A\middle|[K, C^\dagger]\right\rangle \\
&= \left\langle [A^\dagger, C^\dagger]\right\rangle = \overline{\langle [C, A]\rangle}\,, \\
\langle A|A\rangle &\leq \tfrac{1}{2} \left\langle \{A, A^\dagger\}\right\rangle\,, \\
\beta \langle B|B\rangle &= \beta \left\langle B\middle|[K, C^\dagger]\right\rangle \\
&= \left\langle [B^\dagger, C^\dagger]\right\rangle = \left\langle \big[[C, K], C^\dagger\big]\right\rangle\,.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (15) i sređivanjem dobivamo Bogoljubovljevu nejednakost:

$$|\langle [C, A]\rangle|^2 \leq \tfrac{1}{2}\beta \,\left\langle \{A, A^\dagger\}\right\rangle \left\langle \big[[C, K], C^\dagger\big]\right\rangle\,.$$

C. Dokaz Bogoljubovljeve nejednakosti u Heisenbergovoj slici

Za još jedan način dokazivanja Bogoljubovljeve nejednakosti prelazimo u Heisenbergovu sliku u imaginarnom vremenu:

$$A_\tau := \mathrm{e}^{\tau\beta K} A \mathrm{e}^{-\tau\beta K}\,. \tag{18}$$

za koju vrijedi:

$$\begin{aligned}
(A^\dagger)_\tau &= (A_{-\tau})^\dagger\,, \\
\partial_\tau A_\tau &= \beta [K, A_\tau]\,, \\
\langle A_\tau B\rangle &= \langle A B_{-\tau}\rangle\,.
\end{aligned}$$

Definiciju Bogoljubovljevog skalarnog umnoška (10) možemo prebaciti u Heisenbergovu sliku:

$$\langle A|B\rangle := \int_0^1 \mathrm{d}\tau \left\langle (A^\dagger)_\tau B\right\rangle\,. \tag{19}$$

Raspisivanjem se u Heisenbergovoj slici može izravno iz ove definicije izvesti tražene tvrdnje (16) i (17) nakon čega je dokaz Bogoljubovljeve nejednakosti identičan prethodnom.

- Za dokaz prve tvrdnje (16) krećemo od činjenice da je:

$$\partial_\tau \left\langle (A^\dagger)_\tau B\right\rangle = \beta \left\langle [K, (A^\dagger)_\tau] B\right\rangle = \beta \left\langle (A^\dagger)_\tau [B, K]\right\rangle\,,$$

  pa stoga vrijedi:

$$\begin{aligned}
\beta \langle A|[B, K]\rangle &= \int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \partial_\tau \left\langle (A^\dagger)_\tau B\right\rangle \\
&= \left\langle (A^\dagger)_1 B\right\rangle - \left\langle (A^\dagger)_0 B\right\rangle = \left\langle [B, A^\dagger]\right\rangle\,.
\end{aligned}$$

- Za dokaz druge tvrdnje (17) računamo drugu derivaciju:

$$\begin{aligned}
\partial_\tau^2 \left\langle (A^\dagger)_\tau A\right\rangle &= \beta\, \partial_\tau \left\langle (A^\dagger)_\tau [A, K]\right\rangle \\
&= \beta^2 \left\langle [K, (A^\dagger)_\tau][A, K]\right\rangle \\
&= \beta^2 \left\langle ([A, K]_\tau)^\dagger [A, K]\right\rangle \\
&= \beta^2 \left\langle (Q_{-\tau/2})^\dagger Q_{-\tau/2}\right\rangle \geq 0\,,
\end{aligned}$$

  gdje je $Q := [A, K]$.[4] Stoga je $\left\langle (A^\dagger)_\tau A\right\rangle$ konveksna funkcija u τ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
\langle A|A\rangle &= \int_0^1 \mathrm{d}\tau \left\langle (A^\dagger)_\tau A\right\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\left\langle (A^\dagger)_1 A\right\rangle + \left\langle (A^\dagger)_0 A\right\rangle \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \left\langle A A^\dagger + A^\dagger A\right\rangle = \tfrac{1}{2} \left\langle \{A, A^\dagger\}\right\rangle\,.
\end{aligned}$$

D. Izravan dokaz Bogoljubovljeve nejednakosti

Za ponešto izravniji dokaz Bogoljubovljevu nejednakost raspisujemo ju u bazi vlastitih stanja operatora K:

$$\begin{aligned}
|S_1|^2 &\leq S_2 \cdot S_3\,, \\
S_1 &= \sum_{n,m} (w_n - w_m) \overline{\langle n|C^\dagger|m\rangle} \langle n|A|m\rangle\,, \\
S_2 &= \sum_{n,m} \frac{w_n + w_m}{2} |\langle n|A|m\rangle|^2\,, \\
S_3 &= \sum_{n,m} (w_n - w_m)\beta(K_m - K_n) \left|\left\langle n\middle|C^\dagger\middle|m\right\rangle\right|^2\,.
\end{aligned}$$

Umjesto Bogoljubovljevog skalarnom umnoška uvodimo alternativan skalarni umnožak:

$$\begin{aligned}
\langle x|y\rangle' &:= \sum_{n,m} W_{nm} \overline{x}_{nm} y_{nm}\,, \\
W_{nm} &:= (w_n - w_m)\beta(K_m - K_n) > 0\,.
\end{aligned}$$

Pomoću ovog alternativnog skalarnog umnoška Bogoljubovljeva nejednakost se dobiva kao izravna primjena Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti:

$$\left|\langle x|y\rangle'\right|^2 \leq \langle x|x\rangle' \langle y|y\rangle'\,,$$

uz odabir vektora:

$$x_{nm} = \left\langle n\middle|C^\dagger\middle|m\right\rangle\,, \qquad y_{nm} = \frac{\langle n|A|m\rangle}{\beta(K_m - K_n)}\,,$$

te uporabom nejednakosti:

$$W_{nm} \leq \tfrac{1}{2}\,(w_n + w_m)\,\beta^2 (K_m - K_n)^2\,,$$

---

[4] Prosjeci oblika $\left\langle A^\dagger A\right\rangle$ su uvijek nenegativni jer u bazi vlastitih stanja operatora K iznose $\left\langle A^\dagger A\right\rangle = \sum_n |\langle n|A|n\rangle|^2 w_n$ što je očito nenegativno.

koja je ekvivalentna s prethodno uporabljenom nejednakosti:

$$\frac{\tanh(\beta(K_m - K_n)/2)}{\beta(K_m - K_n)/2} \leq 1\,.$$

E. Alternativan izričaj Bogoljubovljeve nejednakosti

Bogoljubov, ali i Hohenberg koji ga je pratio, su originalno Bogoljubovljev skalarni umnožak definirali preko statičke funkcije odgovora. U ovome dijelu povezujemo taj originalni pristup s onim koji smo mi uveli preko definicije (10).

Promotrimo korelacijsku funkciju dvaju operatora A i B u vremenskoj i frekventnoj domeni:

$$C_{AB}(t-t') := \Omega^{-1}\left\langle A_H(t) B_H(t')\right\rangle\,, \tag{20}$$

$$C_{AB}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} C_{AB}(t)\,. \tag{21}$$

Pretpostavljamo da je Hamiltonijan vremenski neovisan i da operatori A i B nemaju eksplicitnu ovisnost o vremenu. Onda su ti operatori u Heisenbergovoj slici:

$$A_H(t) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right) A \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right),$$
$$B_H(t) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right) B \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right).$$

Ako sad ovo uvrstimo u definiciju korelacijske funkcije (20) i (51), razvijemo termalni prosjek u bazi stacionarnih stanja, $H\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle$, i raspišemo, dobivamo eksplicitne izraze za korelacijsku funkciju u bazi:

$$C_{AB}(t-t') = \Omega^{-1}\sum_{n,m}\left\langle n|A|m\right\rangle\left\langle m|B|n\right\rangle w_n \cdot \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_n - E_m)(t-t')\right), \tag{22}$$

$$C_{AB}(\omega) = \Omega^{-1}\sum_{n,m}\left\langle n|A|m\right\rangle\left\langle m|B|n\right\rangle w_n \cdot 2\pi\,\delta\left(\omega - \frac{E_m - E_n}{\hbar}\right), \tag{23}$$

gdje je $\delta(x)$ Diracova delta distribucija. Iz ovog izraza se lako izvede poznat rezultat o kvantnim korelacijskim funkcijama:

$$C_{AB}(-\omega) = \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega} C_{BA}(\omega)\,.$$

Osim toga, lako se pokaže da za korelacijsku funkciju vrijedi:

$$\overline{C_{AB}(\omega)} = C_{B^\dagger A^\dagger}(\omega)\,,$$
$$C_{A^\dagger A}(\omega) = \Omega^{-1}\sum_{n,m}\left|\left\langle m|A|n\right\rangle\right|^2 w_n \cdot 2\pi\,\delta\left(\omega - \frac{E_m - E_n}{\hbar}\right) \geq 0\,.$$

Kao sljedeći korak uvodimo spektralnu gustoću:

$$\tau_{AB}(t-t') := \Omega^{-1}\left\langle [A(t), B(t')]\right\rangle\,, \tag{24}$$

$$\tau_{AB}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tau_{AB}(t)\,. \tag{25}$$

Za nju vrijedi:

$$\overline{\tau_{AB}(\omega)} = \tau_{B^\dagger A^\dagger}(\omega)\,,$$
$$\tau_{AB}(-\omega) = -\tau_{BA}(\omega)\,,$$

te je ona s korelacijskim funkcijama povezana putem:

$$\begin{aligned}\tau_{AB}(t-t') &= C_{AB}(t-t') - C_{BA}(t'-t)\,,\\ \tau_{AB}(\omega) &= C_{AB}(\omega) - C_{BA}(-\omega)\\ &= (1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})C_{AB}(\omega)\\ &= (\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1)C_{BA}(\omega)\,.\end{aligned}$$

Uvodimo još dinamičku i statičku funkciju odgovora:

$$\chi_{AB}(z) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\tau_{AB}(\omega)}{\omega - z}\,, \tag{26}$$

$$\chi^S_{AB} := \lim_{\eta\to 0}\chi_{AB}(\mathrm{i}\eta) = \mathcal{P}.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\tau_{AB}(\omega)}{\omega}\,. \tag{27}$$

Statička funkcija odgovora se također može izraziti preko korelacijske funkcije:

$$\chi^S_{AB} = \mathcal{P}.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{\omega}C_{AB}(\omega)\,. \tag{28}$$

Raspisivanjem se sada mogu dokazati sljedeće tvrdnje o statičkoj funkciji odgovora:

- Simetrična je:

  $$\chi^S_{AB} = \chi^S_{BA}\,.$$

  Za dokaz se jednostavno reparametrizira integral iz definicije statičke funkcije odgovora (27) kao $\omega \to -\omega$ te iskoristi $\tau_{AB}(-\omega) = -\tau_{BA}(\omega)$.

- Pri konjugaciji se ponaša kao:

  $$\overline{\chi^S_{AB}} = \chi^S_{B^\dagger A^\dagger}\,.$$

  Ovo je izravna posljedica identiteta $\overline{\tau_{AB}(\omega)} = \tau_{B^\dagger A^\dagger}(\omega)$.

- Linearna je u oba operatora:

  $$\chi^S_{A(\lambda B+\mu C)} = \lambda\chi^S_{AB} + \mu\chi^S_{AC}\,,$$
  $$\chi^S_{(\lambda A+\mu B)C} = \lambda\chi^S_{AC} + \mu\chi^S_{BC}\,.$$

  Ovo je posljedica linearnosti uzimanja prosjeka u (24), Fourierovog transformata u (25) i integriranja u (27).

- Pozitivno je definitna:
$$\chi^S_{A^\dagger A} \geq 0 \quad \wedge \quad \chi^S_{A^\dagger A} = 0 \iff A = 0\,.$$
Ovo slijedi iz izraza (28) koji u ovome slučaju glasi:
$$\chi^S_{A^\dagger A} = \mathcal{P}.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{\omega} C_{A^\dagger A}(\omega)\,.$$
Nenegativnost samo-korelacijske funkcije $C_{A^\dagger A}(\omega)$ i pozitivnost podintegralne funkcije $(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})/\omega > 0$ povlače pozitivnu definitnost.

U vidu ovih triju svojstava statičke funkcije odgovora, prirodno je uvesti skalarni umnožak:
$$\langle A|B\rangle := \chi^S_{A^\dagger B}\,. \tag{29}$$
Eksplicitnim razvojem u bazi vlastitih stanja Hamiltonijana pomoću izraza (23) i (28) dobivamo:
$$\chi^S_{AB} = \beta\hbar\Omega^{-1}\sum_{n,m}\langle n|A|m\rangle\,\langle m|B|n\rangle\, w_{nm}\,,$$
što se uz odabir $\Omega = \beta\hbar$ očito slaže s prethodnom definicijom Bogoljubovljevog skalarnog umnoška (10).

U ovom se izričaju druga tvrdnja (17) može izravno dokazati iz alternativne definicije (29) koristeći nejednakost:
$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{\beta\hbar\omega} \leq \frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{2}\,,$$
pomoću koje dobivamo:
$$\begin{aligned}\langle A|A\rangle &\leq \mathcal{P}.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{2}C_{A^\dagger A}(\omega)\cdot\Omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{C_{A^\dagger A}(\omega)+C_{AA^\dagger}(-\omega)}{2}\cdot\Omega \\ &= \tfrac{1}{2}\left\langle A^\dagger A + AA^\dagger\right\rangle = \tfrac{1}{2}\left\langle\{A^\dagger, A\}\right\rangle\,.\end{aligned}$$

IV. HOHENBERG-MERMIN-WAGNEROV TEOREM

U ovome dijelu primjenjujemo Bogoljubovljevu metodu kvaziprosjeka i Bogoljubovljevu nejednakost kako bi dokazali da za jedno- ili dvodimenzionalan Heisenbergov i XY model s kratkodosežnim međudjelovanjem pri temperaturama većim od apsolutne nule ne dolazi do spontanog loma rotacijske simetrije, a time ni do nastanka dugodosežne uređene faze. Taj rezultat se zove *Hohenberg-Mermin-Wagnerov teorem* (HMW teorem).

A. Dokaz Hohenberg-Mermin-Wagnerovog teorema

Heisenbergov i XY model opisuju sustav koji se sastoji on rešetke (bezdimenzionalnih) spinova $\boldsymbol{S}_i$ koji u parovima međudjeluju putem $-J_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j$ interakcije. S indeksima i, j, n, m ćemo označavati položaje na rešetci. Kako bi izotropan Heisenbergov model i XY model tretirali odjednom promatramo anizotropan Heisenbergov model čiji je Hamiltonijan:
$$H = -\sum_{ij} J_{ij}(S^x_i S^x_j + S^y_i S^y_j) - \sum_{ij} J^z_{ij} S^z_i S^z_j\,. \tag{30}$$
Za izotropan Heisenbergov model je $J^z_{ij} = J_{ij}$, dok je za XY model $J^z_{ij} = 0$. Osim toga slobodni smo odabrati takve J_{ij} da vrijedi $J_{ij} = J_{ji} \in \mathbb{R}$. Lako se pokaže da je ovaj model invarijantan na rotacije oko z osi, odnosno $[H, \sum_i S^z_i] = 0$, i da ima grupu simetrija U(1). U izotropnom slučaju je ovaj model invarijantan na SU(2) grupu svih rotacija 3D prostora. Operator uređenja sustava je magnetizacija:
$$\boldsymbol{M} := \frac{1}{V}\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{S}_i\,, \tag{31}$$
kojoj smo nadodali fazu $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i}$ kako bi mogli obuhvatiti feromagnetska i antiferomagnetska uređenja odjednom. V je naravno volumen, a $N = \sum_i 1$ je broj spinova na rešetci. Parametar uređenja je jednostavno prosjek po ansamblu operatora uređenja koji u vidu rotacijske simetrije uvijek iščezava, tj. $\langle M_x\rangle = \langle M_y\rangle = 0$, barem utolike što još nismo ispitali potencijalan lom U(1) simetrije.[5]

Kako bi ispitali narušenje simetrije po Bogoljubovljevoj proceduri uvodimo perturbaciju koja eksplicitno narušava U(1) simetriju rotacije oko z osi (smjer $\hat{\boldsymbol{e}}$ magnetskog polja $\boldsymbol{B} = b\,\hat{\boldsymbol{e}}$ se nalazi u xy ravnini):
$$H'_b = -V\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{M}\,, \tag{32}$$
te ispitujemo iščezavaju li kvaziprosjeci operatora uređenja:
$$\langle\!\langle \boldsymbol{M}\rangle\!\rangle_{\hat{\boldsymbol{e}}} = \lim_{b\to 0}\langle\boldsymbol{M}\rangle_b = \lim_{b\to 0}\frac{\mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta(H+H'_b)}\boldsymbol{M}\right)}{\mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta(H+H'_b)}\right)}\,. \tag{33}$$
Ovdje smo uveli notaciju $\langle\cdots\rangle_b$ koja označava uzimanje prosjeka po kanonskome ansamblu s Hamiltonijanom $H + H'_b$; prosjek $\langle\cdots\rangle$ bez subskript ćemo zadržati za slučaj Hamiltonijana H bez H'_b.

Općenito je određivanje točne ovisnosti magnetizacije o temperaturi i vanjskom magnetskom polju iznimno teško te jedino moguće u najjednostavnijim modelima. Nasreću, Hohenberg, Mermin i Wagner su se sjetili lukavog načina kojim se eksplicitno računanje prosjeka magnetizacije zaobilazi te se umjesto toga mudrim odabirom operatora u Bogoljubovljevoj nejednakosti (9) pronalazi gornja međa na parametar uređenja. Ako ta gornja međa u limesu $b \to 0$ trne u nulu onda znamo da kvaziprosjek parametra uređenja također iščezava. Drugim riječima,

[5] Hohenberg-Mermin-Wagnerov teorem nam za slučaj $J_{ij} \neq J^z_{ij}$ ništa ne govori o magnetizaciji duž z osi.

bez eksplicitnog računanja magnetizacije možemo ustvrditi kada ne dolazi do spontanog narušenja simetrije!

U tu svrhu bez smanjenja općenitosti uzimamo da je magnetsko polje usmjereno duž x osi ($\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{x}}$). Kao operatore za Bogoljubovljevu nejednakost odabiremo:

$$A_{\boldsymbol{k}} = \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}_i} S_i^y \,, \tag{34}$$

$$C_{\boldsymbol{k}} = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} S_i^z \,. \tag{35}$$

Raspisivanjem[6] se dobivaju komutatori koji se pojavljuju u Bogoljubovljevoj nejednakosti:

$$[C_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}] = (-\mathrm{i}) \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i} S_i^x = (-\mathrm{i}) V M_x \,,$$

$$\{A_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\} = \sum_{ij} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)} \{S_i^y, S_j^y\} \,,$$

$$\Big[[C_{\boldsymbol{k}}, H], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\Big] = \sum_{ij} J_{ij} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \cdot 2\{1 - \cos[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)]\} \,,$$

$$\Big[[C_{\boldsymbol{k}}, H_b'], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\Big] = b \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i} S_i^x = V b M_x \,.$$

Sljedeći nam je korak malo preinačiti Bogoljubovljevu nejednakost:

$$|\langle [C_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}]\rangle_b|^2 \le \tfrac{1}{2}\beta \left\langle \{A_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\}\right\rangle_b \left\langle \Big[[C_{\boldsymbol{k}}, H + H_b'], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\Big]\right\rangle_b \,,$$

tako što ju podijelimo s dvostrukim komutatorom s desne strane za koji zasigurno znamo da je pozitivan jer je potekao iz norme Bogoljubovljevog skalarnog produkta:

$$\frac{|\langle [C_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}]\rangle_b|^2}{\left\langle \Big[[C_{\boldsymbol{k}}, H + H_b'], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\Big]\right\rangle_b} \le \tfrac{1}{2}\beta \left\langle \{A_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\}\right\rangle_b \,.$$

Ovaj zadnji izraz zbrajamo po svim valnim vektorima unutar prve Brillouinove zone jer za takve sume vrijedi $\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)} = N\delta_{ij}$ što nam dopušta da pojednostavimo desnu stranu:

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \{A_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\} = 2N \sum_i S_i^y S_i^y \,.$$

Da bi lijevu stranu pojednostavili koristimo nejednakosti:

$$|\langle S_i^y S_i^y\rangle| \le |\langle S_i^y S_i^y + S_i^z S_i^z\rangle| \le S(S+1) \,,$$

$$[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)]^2 \le \boldsymbol{k}^2 (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 \,,$$

$$2(1 - \cos x) \le x^2 \,,$$

iz kojih slijedi:

$$\left|\left\langle \Big[[C_{\boldsymbol{k}}, H], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\Big]\right\rangle_b\right| \le S(S+1) \sum_{ij} |J_{ij}|\, (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 \boldsymbol{k}^2 \,.$$

Tako sve zajedno imamo:

$$\left|\sum_{\boldsymbol{k}} \tfrac{1}{2}\beta \left\langle \{A_{\boldsymbol{k}}, A_{\boldsymbol{k}}^\dagger\}\right\rangle_b\right| \le \beta N^2 S(S+1) \,,$$

$$\left|\left\langle \Big[[C_{\boldsymbol{k}}, H + H_b'], C_{\boldsymbol{k}}^\dagger\Big]\right\rangle_b\right| \le N\rho \boldsymbol{k}^2 + V \left|b \langle M_x\rangle_b\right| \,,$$

gdje smo uveli:

$$\rho := \frac{S(S+1)}{N} \sum_{ij} |J_{ij}|\, (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 \,. \tag{36}$$

Da bi ρ konvergirao međudjelovanje mora biti kratkodosežno. Uvrštavanjem nakon sređivanja dobivamo:

$$|\langle M_x\rangle_b|^2 \le \frac{\beta n S(S+1)}{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}} \dfrac{1}{n\rho\boldsymbol{k}^2 + |b\langle M_x\rangle_b|}} \,. \tag{37}$$

Sada uzimamo termodinamički limes. U tu svrhu sumu $\sum_{\boldsymbol{k}}$ iz nazivnika koja ide po prvoj Brillouinovoj zoni zamjenjujemo integralom po prvoj Brillouinovoj zoni pri čemu gustoću $n = N/V$ držimo konstantnim. Međutim, kako se divergencija pojavljuje u infracrvenom $\boldsymbol{k} = 0$ dijelu integrala radi jednostavnosti mi prvu Brillouinovu zoni zamjenjujemo kuglom (krugom) istog volumena (površine) s radijusom k_0, odnosno:

$$\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \longrightarrow \frac{d}{k_0^d} \int_0^{k_0} \mathrm{d}k k^{d-1} \,. \tag{38}$$

Normalizacija desne strane od (38) je određena činjenicom da je $\sum_{\boldsymbol{k}} 1 = N$.

Iz oblika integranda se vidi da se divergencija u nazivniku pojavljuje samo u jednoj i dvjema dimenzijama. Nama je najzanimljiviji dvodimenzionalan slučaj $d = 2$. Izvrednjavanjem integrala koji se pojavljuje u termodinamičkom limesu od (37) dobivamo:

$$|\langle M_x\rangle_b|^2 \le \frac{\beta\rho k_0^2}{\log\left(1 + \dfrac{n\rho k_0^2}{|b\langle M_x\rangle_b|}\right)} \cdot n^2 S(S+1) \,. \tag{39}$$

Drugi faktor $n^2 S(S+1)$ s desne strane je kvadrat saturacijske magnetizacije, dok nam prvi faktor govori koliko je magnetizacija nužno manja od saturacijske.

Iz izraza (39) se jasno vidi da kvaziprosjek $\langle\!\langle M_x\rangle\!\rangle$ pri konačnim temperaturama nužno iščezava. Naime, kada bismo pretpostavili suprotno onda bi u nejednakosti (39)

---

[6] Temeljna komutacijska relacije od koje se kreće je:

$$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = \mathrm{i}\delta_{ij} \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma \,,$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerova delta funkcija, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ Levi-Civita simbol, a α, β, γ su indeksi komponenti spina x, y, z. Pomoću nje se lako izvedu izrazi:

$$[[S_n^z, S_i^x], S_m^z] = -\delta_{ni}\delta_{mi} S_i^x \,,$$

$$[[S_n^z, S_i^y], S_m^z] = -\delta_{ni}\delta_{mi} S_i^y \,,$$

$$[[S_n^z, S_i^x S_j^x], S_m^z] = (\delta_{ni}\delta_{mj} + \delta_{nj}\delta_{mi}) S_i^y S_j^y - (\delta_{ni}\delta_{mi} + \delta_{nj}\delta_{mj}) S_i^x S_j^x \,,$$

$$[[S_n^z, S_i^y S_j^y], S_m^z] = (\delta_{ni}\delta_{mj} + \delta_{nj}\delta_{mi}) S_i^x S_j^x - (\delta_{ni}\delta_{mi} + \delta_{nj}\delta_{mj}) S_i^y S_j^y \,.$$

lijeva strana u limesu $b \to 0$ morala težiti nekoj konačnoj vrijednosti, dok desna strana zasigurno trne u nulu zbog logaritamske divergencije u nazivniku, što je kontradikcija. Stoga znamo da za 2D Heisenbergov i XY model s kratkodosežnim međudjelovanjem pri konačnoj temperaturi ne dolazi do spontanog narušenja simetrije niti dalekodosežnog magnetskog uređenja. Dokaz za 1D slučaj je analogan. Time smo dokazali Hohenberg-Mermin-Wagnerov teorem.

HMW teorem također vrijedi za klasičan Heisenbergov i XY model koji se iz kvantnog modela može dobiti uvođenjem varijabli:

$$\hat{\boldsymbol{n}}_i := \frac{1}{\lambda(S)} \boldsymbol{S}_i \,, \quad \tilde{J}_{ij} := \lambda^2(S) J_{ij} \,, \quad \tilde{b} := \lambda(S) b \,,$$

koje držimo konstantnim kako S i $\lambda(S) = \sqrt{S(S+1)}$ puštamo u beskonačnost.

B. Osjetljivost Hohenberg-Mermin-Wagnerovog argumenta na smetnje

Do sada smo promatrali idealni anizotropan Heisenbergov model čiji se Hamiltonijan sastojao isključivo od osnovnog dijela (30) i vezanja za vanjsko magnetsko polje (32). Ovaj model je naravno samo aproksimativan te bi jedan korak prema većem realizmu bio uključivanje raznih smetnji koje se u stvarnim sustavima zasigurno događaju. Prirodno se onda pitamo koliko je Hohenberg-Mermin-Wagnerov teorem osjetljiv na smetnje.

Kako bi istražili osjetljivost HMW argumenta promotrimo što se događa kada na ukupan Hamiltonijan sustava dodamo smetnju δH:

$$H_{\mathrm{uk}} = H + H'_b + \delta H \,. \tag{40}$$

Lako se uoči da je jedini učinak te smetnje u Mermin-Wagnerovom argumentu taj da se u nejednakosti (37) u nazivniku s desne strane pojavi dodatan član:

$$\Delta_b(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{V} \left| \left\langle \left[[C_{\boldsymbol{k}}, \delta H], C^\dagger_{\boldsymbol{k}} \right] \right\rangle_{b,\delta} \right| . \tag{41}$$

Prosjek $\langle \cdots \rangle_{b,\delta}$ ide po kanonskom ansamblu s Hamiltonijanom $H + H'_b + \delta H$; izostavljanje b ili δ subskript onda znači da se u eksponencijalnim faktorima $\mathrm{e}^{-\beta(H+\cdots)}$ izostavlja ili H'_b ili δH, u tom redu. Novi nazivnik s desne strane nejednakosti (37) onda glasi:

$$\frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\rho \boldsymbol{k}^2 + \Delta_b(\boldsymbol{k}) + \left| b \left\langle M_x \right\rangle_{b,\delta} \right|} \,, \tag{42}$$

te kao što je iz ovoga izraza jasno vidljivo logaritamska divergencija koja je ključna za HMW argument može, ovisno o ponašanju člana $\Delta_b(\boldsymbol{k})$ pri malim valnim brojevima, biti uklonjena! Naime, ako $\Delta_b(\boldsymbol{k})$ za male $\boldsymbol{k}$ teži nekoj konstantnoj vrijednosti koja ne ovisi o magnetizaciji, onda jedino što možemo iz modificirane nejednakosti (37) s nazivnikom (42) dobiti je gornju među na maksimalnu magnetizaciju pri danoj temperaturi. Na taj način smetnja može srušiti Hohenberg-Mermin-Wagnerov argument. Propadanje HMW teorema naravno ne povlači obrat da do spontanog narušenja simetrije nužno dolazi.

Ako želimo da $\Delta_b(\boldsymbol{k})$ ne iščezava onda smetnja δH mora nekako ovisiti o spinu. Jedna opća kategorija smetnji koje možemo promatrati su oblika:

$$\delta H = -\sum_i \boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{S}_i \,, \tag{43}$$

gdje uzimamo da su lokalna polja $\boldsymbol{h}_i$ unutar xy ravnine jer z komponenta tak i tak ne bi doprinijela delti $\Delta_b(\boldsymbol{k})$. Član $\Delta_b(\boldsymbol{k})$ se lako raspisivanjem izračuna:

$$\Delta_b = \frac{1}{V} \left| \left\langle \sum\nolimits_i \boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{S}_i \right\rangle_{b,\delta} \right| = \frac{\left| \langle \delta H \rangle_{b,\delta} \right|}{V} \,. \tag{44}$$

Ako nadalje ova lokalna polja rastavimo na prosjek i devijaciju:

$$\boldsymbol{h} := \frac{1}{N} \sum_i \boldsymbol{h}_i \,, \qquad \boldsymbol{h}_i \doteq \boldsymbol{h} + \delta \boldsymbol{h}_i \,, \tag{45}$$

onda za deltu dobivamo:

$$\Delta_b = \left| \langle \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{M} \rangle_{b,\delta} \right| + n \left| \left\langle \langle \delta \boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{S}_i \rangle^* \right\rangle_{b,\delta} \right| , \tag{46}$$

gdje se prosjek s desne strane uzima po raspodijeli devijacija $\delta \boldsymbol{h}_i$ i po ansamblu. Uzimanje prosjeka po devijacijama smo označili sa zvjezdicom:

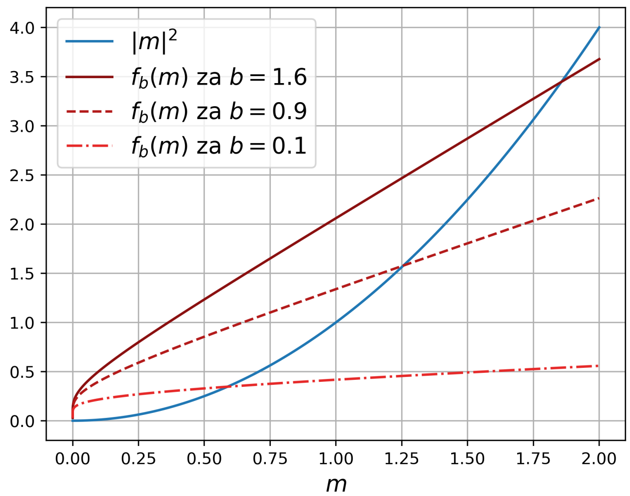
$$\langle A_i \rangle^* := \frac{1}{N} \sum_i A_i \,. \tag{47}$$

Kako za ovaj oblik smetnje delta ne ovisi o valnom vektoru, izvrednjavanje integrala u termodinamičkom limesu je isto kao i prije. Nejednakost (39) kao posljedica smetnje postaje:

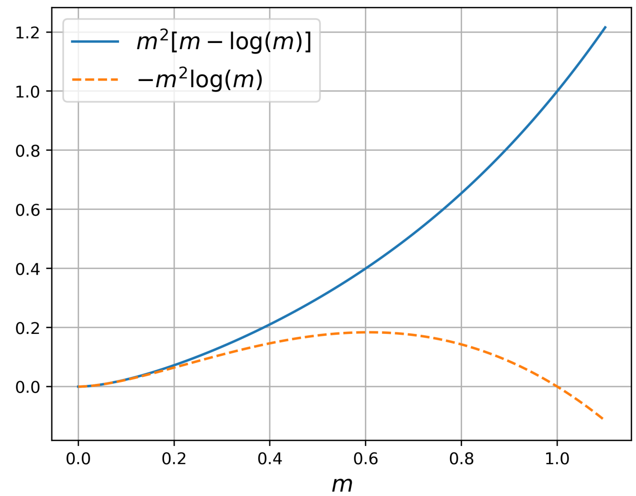
$$\left| \langle M_x \rangle_{b,\delta} \right|^2 \le \frac{\beta \rho k_0^2 \cdot n^2 S(S+1)}{\log\left(1 + \dfrac{n \rho k_0^2}{\Delta_b + \left| b \langle M_x \rangle_{b,\delta} \right|} \right)} \,. \tag{48}$$

Kakav je točno učinak male smetnje Δ_b na nejednakost (48)? Kako bi to istražili dobro je imati na umu kako lijeva i desna strana nejednakosti (48) izgledaju kada je $\Delta_b = 0$. Skica toga je dana na slici 1. Kao što je iz nje vidljivo, postoji raspon vrijednosti od nule do maksimalne magnetizacije za koje nejednakost (48) vrijedi. Kako magnetsko polje ide u nulu, tako maksimalna magnetizacija trne u nulu te dobivamo HMW teorem. Maksimalna magnetizacija je određena transcendentalnom jednadžbom:

$$[M_{\max}(b)]^2 = \frac{\beta \rho k_0^2 \cdot n^2 S(S+1)}{\log\left(1 + \dfrac{n \rho k_0^2}{|b| \, M_{\max}(b)} \right)} \,,$$



Slika 1: Skica ovisnosti lijeve i desne strane nejednakosti (48) uz $\Delta_b = 0$. Desnu stranu smo pojednostavili na $f_b(m) = 1/\log(1 + 1/|bm|)$.



Slika 2: Graf lijeve strane jednadžbe (49) i njene aproksimacije.

koja se u limesu malih polja $b \to 0$ može pojednostaviti razvojem logaritma $\log(1 + x) = \log(x) + x^{-1} + \mathcal{O}(x^{-2})$ za velike x. Nakon uvrštavanja ovog razvoja dobivamo novu transcendentalnu jednadžbu:

$$m^2(m - \log m) = \tfrac{1}{2}C\,, \tag{49}$$

u kojoj smo uveli pokrate:

$$m := \frac{|b|\, M_{\max}(b)}{n\rho k_0^2}\,, \tag{50}$$

$$C := \frac{\beta|b|^2}{\rho k_0^2} 2S(S+1)\,. \tag{51}$$

Na slici 2 je nacrtana lijeva strana jednadžbe (49). Nas zanima slučaj kada $m \to 0$ i $C \to 0$ pa je m u faktoru $(m - \log m)$ jednadžbe (49) zanemariv. Tada je rješenje jednadžbe (49):

$$m = \exp\!\left(\tfrac{1}{2}\, \mathrm{W}_{-1}(-C)\right), \tag{52}$$

gdje je $\mathrm{W}_{-1}(x)$ minus-prva grana Lambertove W funkcije. Tu treba paziti da dobro rješenje odaberemo jer je smo u sklopu naše aproksimacije dobili još jedno nefizikalna rješenja pri $m \approx 1$. Kada uvrstimo razvoj funkcije $\mathrm{W}_{-1}(x)$ za $x \to 0^-$:

$$\mathrm{W}_{-1}(x) = -\eta - \log\eta + \mathcal{O}(\log\eta/\eta)\,,$$
$$\eta = \log(-1/x)\,.$$

u rješenje (52) ono postaje:

$$m = \sqrt{C}\,(-\log C)^{-1/2}\,.$$

Nakon uvrštavanja izraza (50) i (51) u gornji izraz za m dobivamo konačan izraz za maksimalnu magnetizaciju:

$$M_{\max}(b) = \sqrt{\frac{\beta\rho k_0^2}{\mathrm{NAZ}}} \cdot n\sqrt{S(S+1)}\,, \tag{53}$$

$$\mathrm{NAZ} = -\log\sqrt{2S(S+1)} - \log\sqrt{\frac{\beta|b|^2}{\rho k_0^2}}\,.$$

Iz ovog zadnjeg izraza za $M_{\max}$ vidimo da on u limesu $b \to 0$ trnu u nulu zbog logaritamske divergencije nazivnika čime ponovno dobivamo HMW rezultat.

Za slučaj kada je smetnja prisutna općenito očekujemo da maksimalna magnetizacija neće ići u nulu, čime se HMW argument narušava. Jednadžbu maksimalne magnetizacije:

$$M_{\max}(b)^2 = \frac{\beta\rho k_0^2 \cdot n^2 S(S+1)}{\log\left(1 + \dfrac{n\rho k_0^2}{\Delta_b + |b|\, M_{\max}(b)}\right)}\,,$$

možemo ponovno pokušati riješiti tako što razvijemo logaritam nazivnika. Dosljednost ove aproksimacije ćemo kasnije ispitati. Prije toga izraz (46) za Δ_b možemo malo pogodnije zapisati:

$$\Delta_b = h\left|\langle M_x\rangle_{b,\delta}\right| + n\delta_b\,. \tag{54}$$

Za magnetizaciju $\langle M_y\rangle_{b,\delta}$ znamo da iščezava kada je $\Delta_b = 0$ zbog simetrije refleksije naspram xz ravnine, stoga očekujemo da ona neće igrati bitnu ulogu u slučaju sa smetnjom. Zbog toga smo iz izraza (54) uklonili $\boldsymbol{h} \cdot \hat{\boldsymbol{y}}$ u korist člana $h := |\boldsymbol{h} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}|$. Transcendentalna jednadžba (49) za sustav sa smetnjom postaje:

$$m^2\,[m + d - \log(m + d)] = \tfrac{1}{2}C\,, \tag{55}$$

pri čemu u izraze (50) i (51) za m i C više ne uvrštavamo $|b|$ već $|b| + h$, a $d := \delta_b/(\rho k_0^2)$. Ovaj put umjesto traženja eksplicitnog rješenja koje kasnije razvijamo u red možemo odmah iterativnom procedurom pronaći aproksimativno rješenje. Metoda je ta da krenemo od početnog rješenja $m_0 = \sqrt{C}$ koje zatim iterativno uvrštavamo u:

$$m_{n+1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}C}{-\log(m_n + d)}} \,.$$

Ovo reproducira razvoj prethodnog rješenja (52) u slučaju $d = 0$. Tako u najnižem redu pronalazimo rješenje jednadžbe (55):

$$m = \sqrt{\tfrac{1}{2}C}\left(-\log\left(\sqrt{C} + d\right)\right)^{-1/2} ,$$
$$\frac{M_{\max}(b)}{n\sqrt{S(S+1)}} = \sqrt{\frac{\beta\rho k_0^2}{-\log\left(\sqrt{C(|b|+h)} + d\right)}} \,. \tag{56}$$

Sada vidimo da HMW argument propada jer u limesu $b \to 0$ maksimalna magnetizacija $M_{\max}$ teži konačnoj vrijednosti. Kako bi odredili točno koliko jako HMW argument popušta trebamo još odrediti $d = \delta_0/(\rho k_0^2)$ iz nazivnika, odnosno $\delta_0 = \lim_{b\to 0}\delta_b$ iz (54).

U svrhu određivanja maloga delte δ_b ćemo član s prosjekom lokalnih polja koji smo izlučili u izrazu (54) apsorbirati u vanjsko polje tako što uzmemo limes $b \to h$ umjesto $b \to 0$. Onda zbog jednadžbi (44) i (54) vrijedi:

$$\delta_0 = \frac{\left|\langle \delta H\rangle_{b=h,\delta}\right|}{N} = \left|\left\langle\langle \delta \boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{S}_i\rangle^*\right\rangle_{b=h,\delta}\right| \,.$$

Sljedeće razvijamo prosjek $\langle \delta H\rangle_{h,\delta}$ u smetnji δH:

$$\begin{aligned}\langle \delta H\rangle_{b=h,\delta} &= \frac{\left\langle \exp\left(-\int_0^\beta \mathrm{d}\tau\, \delta H\right)\delta H\right\rangle_h}{\left\langle \exp\left(-\int_0^\beta \mathrm{d}\tau\, \delta H\right)\right\rangle_h} \\ &= \langle \delta H\rangle_h + \beta\left[\langle \delta H\rangle_h^2 - \langle \delta H|\delta H\rangle_h\right] + \mathcal{O}(\delta H^3)\,,\end{aligned}$$

gdje se s desne strane pojavio Bogoljubovljev skalarni produkt (10), ovaj put naspram Hamiltonijana $H + H'_{b=h}$. Nadalje:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\langle \delta H\rangle_h &= -\langle \delta \boldsymbol{h}_i\rangle^* \cdot \langle \boldsymbol{S}_i\rangle_h = 0\,,\\ \frac{1}{N}\langle \delta H|\delta H\rangle_h &= \frac{1}{N}\sum_{ij}\sum_{\alpha\beta}\delta h_i^\alpha \delta h_j^\beta \left\langle S_i^\alpha \middle| S_j^\beta\right\rangle_h .\end{aligned} \tag{57}$$

Prilikom procjene drugog člana (57) treba imati na umu da ove poopćene[7] korelacijske funkcije $\left\langle S_i^\alpha \middle| S_j^\beta\right\rangle_b$ značajno ovise o vrsti magnetskog uređenja. Za neuređene sustave očekujemo da su izotropne i da brzo opadaju s udaljenosti $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$, za kvazi-dalekodosežno uređene sustave očekujemo izotropnost i sporo opadanje s udaljenošću, dok za potpuno uređene sustave očekujemo anizotropnost i da $\left\langle S_i^\alpha \middle| S_j^\beta\right\rangle_b$ teži konstantnoj vrijednosti kako $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| \to \infty$. Razlike u prostornom opadanju su tim značajnije što se u izrazu (57) pojavljuje dvostruka suma $\sum_{ij}$ podijeljena s N koja je mala samo za neuređene sustave, dok za uređene sustave postaje termodinamički velika. Malu deltu ocjenjujemo s:

$$\delta_0 \approx \sqrt{2S(S+1)} \cdot \kappa(T)\beta\sigma_h^2 \,, \tag{58}$$

gdje je $\kappa(T)$ bezdimenzionalni broj koji je mali za neuređene sustave, a iznimno veliki za uređene sustave; $\sigma_h = \sqrt{\langle \delta \boldsymbol{h}_i^2\rangle^*}$ je standardna devijacija raspodjele lokalnih polja.

Time dolazimo do procjene:

$$M_{\max}(0) = \sqrt{\frac{\beta\rho k_0^2}{\mathrm{NAZ}}} \cdot n\sqrt{S(S+1)}\,, \tag{59}$$
$$\mathrm{NAZ} = -\log\sqrt{2S(S+1)} - \log\left(\sqrt{\frac{\beta h^2}{\rho k_0^2}} + \frac{\kappa\beta\sigma_h^2}{\rho k_0^2}\right),$$

koja vrijedi samo za male $M_{\max}$, odnosno kada je predfaktor $\sqrt{\beta\rho k_0^2/\mathrm{NAZ}}$ mali. To je ekvivalentno uvjetu:

$$\frac{\beta\rho k_0^2}{-\log(\kappa\sigma_h^2/(\rho k_0)^2) - \log(\beta\rho k_0^2)} \ll 1\,, \tag{60}$$

pri čemu smo neke faktore apsorbirali u κ-u i uzeli da je $h \sim \sigma_h$. U vidu definicije (36), faktor ρk_0^2 nam govori o snazi Heisenbergovog međudjelovanja te ga vrlo grubo možemo aproksimirati s $|J_{ij}| \sim J$. S druge strane, za član $\sigma_h/(\rho k_0^2)$ očekujemo da je vrlo malen jer nam govori o tome koliko je smetnja malena naspram J. Tako vidimo da naša aproksimacija vrijedi u režimu:

$$h \sim \sigma_h \ll \rho k_0^2 \sim J \ll k_B T\,. \tag{61}$$

Također možemo koristiti izraz (59) izvan domene na kojoj je valjan kako bi ocijenili temperaturu T_c pri kojoj dolazi do fazne promijene. To činimo tako što u uvjet (60) zamijenimo $\ll$ s jednakosti. Zbog brojnika $\beta\rho k_0^2$ očekujemo da je kritična temperatura T_c bliska J/k_B pa zanemarujemo $\log(\beta\rho k_0^2) \sim 0$ u nazivniku. To nas vodi do procjene:

$$k_B T_c \approx \frac{J}{a - \log(\sigma_h/J)}\,, \tag{62}$$

u kojoj je a konstanta. Ova se ocjena slaže s izrazima iz literature (npr. jednadžba (9) iz [20]) te se fazni prijelazi pri $k_B T_c \sim J$ uistinu opažaju u dvodimenzionalnim sustavima (sekcija 3.2 u [14]). Zbog logaritma u nazivniku od (62) čak i iznimno mala smetnja dovodi do faznog prijelaza s temperaturom usporedivom s J/k_B. Tako vidimo da je Hohenberg-Mermin-Wagnerov teorem za 2D magnetizam iznimno osjetljiv na smetnje. Ovu jaku osjetljivost temperature T_c o smetnji valja kontrirati s naivnom procjenom po kojoj bi smetnje tek postale značajne

[7] Poopćene u smislu da nisu samo prosjek $\langle S_i^\alpha S_j^\beta\rangle$ pri istom trenutku imaginarnog vremena, već usrednjene po svim imaginarnim vremenskim razmacima od $\tau = 0$ do β.

pri $k_B T_c \sim \sigma_h$ što podcjenjuje temperaturu prijelaza za J/σ_h redova veličina. Ovaj rezultat se slaže s rezultatima iz literature po kojima je HMW teorem u magnetizmu također iznimno osjetljiv na smetnje i na konačnost sustava [14, 21–29].

U eksperimentalnim situacijama je obično riječ o sustavima koji su veoma anizotropni u smislu da se sastoje od slojeva koji vrlo slabo međudjeluju.[8] Točnije, Heisenbergovi intra-ravninski koeficijenti J_{ij} za parove (i,j) iz istog sloja su značajno veći od inter-ravninskih koeficijenata $J_{ij}^{\perp}$ za parove (i,j) iz različitih slojeva. Taj anizotropan Heisenbergov model se može povezati s našom smetnjom (43) tako što lokalna polja $\boldsymbol{h}_i$ uvedemo kao:

$$\boldsymbol{h}_i = \left\langle {\sum_j}' J_{ij}^{\perp} \boldsymbol{S}_j \right\rangle , \tag{63}$$

gdje suma ide po spinovima susjednog sloja. Iz ove veze vidimo da je otprilike $\sigma_h \sim J_\perp$ te da temperatura faznog prijelaza (62) izrazito jako ovisi o anizotropnosti $J_\perp/J$.

[8] Ovdje ne pričamo o anizotropnosti koeficijenata J_{ij} naspram J_{ij}^z u Heisenbergovom Hamiltonijanu (30), već o zavisnosti koeficijenata J_{ij} o tome je li par (i,j) iz istog ili različitog sloja.

V. ZAKLJUČAK

S ovim radom smo dali pregled Hohenbergovog argumenta o nepostojanju dalekodosežnog uređenja u konkretnom slučaju dvodimenzionalnog Heisenbergovog i XY modela. Ustvrdili samo da je Hohenbergovog argument iznimno osjetljiv na smetnje u slučaju magnetizma. Osjetljivost Hohenbergovog argument za supratekućine i supravodiče ostaje kao zanimljiva tema za daljnja istraživanja.

ZAHVALE

Zahvaljujem se profesoru Denisu Sunku na mentorstvu prilikom pisanja ovoga rada.

[1] N. D. Mermin, H. Wagner. *Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models*. Phys. Rev. **17**, 22 (1966) 1133–1136. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.1133.

[2] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin (1976). *Solid State Physics*. p. 704. Cengage Learning. ISBN-10: 0-03-083993-9.

[3] G. Gomez-Santos, J. D. Joannopoulos. *Application of spin-wave theory to the ground state of XY quantum Hamiltonians*. Phys. Rev. B **36**, 16 (1987) 8707–8711. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.36.8707.

[4] S. Coleman. *There are no Goldstone bosons in two dimensions*. Commun. Math. Phys. **31**, 4 (1973) 259–264. https://doi.org/10.1007/BF01646487.

[5] P. C. Hohenberg. *Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions*. Phys. Rev. **158**, 2 (1967) 383–386. https://doi.org/10.1103/PhysRev.158.383.

[6] B. I. Halperin. *On the Hohenberg–Mermin–Wagner Theorem and Its Limitations*. J. Stat. Phys. **175** (2019) 521–529. https://doi.org/10.1007/s10955-018-2202-y.

[7] N. D. Mermin. *Crystalline Order in Two Dimensions*. Phys. Rev. **176**, 1 (1968) 250–254. https://doi.org/10.1103/PhysRev.176.250.

[8] M. E. Fisher, D. Jasnow. *Decay of Order in Isotropic Systems of Restricted Dimensionality. II. Spin Systems*. Phys. Rev. B **3**, 3 (1971) 907–924. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.3.907.

[9] R. Kishore, D. Sherrington. *On the non-existence of magnetic order in one and two dimensions*. Phys. Lett. A. **42**, 3 (1972) 205–207. https://doi.org/10.1016/0375-9601(72)90862-6.

[10] G. Roepstorff. *A stronger version of Bogoliubov's inequality and the Heisenberg model*. Commun. Math. Phys. **53**, 2 (1977) 143–150. https://doi.org/10.1007/BF01609128.

[11] A. Klein, L. J. Landau, D. S. Shucker. *On the absence of spontaneous breakdown of continuous symmetry for equilibrium states in two dimensions*. J. Stat. Phys. **26**, 3 (1981) 505–512. https://doi.org/10.1007/BF01011431.

[12] A. Gelfert. *On the role of dimensionality in many-body theories of magnetic long-range order*. arXiv (2001). https://arxiv.org/abs/cond-mat/0106031.

[13] A. Gelfert, W. Nolting. *The absence of finite-temperature phase transitions in low-dimensional many-body models: a survey and new results*. J. Phys. Condens. Matter **13**, 27 (2001) R505–R524. https://doi.org/10.1088/0953-8984/13/27/201.

[14] L. J. De Jongh, A. R. Miedema. *Experiments on simple magnetic model systems*. Advances in Physics **50**, 8 (2001) 947–1170. https://doi.org/10.1080/00018730110101412.

[15] V. L. Pokrovsky. *Two-dimensional magnetic phase transitions*. J. Magn. Magn. Mater. **200**, 1–3 (1999) 515–531. https://doi.org/10.1016/S0304-8853(99)00406-0.

[16] H. Wagner, U. Schollwoeck. *Mermin-Wagner Theorem*. Scholarpedia **5**, 10 (2010) 9927. https://doi.org/10.4249/scholarpedia.9927.

[17] N. N. Bogoljubov (1970). *Lectures on Quantum Statistics, Volume 2, Quasi-averages*. Gordon and Breach Science Publishers. ISBN-10: 0-677-20570-8.

[18] C. N. Yang, T. D. Lee. *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation*. Phys. Rev. **87**, 3 (1952) 404–409. https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.404.

[19] T. D. Lee, C. N. Yang. *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model*. Phys. Rev. **87**, 3 (1952) 410–419. https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.410.

[20] C. Yasuda, S. Todo, K. Hukushima, F. Alet, M. Keller, M. Troyer, H. Takayama. *Néel Temperature of Quasi-Low-Dimensional Heisenberg Antiferromagnets*. Phys. Rev. Lett. **94**, 21 (2005) 217201. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.217201.

[21] H. E. Stanley, T. A. Kaplan. *Possibility of a Phase Transition for the Two-Dimensional Heisenberg Model*. Phys. Rev. Lett. **17**, 17 (1966) 913–915. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.913.

[22] N. W. Dalton, D. W. Wood. *Critical behaviour of the simple anisotropic Heisenberg model*. Proc. Phys. Soc. **90**, 2 (1967) 459–474. https://doi.org/10.1088/0370-1328/90/2/316.

[23] D. S. Ritchie, M. E. Fisher. *Finite-Size and Surface Effects in Heisenberg Films*. Phys. Rev. B **7**, 1 (1973) 480–494. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.7.480.

[24] M. E. Lines. *Curie Temperatures for Layer Structures*. Phys. Rev. **133**, 3A (1964) A841–A850. https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A841.

[25] T. Obokata, I. Ono, T. Oguchi. *Padé Approximation to Ferromagnet with Anisotropic Exchange Interaction*. J. Phys. Soc. Jpn. **23**, 3 (1967) 516–521. https://doi.org/10.1143/JPSJ.23.516.

[26] V. L. Berezinskii. *Violation of long range order in one-dimensional and two-dimensional systems with a continuous symmetry group: I Classical systems*. Zh. eksp. Teor. Fiz. **59** (1970) 907–920. https://inspirehep.net/record/61186.

[27] M. E. Lines. *The quadratic-layer antiferromagnet*. J. Phys. Chem. Solids. **31**, 1 (1970) 101–116. https://doi.org/10.1016/0022-3697(70)90291-X.

[28] T. Ishikawa, T. Oguchi. *Critical Behavior of the Spin System with Anisotropic Exchange Interaction. II. Two-Dimensional Lattice*. J. Phys. Soc. Jpn. **32**, 4 (1971) 1021-1025. https://doi.org/10.1143/JPSJ.31.1021.

[29] D. D. Betts, C. J. Elliott, R. V. Ditzian. *Phase Transitions in Two-Dimensional Spin Systems*. Can. J. Phys. **49**, 10 (1971) 1327-1334. https://doi.org/10.1139/p71-157.