Bornovo pravilo u poopćenim kvantnim mjerenjima

Josip Atelj
Mentor: dr. sc. Hrvoje Nikolić
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb
(Dated: 24. siječnja 2020.)

U radu se predstavlja teorija mjerenja u kojoj se eksplicitno uvodi mjerni uređaj koji se opisuje stanjem na Hilbertovom prostoru. Polazeći od uvida da se mjerenje svodi na makroskopske razlike u bazi položaja razmatramo važnost tzv. *perceptibla*. Uz pomoć tih objekata pokazujemo da se Bornovo pravilo u proizvoljnoj bazi može izvesti postulirajući ga isključivo u bazi položaja. Na kraju dobivene rezultate dovodimo u vezu s Bohmovom mehanikom.

1. UVOD

Osnovni aksiom kvantne mehanike koji daje vezu između eksperimenta i teorije je tzv. Bornovo pravilo. Ono se može formulirati na sljedeći način: prilikom mjerenja opservable R na sistemu opisanom vektorom stanja $|\psi\rangle$ rezultati eksperimenta su dani svojstvenim vrijednostima danog operatora sa sljedećom vjerojatnošću

$$p_r = |\langle r|\psi\rangle|^2. \tag{1}$$

Nešto drugačije rečeno: u bazi hilbertovih stanja $\{|r\rangle\}$ vjerojatnost dobivanja rezultata r je $p_r = |\langle r|\psi\rangle|^2$. Iz ove formulacije je vidljivo da je pravilo postulirano da vrijedi za proizvoljnu bazu izvjesnog Hilbertovog prostora.

U standardnom pristupu ovaj se postulat nadopunjuje sljedećom tvrdnjom: prilikom dobivanja rezultata r promatrani sistem više nije opisan vektorom stanja $|\psi\rangle$ već neunitarnom evolucijom prelazi u stanje $|r\rangle$. Takav proces naziva se *von Neumannov postulat projekcije*[1]. No, to ograničenje je suvišno te se, štoviše, takav proces rijetko ostvaruje u eksperimantalnoj praksi.[2]. Mi ćemo se u ovom radu voditi pretpostavkom da sistem, nakon interakcije s mjernim uređajem, ostaje u nekoj općenitoj superpoziciji. Ta pretpostavka neće pomoći u rješavanju standardnog problema mjerenja već će samo učiniti izvod općenitijim.

U radu se u poglavlju 2 daje kratak pregled teorije mjerenja budući da se takav formalizam koristi u izvodu. Također, u potpoglavlju 2.2 predstavljamo pojam perceptible koji je ključan u izvodu. Poglavlje 3 daje kratak uvod u formalizam poopćenog mjerenja - tzv. POVM formalizam. U poglavlju 4 izvodimo Bornovo pravilo u proizvoljnoj bazi. Poglavlje 5 donosi pregled Bohmove mehanike te pokazuje vezu s rezultatima iz poglavlja 4.

2. OSNOVE TEORIJE MJERENJA

2.1. Skica mjerenja

Premda u klasičnoj mehanici teorija mjerenja praktični ne postoji, ona u kvantnoj mehanici zauzima središnje mjesto te je jedan od glavnih izvora konceptualnih poteškoća. Za kvantni opis mjerenja potrebno je eksplicitno uvesti i kvantnomehanički opisati mjerni uređaj.

O različitim rezultatima koje mjerni uređaj pokazuje govorit ćemo, donekle simbolički, kao o različitim stanjima kazaljke. Stanja kazaljke bit će predstavljena skupom vektora $\{|A_i\rangle\}$, a različita stanja su promatraču, razumljivo, makroskopski raspoznatljiva.

U slučaju kazaljke koja je u početnom trenutku opisana vektorom $|A_0\rangle$ te mikroskopskog sistema opisanog vektorom $|r\rangle$, mi mjerenjem opservable $R = \sum_r r\,|r\rangle\langle r|$ želimo dobiti sljedeću evoluciju

$$U|r\rangle \otimes |A_0\rangle = |r\rangle \otimes |A_r\rangle, \tag{2}$$

gdje je U unitarni operator evolucije izgrađen preko Hamiltonijana interakcije mjernog uređaja i sistema. Ovom jednadžbom ostvarena je jednoznačna veza između stanja kazaljke i stanja sistema, a to je upravo ono što eksperimentom želimo postići.

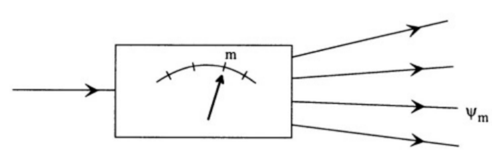
Dobivena jednadžba se zbog linearnosti Schrödingerove jednadžbe lako poopći na slučaj kada je sistem u početku u proizvoljnom početnom stanju $|\psi\rangle = \sum_r c_r |r\rangle$, tj.

$$U|\psi\rangle \otimes |A_0\rangle = \sum_r c_r |r\rangle \otimes |A_r\rangle. \tag{3}$$

Gornju jednadžbu ipak treba malo preinačiti budući je zahtjev da mikrosistem ostane u svojstvenom stanju operatora, kao što je prije rečeno, prestrog. Jednadžbu (3) možemo poopćiti

$$U|\Psi\rangle \otimes |A_0\rangle = \sum_m c_m |\psi_m\rangle \otimes |A_m\rangle, \tag{4}$$

uz razliku da skup vektora ψ_m općenito nije ortogonalan. Evoluciju (4) simbolički možemo prikazati[2] kao



Slika 1. Shematski prikaz mjernog uređaja

Na ovo razmatranje se opet nadovezuje pitanje kakav tip procesa je prijelaz

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\psi_m\rangle\,, \tag{5}$$

budući da takav prijelaz nije unitaran. Ovo je osnovni problem mjerenja u kvantnoj mehanici, a o njegovoj interpretaciji ovdje neće biti riječi već će samo biti napomenuto da izvod nije u proturječju s ortodoksnom (kopenhagenškom) interpretacijom.

2.2. Što mjerimo?

Valja nam se zapitati što mi zapravo mjerimo kada provodimo eksperiment. Budući je kvantni svijet mikrosvijet, a svijet dostupan promatraču makrosvijet, nužno je imati premosnicu između ta dva svijeta. Premosnica je upravo mjerni uređaj na kojemu se događa interakcija s mjerenim sistemom te posljedično zabilježava makroskopski rezultat. Bitno je ovdje naglasiti da saznanja o mikrosvijetu dobivamo posredno, tj. zaključujemo preko teorijske veze kazaljke makroskopskog uređaja te mikrosistema - preko jednadžbe (4).

Ovo nas navodi na razmatranje sljedećeg pojma - *perceptible*[3]. Pod tim pojmom razumijevat ćemo one stvari ili pojave koje su ljudskim osjetilima dostupne neposrednim putem. Odavde slijedi da svi mikroskopski objekti nisu perceptible; s druge strane perceptibla nužno odgovara nečemu makroskopskom, ali obrat ne vrijedi. Primjeri perceptibla su svakidašnji objekti kao što su stol, mjesec itd., ali isto tako zvuk i ostali osjeti.

Za razliku od perceptible postoje i neperceptible - npr. elektron, atom, EM polje itd. Smisao neperceptibla je u tome da one objašnjavaju ponašanje perceptibla. Svaki eksperiment se svodi na opažanje perceptibla koje se onda pojašnjavaju neperceptiblama.

Glavna odlika perceptibla bitna za izvod u ovom radu je u tome što se sve mogu svesti na razliku u njihovim makroskopskim položajima[4]. Tako se npr. klik u detektoru može svesti na oscilacije izvjesne membrane; kod digitalnog ekrana perceptible su makroskopski različite znamenke na ekranu itd. Općenito rečeno svi različiti osjetni podražaji su posljedica makroskopske raspoznatljivosti nečega.

3. POVM FORMALIZAM[5]

POVM (*eng.* Positive Operator Valued Measures) formalizam uveden je relativno kasno te poopćuje uobičajeni formalizam teorije mjerenja.
Obično opservablu opisujemo hermitskim operatorom $\mathcal{O}$ koji se pomoću spektralne dekompozicije može pisati kao

$$\mathcal{O} = \sum_k \lambda_k P_k, \tag{6}$$

gdje projektori zadovoljavaju $P_k P_l = P_k \delta_{kl}$ te $\sum_k P_k = 1$. Tada mjerenje opservable $\mathcal{O}$ na stanju $|\psi\rangle$ kao rezultat daje vrijednost λ_k s vjerojatnošću

$$p_k = \langle\psi| P_k |\psi\rangle\,. \tag{7}$$

Ovo je zapravo Bornovo pravilo (1).

Opservable (6) nazivat ćemo PVM (*eng.* Projector Valued Measure), a mjerenja predstavljena takvim operatorom PVM mjerenja.

Kao što je već rečeno u uvodu, ovome se još nadodaje tvrdnja da nakon mjerenja, stanje $|\psi\rangle$ prelazi u

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{P_k\,|\psi\rangle}{\sqrt{p_k}}. \tag{8}$$

Iz ovog razmatranja je jasnije zašto se takva mjerenja nazivaju projektivnim.

No obje gornje jednadžbe - (7) i (8) - mogu se poopćiti. Konkretno nas zanima jednadžba (7) koju možemo poopćiti na

$$p_k = \langle\psi| E_k |\psi\rangle\,, \tag{9}$$

gdje su E_k operatori koji zadovoljavaju sljedeća svojstva

- $E_k^\dagger = E_k$
- $\sum_k E_k = I$
- $\langle\psi| E_k |\psi\rangle \geq 0$ za svaki vektor $|\psi\rangle$.

Kažemo da operatori E_k čine POVM. Sva ova svostva zadovoljavaju i projektori P_k no operatori E_k općenito ne moraju biti projektori. Odavde slijedi da su projektivna (PVM) mjerenja poseban slučaj POVM mjerenja. Važno je još napomenuti da broj operatora E_k ne mora biti jednak dimenziji Hilbertovog prostora na kojemu djeluju već može biti i veći.

3.1. Primjer POVM mjerenja

U ovom potpoglavlju primjenit ćemo gornje razmatranje na jednom primjeru te pokazati praktičnu korisnost POVM mjerenja.

Recimo da Alice šalje Bobu *qubit* pripremljen u jednom od dvaju neortogonalnih stanja $|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$ ili $|\psi_2\rangle = |\rightarrow\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. Bobov zadatak je saznati koji *qubit* mu je dan te provodi eksperiment da to sazna. Ako bi bila riječ o projektivnim mjerenjima, Bob bi mogao uzeti projektore $P_1 = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$ i $P_2 = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$. Na ovaj način dobivanje rezultata P_2 otkriva nam sa sigurnošću da nam je poslano stanje $|\psi_2\rangle$, dok dobivanje rezultata P_1 ne donosi nikakve nove informacije, tj. ne možemo reći koje stanje nam je bilo dano.

S druge strane, poopćenim mjerenjem imamo mogućnost razaznavanja koje stanje smo dobili. Uzmimo POVM koji sadrži tri elementa

$$E_1 = \frac{1}{2} \left|\downarrow\right\rangle \left\langle\downarrow\right| ;$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left|\leftarrow\right\rangle \left\langle\leftarrow\right| ; \tag{10}$$

$$E_3 = I - E_1 - E_2.$$

U slučaju da je Bobu poslano stanje $|\psi_1\rangle$, vjerojatnost dobivanja rezultata E_1 je $\langle\psi_1| E_1 |\psi_1\rangle = 0$. Dakle, ako je E_1 registriran, Bobu je sigurno bilo dato stanje $|\psi_2\rangle$. Isto tako, u slučaju da Bob registrira E_2 može zaključiti da je dobio stanje $|\psi_1\rangle$. U trećem mogućem ishodu - kada je registriran rezultat E_3 - Bob ne dobiva uvid u to kakvo stanje mu je dano.

U konačnici, za razliku od projektivnog mjerenja, poopćenim mjerenjima Bob može dobiti više informacija te, u slučaju da mu je dan veći broj *qubita*, sa sigurnošću otkriti koje stanje mu je dano za veći broj *qubita*.

3.1.1. Naimarkov teorem[2]

Neka je E_m POVM na prostoru $\mathcal{H}$. Tada postoji Hilbertov prostor $\mathcal{H}'$, PVM M'_m na prostoru $\mathcal{H}'$ te ortogonalni operator projekcije P takav da $P\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, za kojeg vrijedi

$$E_m = PM'_m P. \tag{11}$$

Ovo znači da svako POVM mjerenje može biti svedeno na PVM mjerenje u nekom većem Hilbertovom prostoru.

4. IZVOD BORNOVOG PRAVILA

U ovom odjeljku izvodimo Bronovo pravilo u proizvoljnoj bazi postulirajući ga samo u bazi položaja[3]. Ključni uvid za provedbu izvoda je činjenica da nama trebaju samo vjerojatnosti određenih perceptibla jer je to ono što u eksperimentu opažamo. Budući da perceptible razlikujemo njihovim makroskopskim položajima, njihove vjerojatnosti moramo izračunati u prostoru položaja. Također, budući da granica između perceptibla i neperceptibla nije oštra, čini se vjerodostojnim računati sve vjerojatnosti u prostoru položaja.

U našem slučaju perceptibla će biti predstavljena kazaljkom mjernog uređaja te ćemo mikroskopsko stanje kazaljke označiti sa $|A_{i,j}\rangle$. Nadalje, želimo mjeriti neku dinamičku varijablu $\mathcal{R}$ koja je predstavljena operatorom R te vrijedi

$$R\,|r\rangle = r\,|r\rangle \,. \tag{12}$$

Neka je kazaljka u početnom trenutku u stanju $|A_0\rangle$, te objekt u stanju $|r\rangle$. Tada je ukupno stanje na prostoru $\mathcal{H}_{kazaljka} \otimes \mathcal{H}_{objekt}$ jednako (odavde pa nadalje ispuštamo oznaku tenzorskog produkta)

$$|r\rangle\,|A_0\rangle \,. \tag{13}$$

Slično kao kod jednadžbe (4), ali malo općenitije, nakon interakcije objekta i mjernog uređaja stanje unitarno evoluira

$$U\,|r\rangle\,|A_0\rangle = \sum_{r'} a_{r'}\,|r'\rangle \sum_m b_m\,|A_{r,m}\rangle \equiv |\alpha_r\rangle \,, \tag{14}$$

gdje zbog unitarnosti vrijedi

$$\sum_{r'} |a_{r'}|^2 = \sum_m |b_m|^2 = 1. \tag{15}$$

Dobiveni vektor nije svojstveno stanje niti operatora R niti operatora kazaljke.

Gore smo pretpostavili da je početno stanje objekta svojstveni vektor operatora R, ali općenitije moramo uzeti da je ono $|\psi\rangle = \sum_r c_r\,|r\rangle$. U tom slučaju jednadžba (14) prelazi u

$$U\,|\psi\rangle\,|A_0\rangle = \sum_r c_r\,|\alpha_r\rangle \,. \tag{16}$$

Ova jednadžba se može i dodatno poopćiti. Budući da sustav mjerni uređaj + objekt nije savršeno izoliran, korisno je u jednadžbu ubaciti i okolinu. Nju ćemo označiti vektorom $|O_i\rangle$, a početno stanje okoline sa $|O_0\rangle$. Izraz (16) tada prelazi u

$$U\,|\psi\rangle\,|A_0\rangle\,|O_0\rangle = \sum_r c_r\,|\alpha_r\rangle\,|O_r\rangle \equiv |\Psi_f\rangle \,. \tag{17}$$

Dobiveni izraz se može dodatno srediti

$$|\Psi_f\rangle = \sum_{r,m} c_r b_m\,|A_{r,m}\rangle\,|S_r\rangle \,, \tag{18}$$

gdje je uvedena pokrata $|S_r\rangle \equiv |O_r\rangle \sum_{r'} a_{r'}\,|r'\rangle$ (S kao Sve ostalo). Ovu jednadžbu možemo zapisati u multikoordinatnoj reprezentaciji kao

$$\Psi(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{r,m} c_r b_m A_{r,m}(\vec{x}) S_r(\vec{y}), \tag{19}$$

gdje je uvedena notacija $A_{r,m}(\vec{x}) \equiv \langle\vec{x}|A_{r,m}\rangle$ te $S_r(\vec{y}) \equiv \langle\vec{y}|S_r\rangle$; ovdje $\vec{x}$ označava položaje čestica koje sačinjavaju mjerni uređaj, tj. $\vec{x} \equiv (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ gdje n označava broj čestica koje sačinjavaju uređaj. Isto tako $\vec{y}$ označava položaje svih ostalih čestica.

Sada postulirajmo Bornovo pravilo u bazi položaja

$$\rho(\vec{x},\vec{y}) = |\Psi(\vec{x},\vec{y})|^2. \tag{20}$$

Nadalje nametnimo zahtjev

$$A_{r_1,m}(\vec{x}) A_{r_2,m}(\vec{x}) \simeq 0 \quad \text{za} \quad r_1 \neq r_2, \tag{21}$$

motivacija kojega je mogućnost makroskopskog razlikovanja dvaju rezultata r_1 i r_2. Izvod se dalje dijeli na dva osnovna slučaja. Uzmimo da je $m_\alpha \neq m_\beta$ te da su r-ovi isti; tada u prvom slučaju vrijedi

$$A_{r,m_\alpha}(\vec{x})A_{r,m_\beta}(\vec{x}) \not\simeq 0, \tag{22}$$

a u drugom

$$A_{r,m_\alpha}(\vec{x})A_{r,m_\beta}(\vec{x}) \simeq 0. \tag{23}$$

4.1. PVM mjerenje

Pogledajmo najprije prvi slučaj, tj. situaciju kada vrijedi jednadžba (22). Ta jednadžba nam govori da funkcije A_{r,m_β} i A_{r,m_α} nisu makroskopski različite za različite m-ove. Makroskopska neraspoznatljivost znači da obje fukcije predstavljaju jedan te isti rezultat mjerenja -, naime, r.

Budući da nas zanimaju vjerojatnosti perceptibla, treba nam samo gustoća vjerojatnosti za čestice mjernog uređaja; - nju dobivamo integracijom po varijabli $\vec{y}$

$$\rho^{uređaj}(\vec{x}) = \int d\vec{y}\rho(\vec{x},\vec{y}). \tag{24}$$

To vodi na (radi preglednosti ispuštene su ovisnosti o $\vec{x}$ i $\vec{y}$)

$$\begin{aligned}\rho^{uređaj}(\vec{x}) &= \sum_{r,m,k,l} c_r c_k^* b_m b_l^* A_{r,m}A_{k,l}^* \int d\vec{y} S_r S_k^* \\ &= \sum_r |c_r|^2 \sum_{m,l} b_m b_l^* A_{r,m} A_{r,l}^*,\end{aligned} \tag{25}$$

gdje je iskorištena ortonormiranost baze $|S_i\rangle$

$$\int d\vec{y} S_i(\vec{y})S_j^*(\vec{y}) = \delta_{ij}. \tag{26}$$

Sada nas zanima područje $\vec{x}$ prostora - nazovimo ga σ_r - na kojemu su fukcije $A_{r,m}(\vec{x})$ s istim r nezanemarive. Onda, da bismo dobili vjerojatnost nalaska rezultata r, izraz (25) moramo integrirati na tom dijelu prostora

$$\begin{gathered} p_r^{uređaj} = \int_{\sigma_r} d\vec{x}\rho^{uređaj}(\vec{x}) \simeq \\ |c_r|^2 \sum_{m,l} b_m b_l^* \int_{\sigma_r} d\vec{x} A_{r,m}A_{r,l}^*.\end{gathered} \tag{27}$$

Potonji izraz se preko ortogonalnosti funkcija $A_{i,j}$ svodi na

$$p_r \simeq |c_r|^2 \sum_m |b_m|^2 = |c_r|^2, \tag{28}$$

pri čemu je iskorišteno (15).

Dobivena vjerojatnost je identična vjerojatnosti kod općenitog Bornovog pravilo - izraz (1). Time je za ovaj slučaj pokazano kako postuliranje Bornovog pravila u bazi prostora vodi na Bornovo pravilo u proizvoljnoj bazi.

4.2. POVM mjerenje

Sada pretpostavljamo da vrijedi jednadžba (23). To pak znači da su funkcije A_{r,m_β} i A_{r,m_α} s istim r-om makroskopski različite - dakle predstavljaju dva različita ishoda mjerenja. U ovom slučaju mjerenje nikako ne možemo interpretirati kao mjerenje opservable R budući da za jedan r imamo više mogućih ishoda mjerenja.
Dok smo u prethodnom slučaju imali n_r rezultata mjerenja (gdje je n_r dimenzija prostora $\mathcal{H}_{objekt}$), u ovom slučaju ih imamo $n_r \times n_m$. Veći broj makroskopski različitih rezultata nas navodi da svaki rezultat predstavimo jednim indeksom l za razliku od dvaju indeksa r i m kako je u gornjem izvodu. Tada uz notaciju

$$(r,m) \equiv l, \quad c_r b_m \equiv \tilde{c}_l, \quad |S_r\rangle \equiv |S_l\rangle \tag{29}$$

jednadžbu (19) možemo zapisati kao

$$\Psi(\vec{x},\vec{y}) = \sum_l \tilde{c}_l A_l(\vec{x}) S_l(\vec{y}), \tag{30}$$

gdje vrijedi

$$\sum_l |\tilde{c}_l|^2 = 1. \tag{31}$$

Ovakva mjerenja mogu biti opisana POVM elementima na prostoru objekta - $\mathcal{H}_{objekt}$, kako je opisano u poglavlju 3.

No, Naimarkov teorem nam garantira da se POVM mjerenje svodi na PVM mjerenje u nekom većem Hilbertovom prostoru. Budući da je Hilbertov prostor uređaja $\mathcal{H}_u$ tada uvijek možemo naći dovoljno veliki Hilbertov prostor $\mathcal{H}_u \otimes \mathcal{H}_{ostalo}$ na kojemu možemo naći skup projektora koji predstavljaju mjerenje. Odgovarajući skup možemo predstaviti sa $|A_l\rangle\langle A_l| \otimes 1$ te se mjerenje tako opisuje kao mjerenje opservable perceptible

$$L = \sum_l l\,|A_l\rangle\langle A_l|. \tag{32}$$

Na taj način opet radimo postupak kao u prethodnom potpoglavlju

$$\rho(\vec{x},\vec{y}) \simeq \sum_l |\tilde{c}_l|^2 |A_l(\vec{x})|^2 |S_l(\vec{y})|^2, \tag{33}$$

gdje je ponovno iskorištena makroskopska raspoznatljivost različitih ishoda

$$A_l(\vec{x})A_k(\vec{x}) \simeq 0 \quad \text{za} \quad l \neq k. \tag{34}$$

Onda putem

$$\rho^{uređaj}(\vec{x}) = \int_{\sigma_l} d\vec{y}\rho(\vec{x},\vec{y}) \simeq \sum_l |\tilde{c}_l|^2 |A_l(\vec{x})|^2 \tag{35}$$

ponovno za vjerojatnost nalaska čestica urađaja u području $A_l(\vec{x})$ dobivamo

$$p_l^{uređaj} = \int_{\sigma_l} d\vec{x}\rho^{uređaj}(\vec{x}) \simeq |\tilde{c}_l|^2. \tag{36}$$

Vidimo da i za ovaj slučaj ponovno dobivamo Bornovo pravilo u proizvoljnoj bazi.

5. BOHMOVA MEHANIKA[3,6]

Premda su prijašnji rezultati sami za sebe važni, ponajviše zbog naglaska na činjenicu da mi stvarno mjerimo perceptible, oni ipak mogu poslužiti za daljnja razmatranja.

Rezultati iz poglavlja 4 ukazuju na to da neka druga teorija, koja zadovoljava Bornov aksiom

$$\rho(\vec{x},\vec{y},t) = |\Psi(\vec{x},\vec{y},t)|^2, \tag{37}$$

daje ista predviđanja kao i standardna kvantna mehanika.

Među mnogim mogućim alternativnim teorijama, ovdje ćemo se samo kratko osvrnuti na jednu - tzv. *Bohmovu mehaniku*[7].

Izgradnja Bohmove teorije može krenuti od Schrödingerove jednadžbe

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi. \tag{38}$$

Valnu funkciju ψ u možemo napisati u obliku

$$\psi = Re^{iS/\hbar}, \tag{39}$$

gdje su $R = R(\vec{q},t)$ i $S = S(\vec{q},t)$ realne funkcije te je uvedena nova varijabla $\vec{q} = (\vec{x},\vec{y})$ koja predstavlja sve čestice. Schrödingerovu jednadžbu tada možemo ekvivalentno zapisati (razdvajajući realni i imaginarni dio) dvjema jednadžbama

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\vec{\nabla}^2 R}{R} + V = 0 \tag{40}$$

te

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{R^2\vec{\nabla}S}{m}\right) = 0. \tag{41}$$

Jednadžba (40) ima formu klasične *Hamilton-Jacobijeve* jednadžbe uz dodatno prisustvo tzv. kvantnog potencijala Q

$$Q(\vec{q},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\vec{\nabla}^2 R}{R}. \tag{42}$$

Budući da je Hamilton-Jacobijeva jednadžba ekvivalentna Newtonovom aksiomu gibanja, imamo

$$m\frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = -\vec{\nabla}(V(\vec{q}) + Q(\vec{q},t)). \tag{43}$$

Ovo nas navodi da valu ψ pridružimo čestice koja se gibaju po nekim putanjama $\vec{q} = \vec{q}(t)$. Tada možemo konstruirati vektorsko polje $\vec{v} = (1/m)\vec{p} = (1/m)\vec{\nabla}S$ koje definira u svakoj točki prostora u svakom trenutku tangentu na moguće putanje čestica.

Jednadžbu gibanja čestica postuliramo kao

$$\dot{\vec{q}} = \vec{v}(\vec{q},t)|_{\vec{q}=\vec{q}(t)}. \tag{44}$$

Na ovaj način smo uveli vezu faze valne funkcije i čestica; preostaje nam još interpretirati jednadžbu (41).

Pogledajmo izraz za gustoću struje vjerojatnosti koji možemo izvesti pomoću Schrödingerove jednadžbe

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*). \tag{45}$$

Ovaj izraz se preko (39) svodi na

$$\vec{j} = R^2\frac{\vec{\nabla}S}{m} = R^2\vec{v}. \tag{46}$$

Vidimo da je uvedeno polje $\vec{v}$ proporcionalno struji gustoće vjerojatnosti. R^2 možemo interpretirati kao gustoću vjerojatnosti - jednadžba (41) tada predstavlja jednadžbu kontinuiteta. Za razliku od standardne interpretacije, R^2 nam ovdje ne daje samo vjerojatnost da čestice *nađemo* (putem mjerenja) na mjestu $\vec{q}$ u vremenu t, već izražava vjerojatnost da se čestice zaista nalaze na tom položaju, neovisno o mjerenju. Dakle, suprotno standardnom tumačenju, mi ovdje česticama pripisujemo dobro definirane putanje.

Iz jednadžbe kontinuiteta također slijedi da ukoliko vrijedi $\rho(\vec{q},t_0) = R^2(\vec{q},t_0)$ onda vrijedi $\rho(\vec{q},t) = R^2(\vec{q},t)$ za svaki t. Postulirajući da nam je raspodjela čestica $R^2(\vec{q},t)$ dana sa $|\Psi(\vec{q},t)|^2$ zapravo postuliramo Bornovo pravilo u bazi položaja. S obzirom da se u ovu teoriju mogu uklopiti svi mjerljivi efekti kao i kod standardne (nerelativističke) kvantne mehanike, slijedi da te dvije teorije imaju ista eksperimentalna predviđanja.

6. ZAKLJUČAK

Razmatranjem procesa mjerenja pokazali smo kako se mjerni uređaj može opisati formalizmom kvantne mehanike. Različita stanja mjernog uređaja nazvali smo perceptiblama te smo, uočavanjem da se različite perceptible svode na razlike u položajima, izveli općenito Bornovo pravilo postulirajući ga samo u bazi položaja. Dobiveni izvod omogućio nam je nadalje da pokažemo zašto Bohmova mehanika daje ista predviđanja kao i (nerelativistička) kvantna mehanika.

7. ZAHVALE

Želim se zahvaliti svome mentoru dr. sc. Hrvoju Nikoliću na strpljenju te svim poticajima i komentarima.

[1] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton University Press, 2018.

[2] W. M. De Muynck. *Foundations of quantum mechanics, an empiricist approach*, volume 127. Springer Science & Business Media, 2006.

[3] H. Nikolic. Bohmian mechanics for instrumentalists. *arXiv preprint arXiv:1811.11643*, 2018.

[4] J. S. Bell. On the impossible pilot wave. *Foundations of Physics*, 12(10):989–999, 1982.

[5] D. Tong. *Lectures on Applications of Quantum Mechanics, http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/aqm/aqmnine.pdf*.

[6] P. R. Holland. *The quantum theory of motion: an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics*. Cambridge university press, 1995.

[7] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. *Physical Review*, 85(2):166–179, 1952.