

Stabilizacija optičkog rezonatora

Marin Đujić

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Mentor: dr. sc. Ticijana Ban
Institut za fiziku, Bijenička 46, Zagreb
(Dated: 22. siječnja 2021.)

U ovom radu bavili smo se stabilizacijom optičkog rezonatora u svrhu njegovog korištenja u eksperimentima kvantne optike. Opisana je fizika optičkog rezonatora, kao i tehnika stabilizacije. Rezonator je zatim izrađen, karakteriziran i stabiliziran te je spreman za daljnje korištenje u eksperimentima hlađenja atoma.

UVOD

Optički rezonator je sustav zrcala postavljen na takav način da se odbijanjem svjetlosti između njih stvaraju stojni valovi, gdje pojedini foton napravi mnogo ciklusa prije izlaska iz rezonatora. Jedna od najčešćih i najjednostavnijih izvedbi optičkog rezonatora jest tzv. Fabry-Pérot interferometar, kojega su razvili Charles Fabry i Alfred Pérot 1899. Fabry-Pérot interferometar se sastoji od dva ravna zrcala postavljena paralelno, te ga odlikuju veliki intenzitet transmisije i mali intenzitet refleksije za uski raspon frekvencija oko frekvencije rezonancije [1]. Osim Fabry-Pérot interferometra, danas su u upotrebi i konfiguracije koje sadrže konkavna zrcala. Ako se unutar rezonatora nalazi medij, do međudjelovanja s fotonom može doći prilikom svakog ciklusa njegovog kruženja, što povećava vjerojatnost međudjelovanja fotona s medijem.

Optički rezonatori mogu imati nekoliko primjena, poput filtriranja neželjenih modova laserskog zračenja, frekventne stabilizacije lasera te pojačanja međudjelovanja s medijem unutar rezonatora. U kvantnoj optici optički rezonatori se koriste za zarobljavanje i upravljanje pojedinim atomima, kao i za samo-organizaciju i hlađenje atoma. U ovom seminaru bavili smo se izradom, stabilizacijom i karakterizacijom optičkog rezonatora koji će se koristiti za istraživanje nove metode laserskog hlađenja atoma smještenih unutar rezonatora. Uobičajena metoda hlađenja atoma koristi tzv. magneto-optičku stupicu (engl. *magneto-optical trap*, MOT), koja se temelji na međudjelovanju laserskog zračenja i atoma u gradijentu magnetskog polja. Atomi se hlade izmjenom količine gibanja između atoma i fotona u procesu apsorpcije i spontane emisije. Metoda koristi Dopplerov efekt da bi se osiguralo da samo atomi koji se gibaju prema laserskoj zraci apsorbiraju svjetlost, čime se smanjuje njihova brzina. Zbog toga se ta metoda naziva još i Dopplerovo hlađenje. Da bismo ohladili 3D plin, atomi se smještaju u presjecište tri para suprotno-propagirajućih zraka koji se namještaju u ortogonalnim smjerovima. Ova metoda naišla je na široku primjenu u istraživanjima, poput kvantnih simulacija [2], atomske interferometrije [3], ultrahladne kemije [4], proizvodnje Bose-Einsteinovog kondenzata [5]

i atomskih satova [6]. Usprkos širokoj primjeni, Dopplerovo hlađenje ograničeno je na mali broj elemenata periodnog sustava, preciznije na alkalijske, zemnoalkalijske metale te plemenite plinove [7]. Kako bi hlađenje bilo efikasno, prilikom procesa apsorpcije i emisije fotona iz laserske zrake potrebno je da se atom iz pobuđenog energijskog stanja vrati u isto osnovno stanje iz kojeg je bio pobuđen apsorpcijom fotona, tj. za efikasno hlađenje potrebni su tzv. zatvoreni energijski prijelazi. U slučaju da se atom relaksira u neko drugo osnovno stanje, on ispada iz ciklusa hlađenja budući da lasersko zračenje ne veže to novo stanje s pobuđenim, a time se atom više ne može hladiti. Drugi problem nastaje zbog činjenice da postoje atomi koji imaju zatvorene prijelaze u UV spektralnom području, gdje nema dostupnih lasera kontinuiranog zračenja.

Upravo zbog navedenih ograničenja Dopplerovog hlađenja, aktivno se istražuju nove metode hlađenja atoma. Jedna od tih metoda je i rezonatorom potpomognuto hlađenje atoma. Ukoliko za hlađenje pokušamo iskoristiti rezonator, fizika hlađenja se mijenja. Dinamika sustava tada je dominantno određena optičkim rezonatorom, a atomi se ponašaju kao polarizabilne čestice koji raspršuju svjetlost unutar rezonatora. Takva metoda hlađenja ne oslanja se na unutarnju energijsku strukturu atoma, što omogućuje hlađenje atoma bez zatvorenih prijelaza, ali i elemenata s kompleksnijom energijskom strukturom. Za efikasno hlađenje bitno je precizno ugoditi frekvenciju laserskog zračenja u odnosu na rezonanciju moda rezonatora. Stoga, kako bi hlađenje atoma u rezonatoru bilo efikasno, nužno je dobro karakterizirati optički rezonator i osigurati frekventnu stabilnost između lasera i rezonatora. Cilj ovog seminara bio je proučiti fiziku optičkog rezonatora te opisati izradu, karakterizaciju i stabilizaciju optičkog rezonatora koji će se koristiti za hlađenje atoma na Institutu za fiziku. U sljedećim poglavljima detaljnije ćemo opisati svojstva optičkih rezonatora, kao i metode frekventne stabilizacije lasera i rezonatora.

GEOMETRIJA LASERSKE ZRAKE

Paraksijalnost

Geometrijska optika je uvelike pojednostavljena uvođenjem skoro paralelnih zraka, stoga istu aproksimaciju možemo koristiti i u valnoj optici. Paraksijalni valovi su oni koji se propagiraju blizu optičke osi te u njenom smjeru. Za električno polje koje se propagira u pozitivnom smjeru z-osi imamo:

$$E^+(\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{ikz}, \quad (1)$$

gdje je $\psi(\vec{r})$ envelope, a e^{ikz} val nosilac. Kako bi val zadovoljio uvjet paraksijalnosti, envelope ψ mora se sporo mijenjati na skali valne duljine vala kojeg promatramo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \ll \frac{\psi}{\lambda} \approx k\psi. \quad (2)$$

Ako ovo uvrstimo u Helmholtzovu jednadžbu:

$$(\nabla^2 + k^2) E^+ = 0, \quad (3)$$

dobivamo sljedeću jednadžbu za propagaciju vala:

$$\left(\nabla_T^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0, \quad (4)$$

gdje je ∇_T^2 transverzalni laplasijan:

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Možemo zanemariti član $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ zbog uvjeta spore promjene envelope, pa konačno dobivamo paraksijalnu valnu jednadžbu:

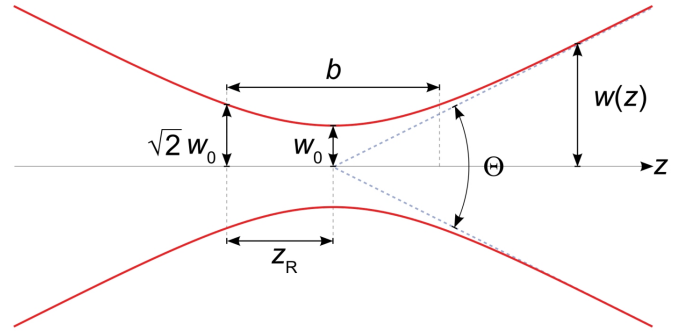
$$\left(\nabla_T^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi = 0. \quad (6)$$

Gaussova zraka

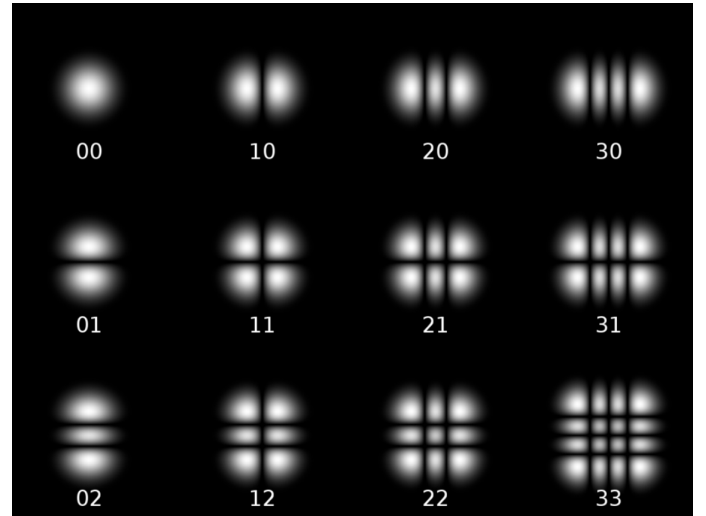
Ovisno o simetriji sustava, valna jednadžba 6 može biti zadovoljena samo za određene transverzalne modove svjetlosti. U slučaju cilindrične simetrije, prikladan potpuni skup rješenja zadovoljavaju Laguerre-Gaussovi modovi (oznaka TEM_{pl}), a u slučaju pravokutne imamo Hermite-Gaussove modove (oznaka TEM_{mn}). Distribucija intenziteta transverzalnih modova prikazana je na slici 2 za slučaj Hermite-Gaussovih modova i na slici 3 za slučaj Laguerre-Gaussovih modova. TEM_{00} je za oba slučaja jednak i može se opisati jednadžbom [8]:

$$E^+(\vec{r}) = E_0^+ \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(ikz - i\psi(z) + \frac{ikr^2}{2R(z)}\right), \quad (7)$$

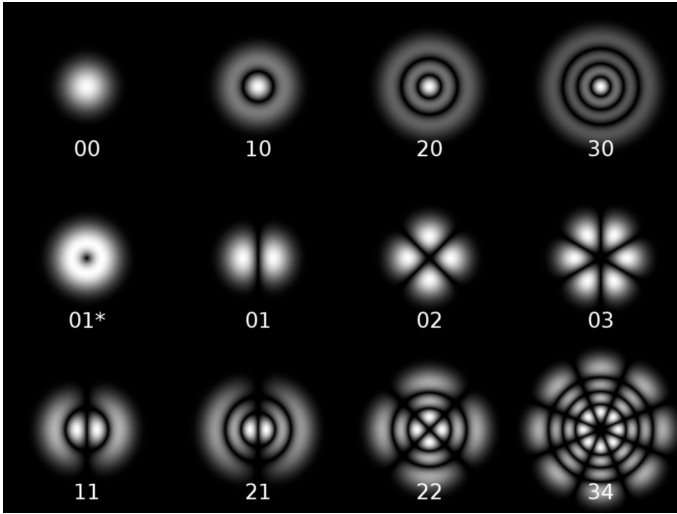
gdje je $w(z)$ prostorno ovisna transverzalna veličina zrake (struk zrake), w_0 njen minimum, $R(z)$ radijus zakrivljenosti valne fronte, a $\psi(z) = \arctan(z/z_0)$ dodatni fazni član (tzv. Gouy faza), pri čemu je z_0 Rayleighjeva duljina, tj. udaljenost od centra na kojoj se površina presjeka zrake udvostruči. Veličina struka laserske zrake, kao i Rayleighjeva duljina, određeni su rubnim uvjetima geometrije u kojoj nastaje takva laserska zraka, tj. geometrijom laserskog rezonatora koji podržava takav Gaussijanski mod. Prvi eksponencijalni član u jednadžbi 7 ukazuje da električno polje ima profil gausijana, odakle ovakav profil zrake dobija ime Gaussova (Gaussijanska) zraka (slika 1). Velik broj lasera emitira Gaussovu zraku, a podržava je i konfokalni rezonator, o kojem će više riječi biti kasnije.



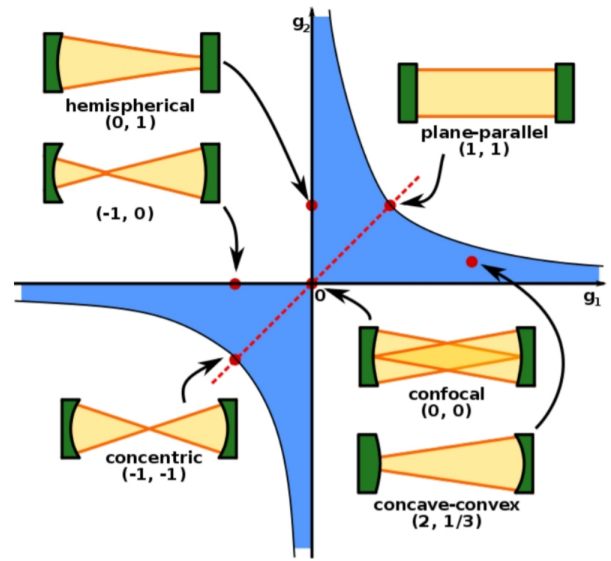
Slika 1. Shematski prikaz Gaussove zrake. Na slici vidimo kako se envelope na najužem dijelu fokusira u struk w_0 . [9]



Slika 2. Primjeri distribucije intenziteta za neke Hermite-Gaussove modove. [10]



Slika 3. Primjeri distribucije intenziteta za neke Laguerre-Gaussove modove. [10]



Slika 4. Dijagram stabilnosti različitih konfiguracija rezonatora. Plavim područjem označene su stabilne konfiguracije. [12]

FIZIKA OPTIČKIH REZONATORA

Stabilnost rezonatora

Stabilnost rezonatora je pojam koji označava vjerojatnost da transmitirana zraka ostane blizu optičke osi dolazne zrake nakon mnogo refleksija. Ukoliko je konfiguracija rezonatora nestabilna, doći će do povećanja promjera zrake unutar rezonatora dok ne preraste veličinu zrcala, čime takva zraka izlazi iz rezonatora i ne može se dalje koristiti. Već spomenuti Fabry-Pérot rezonator nije stabilan zbog svoje konfiguracije: ravna zrcala zahtijevaju da odstupanja kolimacije zrake i paralelnost zrcala budu ispod par kutnih sekundi za kvalitetan rad uređaja. Radi veće stabilnosti, koriste se rezonatori sa zakrivljenim zrcalima koji toleriraju veća odstupanja u paralelnosti dvaju zrcala. Ako definiramo parametar stabilnosti $g_{1,2}$ koji je definiran preko radijusa zakrivljenosti zrcala $R_{1,2}$ i njihove međusobne udaljenosti L preko relacije [11]:

$$g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}, \quad (8)$$

rezonator je stabilan kada je zadovoljena relacija:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1. \quad (9)$$

Različite konfiguracije rezonatora daju različite faktore stabilnosti, što je vidljivo iz slike 4.

Planarni rezonator

Kao ogledni primjer rada optičkog rezonatora, možemo uzeti najjednostavniju konfiguraciju dvaju ravnih zrcala na udaljenosti L koja savršeno reflektiraju upadnu svjetlost. U ovom slučaju unutar rezonatora može nastati samo val kojemu je promjena faze kroz jedan ciklus (prolaz kroz rezonator od zrcala 1 do zrcala 2, zatim odbijanje od zrcala 2 i povratak do zrcala 1) neki višekratnik od 2π :

$$2kL = q \cdot 2\pi; \quad q = 1, 2, 3... \quad (10)$$

Iz ovoga možemo pronaći dopuštene valne brojeve k_q , valne duljine λ_q i frekvencije ω_q koristeći se jednadžbama $\lambda_q = \frac{2\pi}{k_q}$ i $\omega_q = ck_q$:

$$k_q = \frac{\pi q}{L}; \quad \lambda_q = \frac{2L}{q}; \quad \omega_q = \frac{\pi c q}{L}. \quad (11)$$

Odavde vidimo da se spektar optičkog rezonatora sastoji od niza jednako udaljenih spektralnih linija koje nazivamo rezonatorski modovi. Razlika frekvencije između dva susjedna moda naziva se engl. *free spectral range*, a označava se kraticom f_{FSR} :

$$f_{FSR} = \frac{\omega_{q+1} - \omega_q}{2\pi} = \frac{c}{2L}, \quad (12)$$

i određena je duljinom rezonatora.

Gubitci u optičkom rezonatoru

Realna zrcala nisu savršeno reflektivna, stoga se pri svakom ciklusu refleksije smanjuje amplituda svjetlosnog

vala, tj. dolazi do gubitka fotona iz rezonatora. Gubici uzrokuju širenje rezonatorskih modova, kao i u slučaju gušenog oscilatora. Ako je koeficijent refleksije zrcala r , električno polje nakon $(n+1)$ refleksija možemo prikazati kao:

$$E_{n+1} = r e^{i2kL} E_n. \quad (13)$$

Ukupno električno polje će tada biti suma svih reflektiranih polja:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n = \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{i2kL})^n E_0 = \frac{E_0}{1 - r e^{i2kL}}. \quad (14)$$

Možemo pretpostaviti da je koeficijent r realan jer bi u slučaju da je imaginaran njegova kompleksna faza samo dodala na efektivnu duljinu rezonatora L . Kako znamo da je intenzitet proporcionalan kvadratu električnog polja, koristeći relaciju (14) možemo doći do ukupnog intenziteta unutar rezonatora:

$$I = \frac{I_{max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(\pi\nu/f_{FSR})}, \quad (15)$$

gdje je intenzitet izražen preko frekvencije ν , maksimalnog intenziteta

$$I_{max} = \frac{I_0}{1 - r^2}, \quad (16)$$

i finese

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r}}{1 - r}, \quad (17)$$

koju uvodimo kao drugi bitan parametar za opis optičkog rezonatora, a određena je samo refleksivnošću zrcala. Iz jednadžbe (15) vidljivo je da pri prolasku lasera kroz optički rezonator može doći do povećanja intenziteta lasera u slučaju da frekvencija zrake odgovara frekvenciji moda rezonatora, i to za faktor finese.

Kako bismo odredili frekventne širine modova rezonatora, pogledat ćemo za koje frekvencije intenzitet iznosi $I_{max}/2$, tzv. FWHM (engl. *full width at half maximum*). U našem slučaju taj se uvjet svodi na:

$$\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\pi \frac{\nu_{FWHM}}{f_{FSR}}\right) = 1, \quad (18)$$

što je zadovoljeno za frekvencije

$$\nu_{FWHM} = \pm \frac{f_{FSR}}{\pi} \arcsin \frac{\pi}{2\mathcal{F}}, \quad (19)$$

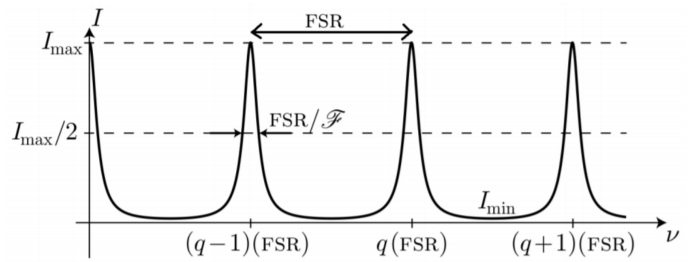
U eksperimentu primarno koristimo rezonatore vrlo visoke finese, stoga možemo koristiti aproksimaciju malih kuteva:

$$\nu_{FWHM} \approx \pm \frac{f_{FSR}}{\pi} \frac{\pi}{2\mathcal{F}} = \frac{f_{FSR}}{2\mathcal{F}}, \quad (20)$$

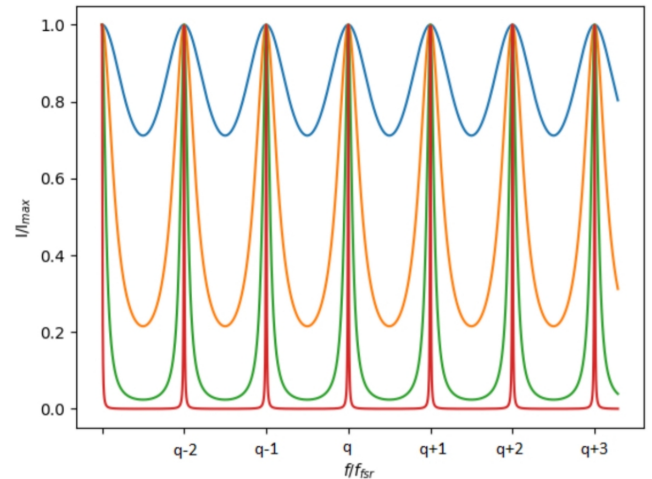
iz čega slijedi FWHM širinu rezonantnog moda:

$$\delta\nu_{FWHM} = \frac{f_{FSR}}{\mathcal{F}}. \quad (21)$$

Ovo je rezultat koji izravno povezuje frekventnu udaljenost rezonatorskih modova, refleksivnost zrcala i širinu modova, kao što je vidljivo na slici 5. Isto tako, dva nova parametra koja smo uveli tijekom razmatranja optičkog rezonatora, finesa i f_{FSR} , dovoljni su za njegovu karakterizaciju. Iz formule možemo vidjeti da povećavanjem finese smanjujemo širinu moda, zbog čega spektar izgleda sve sličnije Diracovim delta funkcijama, što utječe na spektar svjetlosti unutar rezonatora. Navedeno se može vidjeti iz slike 6.



Slika 5. Ovisnost intenziteta unutar rezonatora o frekvenciji. Iz slike možemo iščitati f_{FSR} i $\delta\nu_{FWHM} = f_{FSR}/\mathcal{F}$. [1]



Slika 6. Intenzitet u rezonatoru normaliziran za normalnu vrijednost za finesu 1 (plavo), 3 (narančasto), 10 (zeleno) i 100 (crveno). [13]

Broj ciklusa pojedinog fotona u rezonatoru određen je gubitcima u rezonatoru. Najveći gubici dolaze od transmisije kroz zrcala. Ukoliko za zrcala uzmemo koeficijente refleksije R_1 i R_2 , vjerojatnost opstanka fotona prilikom jednog ciklusa bit će $P = R_1 R_2$. Ostale efekte, poput apsorpcije na zrcalima, raspršenja zbog nesavršenosti

površine te konačne veličine zrcala, ne možemo opisati skroz jednostavno niti konzistentno, stoga ćemo redefiniirati finesu preko vjerojatnosti opstanka fotona P , koja će u tom slučaju uključivati sve efekte gubitka:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi P^{1/4}}{1 - \sqrt{P}}. \quad (22)$$

Vjerojatnost da se foton izgubi nakon jednog ciklusa u rezonatoru iznosi $(1 - P)$, stoga će vjerojatnost da je izgubljen nakon točno n ciklusa biti:

$$P(n) = P^{n-1}(1 - P). \quad (23)$$

Odavde možemo izračunati prosječan broj ciklusa koji će foton preživjeti:

$$\langle n \rangle = \sum_1^{\infty} nP(n) = \frac{1}{1 - P}. \quad (24)$$

Duljina rezonatora i brzina fotona su poznate konstante, tako da rezultat možemo izraziti koristeći jedinicu vremena umjesto broja ciklusa:

$$\tau_c = \frac{2L}{c} = \frac{1}{f_{FSR}}, \quad (25)$$

iz čega možemo dobiti prosječno vrijeme života za foton unutar rezonatora:

$$\tau = \langle n \rangle \cdot \tau_c = \frac{1}{f_{FSR}(1 - P)}. \quad (26)$$

Kao što smo već naveli, u eksperimentu većinom koristimo rezonatore visoke finese za koje će vrijediti $P \approx 1$, stoga možemo napraviti zamjene $P^{1/4} \approx 1$ i $(1 - P) \approx 2(1 - \sqrt{P})$ kako bismo napisali jednadžbu (26) koristeći izraz (22) kao:

$$\tau = \frac{\mathcal{F}}{2\pi f_{FSR}}, \quad (27)$$

iz čega dobivamo relaciju neodređenosti za rezonator:

$$\tau \cdot \delta\nu_{FWHM} = \frac{1}{2\pi}. \quad (28)$$

Još jedan koristan parametar jest faktor dobrote Q , koji označava "kvalitetu" oscilatora. Ukoliko fotoni žive prosječno vrijeme τ prije gubitka iz rezonatora, onda je stopa gubitka energije $1/\tau$, stoga za faktor dobrote možemo pisati:

$$Q = 2\pi\nu_q\tau, \quad (29)$$

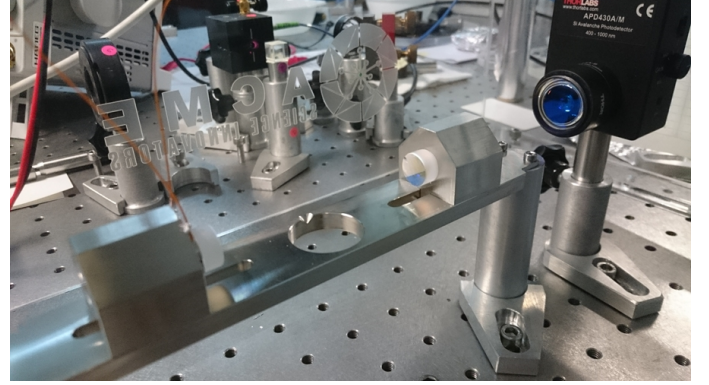
a koristeći relaciju neodređenosti (28) dobiti:

$$Q = q \frac{f_{FSR}}{\delta\nu_{FWHM}} = q\mathcal{F}. \quad (30)$$

gdje koristimo q iz jednadžbe (10). Kako je q relativno velik (10^6) zbog činjenice da je duljina rezonatora mnogo veća od valne duljine svjetlosti, zajedno s finesom ($10^2 - 10^5$), vidimo da je faktor dobrote vrlo velik. Kao rezultat toga, u literaturi se finesa često koristi kao parametar koji opisuje "kvalitetu" rezonatora umjesto faktora dobrote.

Konfokalni rezonator

Konfiguracija koju ćemo koristiti u eksperimentu sastoji se od dva zakrivljena zrcala jednakih radijusa zakrivljenosti čija je međusobna udaljenost upravo jednaka radijusu zakrivljenosti. Ovakva konfiguracija se naziva konfokalni rezonator (slika 7) i podržava Laguerre-Gaussove transverzalne modove.

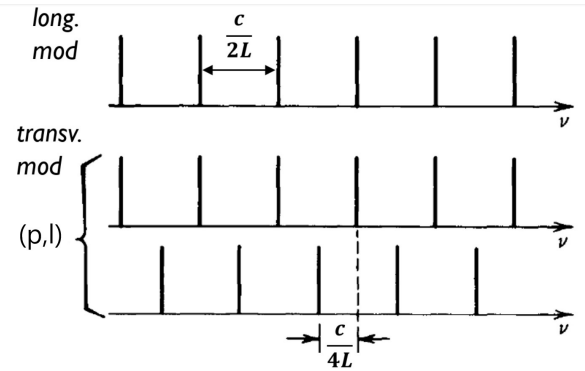


Slika 7. Konfokalni rezonator izrađen na Institutu za fiziku namijenjen hlađenju atoma.

Za općeniti stabilni rezonator imamo da su frekvencije različitih p, l transverzalnih modova različite, no u slučaju konfokalnog rezonatora grupirane su u dva skupa degeneriranih frekvencija:

$$f_{qpl} = f_{FSR} \left(q + \frac{1 + 2p + l}{2} \right), \quad (31)$$

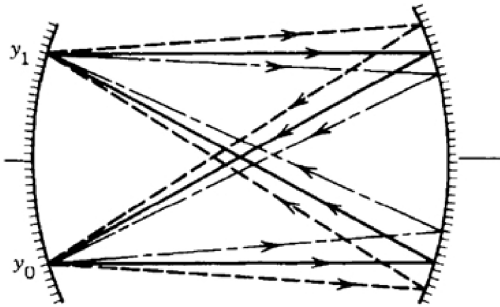
što možemo vidjeti i iz slike 8.



Slika 8. Frekvencije TEM_{qpl} modova konfokalnog rezonatora. Modovi su grupirani ovisno o parnosti sume $2p + l$.

Jedno od važnijih svojstava konfokalnog rezonatora jest njegova stabilnost te robusnost na ugađanje položaja laserske zrake. Nakon dva ciklusa refleksija, svaka zraka će se vratiti u točku iz koje je krenula, bez obzira na početni položaj i kut. Iz slike 9 uočavamo da necentralne zrake prolaze dva ciklusa prije povratka u početni

položaj, što zbog pobude viših TEM modova daje frekvenciju od $f_{FSR} = c/4L$ (slika 9, jednačba (31)). S druge strane, u interesu nam je koristiti Gaussovu zraku, gdje je pobuđen samo mod $p = l = 0$, a f_{FSR} je $c/2L$. Iz ovoga možemo zaključiti da prikladnim usklađivanjem geometrije laserske zrake i rezonatora možemo izdvojiti isključivo TEM₀₀ mod. Na slici 10 prikazana je transmi-

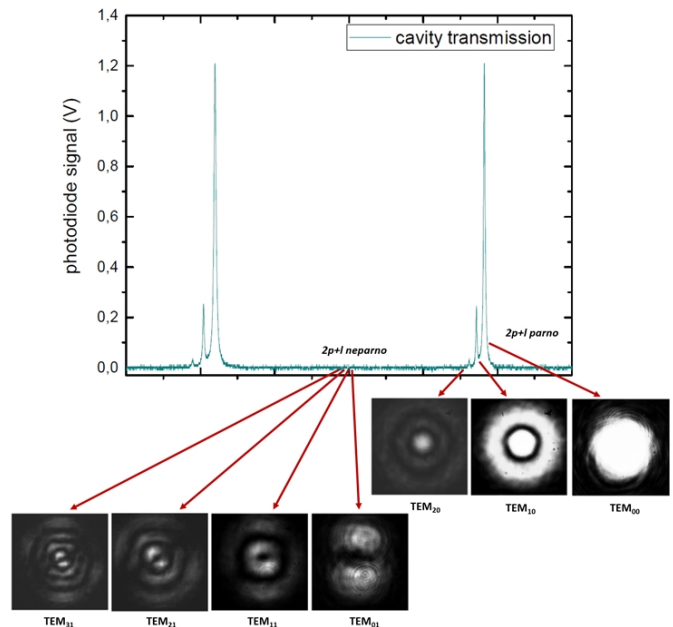


Slika 9. Ciklus necentralne zrake u konfokalnom rezonatoru. [11]

sija lasera kroz optički rezonator, te se jasno mogu vidjeti različiti longitudinalni i transverzalni modovi rezonatora. Ova slika je dobivena mijenjanjem duljine rezonatora za laser stalne frekvencije te mjerenjem intenziteta transmittirane svjetlosti CCD kamerom. Iz slike vidimo da postoji razlika u frekvenciji modova, koji bi se trebali slagati ukoliko koristimo jednačbu za savršeni konfokalni rezonator (31). U eksperimentu nije uvijek moguće postići da je udaljenost između zrcala jednaka radijusu njihove zakrivljenosti, stoga dolazi do blagog razdvajanja frekvencija tih modova. Iz toga slijedi da snimljene distribucije intenziteta potvrđuju teorijske rezultate izražene u jednačbama (6) i (31). Laserska zraka koja ulazi u rezonator ima konačan intenzitet, stoga je važno minimizirati prisutnost svih ostalih modova. Nažalost, zbog iznimne preciznosti potrebne za taj postupak, vrlo je teško postići da u rezonatoru preostane samo TEM₀₀ mod.

STABILIZACIJA OPTIČKOG REZONATORA

Rezonantna frekvencija moda ovisi o duljini rezonatora, stoga je važno stabilizirati duljinu rezonatora, koja se mijenja zbog promjene temperature ili mehaničkih vibracija. Promjena duljine rezonatora mijenja uvjet rezonancije lasera i rezonatora, što pri malim promjenama duljine dovodi do šuma na intenzitetu svjetlosti u rezonatoru, a kod velikih promjena duljine uzrokuje refleksiju lasera od rezonatora, tj. nedostatak laserskog svjetla u rezonatoru. Frekventna stabilizacija temelji se na aktivnoj usporedbi mjerene frekvencije (podložne fluktuacijama) i referentne frekvencije na koju svoj sustav želimo stabilizirati. Za to je potrebno generirati elek-



Slika 10. Transmisija lasera kroz približno konfokalni rezonator. Transmisija je mjerena fotodiodom, a transverzalni modovi CCD kamerom. Svaki TEM mod popraćen je slikom koja pokazuje njegovu distribuciju intenziteta. [14]

tronički, tzv. *error signal*, koji je proporcionalan razlici mjerene i referentne frekvencije. *Error signal* zatim se šalje na kontrolne elektroničke uređaje čiji je cilj stabilizirati naš šumoviti sustav tako da error signal bude jednak nuli. Kontrolni uređaji zato moraju imati dobar odziv na visoko- i niskofrekventne fluktuacije, kako bi pravovremeno *error signal* vratili natrag na nulu. Naravno, kontrolna elektronika mora djelovati na neki element sustava, kako bi imala što popraviti. U slučaju optičkog rezonatora, jedno od zrcala montirano je na piezoelektrični kristal, čija se duljina mijenja ovisno o naponu na kristalu. Drugim riječima, naponom se može kontrolirati duljina rezonatora, a time i frekvencija modova. Jedna od metoda generiranja *error signala* nužnog za stabilizaciju jest Pound-Drever-Hall (PDH) metoda, koja će biti detaljno opisana u sljedećem odlomku.

PDH tehnika stabilizacije

Referentna frekvencija na koju želimo zaključiti rezonator dobiva se iz refleksije svjetlosne zrake na ulaznom zrcalu rezonatora. Električno polje te zrake E_r ima komponentu koja je reflektirana od prvog zrcala te komponente koje se transmitiraju kroz ulazno zrcalo nakon jednog ili više obavljenih ciklusa refleksije unutar rezonatora. Ukupno reflektirano električno polje možemo izra-

ziti kao:

$$E_r = E_0 \left(r e^{i(\omega t + \pi)} + \sum_{n=1}^{\infty} t r^{2n-1} t e^{i(\omega t - 2n\omega L/c)} \right). \quad (32)$$

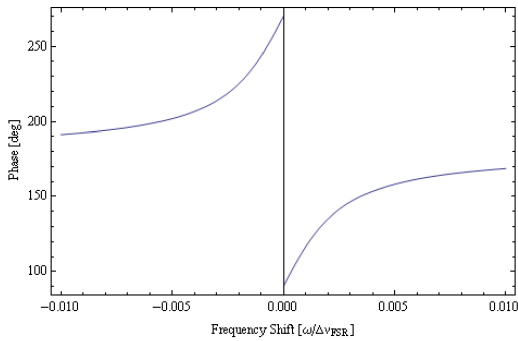
Izračunamo sumu u drugom članu:

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \frac{r (e^{-i\omega/f_{FSR}} - 1)}{1 - r^2 e^{-i\omega/f_{FSR}}}. \quad (33)$$

Iz ove jednadžbe sad možemo jednostavno izdvojiti faktor refleksije R :

$$R(\omega) = \frac{r (e^{-i\omega/f_{FSR}} - 1)}{1 - r^2 e^{-i\omega/f_{FSR}}}. \quad (34)$$

Analizom dobivenog izraza možemo ustanoviti da će za vrijednosti oko $\omega = 0$ realni dio koeficijenta refleksije biti simetričan. *Error signal* ne smije biti simetričan, jer to znači da bi imao istu vrijednost neovisno jesmo li ispod ili iznad referentne frekvencije, a tada kontrolni sustav ne bi znao u kojem smjeru treba unositi korekcije. Zato je bitno da je *error signal* asimetričan, tj. da ima jedan predznak za vrijednosti ispod referentne frekvencije, a drugi predznak za vrijednosti iznad. Međutim, imaginarni dio koeficijenta refleksije daje antisimetričnu funkciju za iste vrijednosti, stoga je ona idealna za daljnje korištenje (slika 11). U ovoj tehnici, referentna frekvencija je rezonantna frekvencija moda rezonatora.



Slika 11. Faza koeficijenta refleksije u ovisnosti o frekvencijskom pomaku od maksimuma. [16]

Kako bismo došli do konačnog signala koji će nam služiti za stabilizaciju, kao prvi korak uvodimo faznu modulaciju laserske zrake frekvencijom modulacije Ω pomoću elektro-optičkog modulatora (EOM). Promjenom napona na EOM kristalu mijenja se fazna razlika između zraka koje se propagiraju duž dvije ortogonalne osi kristala. Ako postavimo EOM ispred rezonatora, električno polje koje će djelovati s rezonatorom imat će oblik:

$$E_{inc} = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin(\Omega t))}. \quad (35)$$

Za male amplitude modulacije β možemo raspisati izraz koristeći Besselove funkcije:

$$\begin{aligned} E_{inc} &\approx E_0 (J_0(\beta) + 2iJ_1(\beta) \sin(\Omega t)) e^{i\omega t} \\ &= E_0 (J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}). \end{aligned} \quad (36)$$

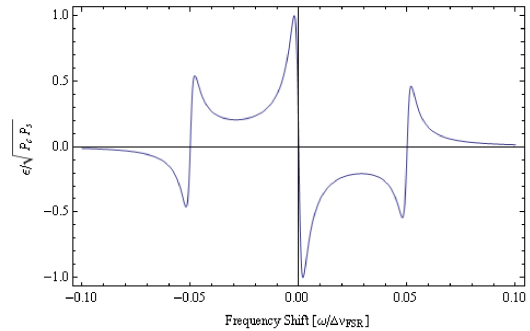
Dobiveni signal ima tri komponente različitih amplituda i frekvencija. Komponente proporcionalne s $J_1(\beta)$ nazivaju se engl. *sidebandovi* i odmaknute su za modulacijsku frekvenciju Ω od vala nosioca frekvencije ω . Nakon fazne modulacije zraka dolazi do rezonatora i reflektira se, pri čemu se amplitude modificiraju koristeći faktor refleksije iz (34):

$$\begin{aligned} E_{inc} &= E_0 (R(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + R(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - \\ &\quad - R(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}). \end{aligned} \quad (37)$$

Kako nismo u mogućnosti izravno mjeriti električno polje reflektirane zrake, mjerimo intenzitet reflektirane svjetlosti koja upada na fotodiodu $P_{refl} \propto |E_{refl}|^2$. Definirajmo P_0 i P_1 kao snage koje će odgovarati električnim poljima vala nosioca frekvencije ω , tj. *sidebandova* frekvencija $\omega \pm \Omega$. Ukupna snaga reflektirane zrake tada iznosi:

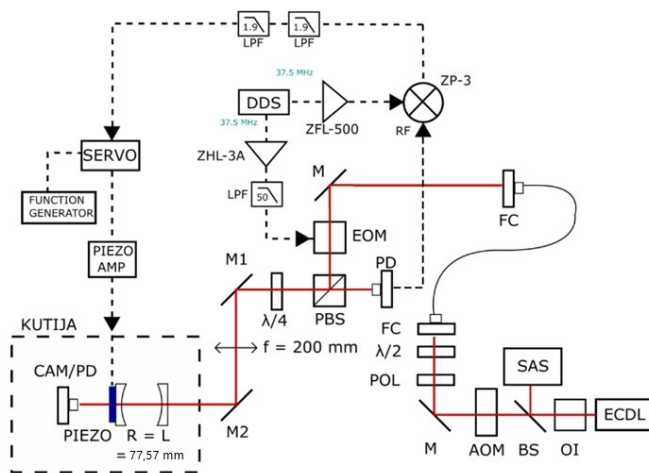
$$\begin{aligned} P_{refl} &= P_0 |R(\omega)|^2 + P_1 (|R(\omega + \Omega)|^2 + |R(\omega - \Omega)|^2) \\ &\quad + 2\sqrt{P_0 P_1} \operatorname{Re} [R(\omega) R^*(\omega + \Omega) - R^*(\omega) R(\omega - \Omega)] \cos(\Omega t) \\ &\quad + 2\sqrt{P_0 P_1} \operatorname{Im} [R(\omega) R^*(\omega + \Omega) - R^*(\omega) R(\omega - \Omega)] \sin(\Omega t) \\ &\quad + \mathcal{O}(2\Omega). \end{aligned} \quad (38)$$

Vidimo da snaga reflektirane zrake ima konstantnu (DC) komponentu, dvije oscilirajuće komponente te više redove. Zanima nas imaginarna komponenta $R(\omega)$, stoga ćemo izdvojiti član koji sadrži $\sin(\Omega t)$ iz intenziteta tako što ćemo pomnožiti P_{refl} s modulacijskim signalom pomaknute faze, $\sin(\Omega t + \phi)$, tj. demoduliramo originalni signal. Pomaknuta faza modulacijskog signala služi kao način ugađanja frekventnog oblika konačnog signala. Izdvajanjem DC komponente iz pomnoženog signala dobivamo željeni PDH *error signal* prikazan na slici 12.



Slika 12. Ovisnost PDH *error signala* za $\Omega = 0.05 f_{FSR}$. Vidimo da je signal asimetričan, strm i linearan za male frekventne odmake od rezonancije, što je pogodno za dobar *error signal*. [16]

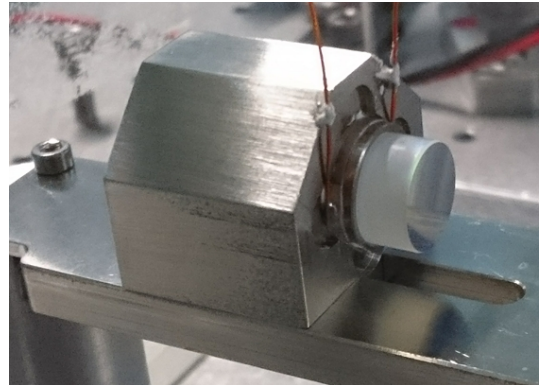
EKSPERIMENTALNI POSTAV



Slika 13. Shema eksperimentalnog postava. [13]

Shema eksperimentalnog postava za generaciju *error signal* PDH tehnikom i njegovog korištenja za stabilizaciju nalazi se na slici 13. Prateći zraku, možemo objasniti kako stabilizacija rezonatora funkcionira u postavu. Laser prvo emitira zraku, koja prolazi kroz sklop za stabilizaciju i pripremu za prolaz kroz optičko vlakno. Pritom prolazi kroz akusto-optički modulator (AOM), koji služi naglom prekidu emisije laserske zrake prema rezonatoru. Nakon izlaska iz optičkog vlakna, zraka se odbija od zrcala i ulazi u elektro-optički modulator Qubig EO-38L3-NIR. Fazna modulacija unutar EOM-a obavlja se koristeći *Direct Digital Synthesizer* Novatech DDS9m (DDS). Iz njega dobivamo signal frekvencije 37,5 MHz, koji prolazi kroz pojačalo i zatim prolazi kroz *low pass filter* namješten na 50 MHz radi uklanjanja nepoželjnih frekvencija. Nakon što se u EOM-u stvori novi signal s pripadajućim *sidebandovima*, zraka se reflektira na polarizacijski djelitelj signala (PBS), a zatim prolazi kroz $\lambda/4$ pločicu. Jednom kada se signal odbije od ulaznog zrcala rezonatora, ponovno prolazi kroz $\lambda/4$ pločicu, što zakreće ukupnu polarizaciju zrake za 90° i time omogućuje da zraka prođe kroz PBS i detektira se fotodiodom Thorlabs PDA10A-EC (PD). Elektronički signal iz fotodiode dovodi se na jedan ulaz miksera, dok se na drugi ulaz dovodi signal modulacije oblika $\sin(\Omega t)$. Rezultirajući signal prolazi kroz dva *low pass filter* frekvencija 1,9 MHz da bi se eliminirao oscilirajući dio te izdvojio *error signal* i konačno ulazi u servo kontroler New Focus LB1005 (SERVO), koji je kontrolni uređaj za stabilizaciju. U sklopu tog uređaja imamo tzv. PI kontroler (engl. *Proportional Integral*). P i I članovi opisuju kontrolni napon koji servo generira za stabilizaciju frekvencije. P označava kontrolni napon koji je proporcionalan naponu *error signal*, dok I označava kontrolni sig-

nal koji je proporcionalan integralu *error signal* u vremenu. Optimalna kombinacija ta dva kontrolna signala omogućuje stabilizaciju rezonatora. Korekcije se obavljaju preko piezoelementa spojenog na jedno od zrcala. Mijenjanjem napona mijenja se duljina piezokristala, što mijenja duljinu rezonatora i tako korigira sustav. Fotografija izrađenog rezonatora prikazana je na slici 7, dok je na slici 14 prikazan detalj na kojem se vidi ogledalo s piezokristalom.



Slika 14. Izgled konfokalnog rezonatora korištenog u eksperimentu. Na slici vidimo piezoelement koji je postavljen između nosača i jednog od zrcala.

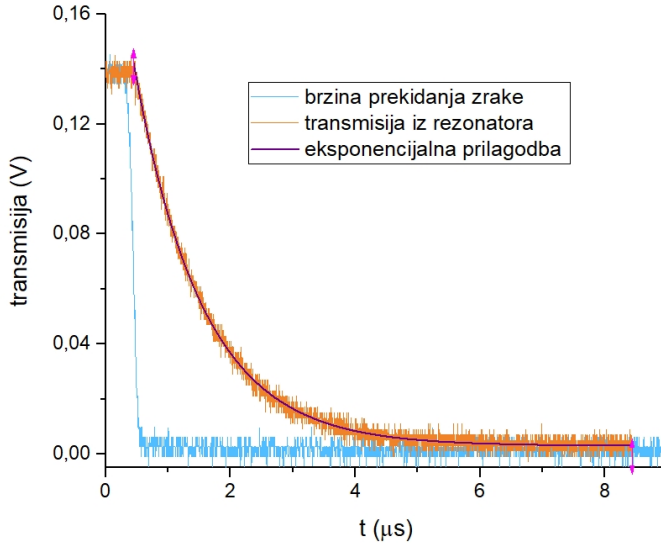
REZULTATI

Nakon što je rezonator složen i postavljen u visokovakuumsku komoru u kojoj se stvaraju hladni atomi, bilo je potrebno izvršiti osnovnu karakterizaciju rezonatora. Ona je obuhvaćala mjerenje transmisije svjetlosti kroz rezonator, snimanje dobivenog *error signal* (slika 16), te mjerenje finese rezonatora tehnikom eng. *cavity ring down* (slika 15). Prije testiranja funkcioniranja eksperimentalnog postava, prvo se pristupilo karakterizaciji optičkog rezonatora u vakuumskoj komori (slika 7). Laserska zraka je prvo prekinuta koristeći AOM, te se brzina prekidanja zrake mjerila fotodiodom postavljenom ispred rezonatora. Rezultat ovog postupka je uvjetovan ne samo brzinom okidanja AOM-a, već i brzinom reakcije fotodiode, i služi nam kao referentna vrijednost za daljnja mjerenja. Fotodiode je zatim postavljena iza rezonatora te je mjereno pad intenziteta transmitirane zrake iz rezonatora nakon prekidanja AOM-om. Usporedbom vremenske ovisnosti ovog mjerenja s referentnom vrijednosti vidimo da transmisija iz rezonatora traje dulje vrijeme (slika 15). Pad intenziteta možemo opisati eksponencijalnom funkcijom čiji je period prosječni život fotona unutar rezonatora τ iz jednadžbe (27). Algebarskim manipulacijama jednadžbe (27) te korištenjem definicije za f_{FSR} iz Jednadžbe (12), možemo dobiti izraz za finesu

koristeći mjerljive podatke:

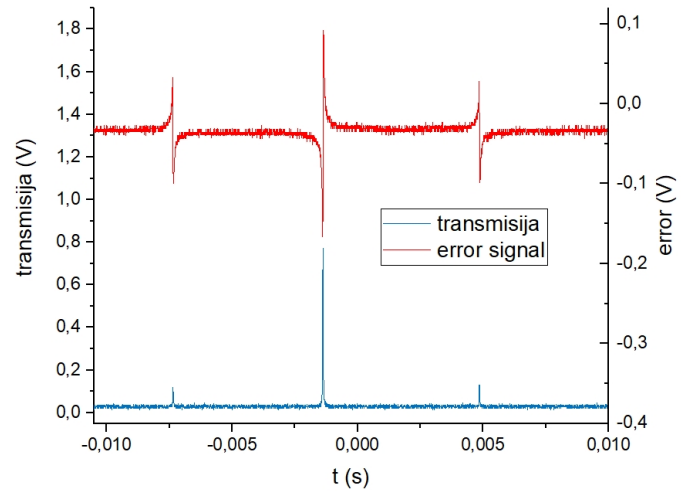
$$\mathcal{F} = \frac{c \cdot \pi \cdot \tau}{L} \quad (39)$$

Na graf intenziteta transmitirane zrake iz rezonatora na slici 15 napravljen je eksponencijalni fit kako bi se ustanovilo prosječni život fotona unutar rezonatora τ . Uz izmjereni $\tau = 1,093 \pm 0,003 \mu\text{s}$ i s duljinom rezonatora $L = 7,757 \text{ cm}$, izračunata je vrijednost finese $\mathcal{F} = 13270$.



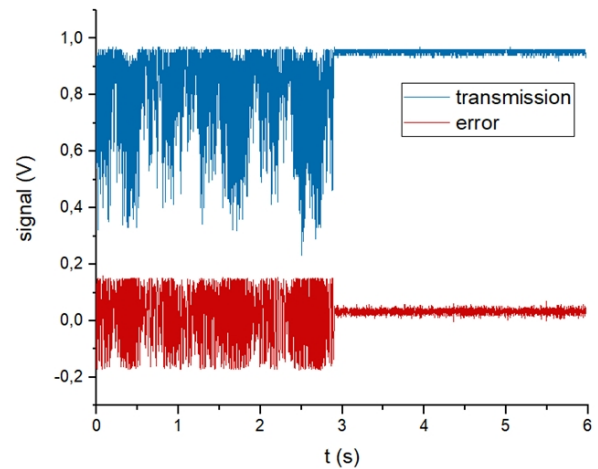
Slika 15. Primjer *ring down* grafa. Na slici je vidljiva vremenska ovisnost intenziteta laserske zrake nakon prekidanja AOM-om te vremenska ovisnost intenziteta laserske zrake unutar rezonatora nakon prekidanja AOM-om. [13]

Finesa je mjerena za već stabilizirani rezonator kako bi se rezonancija održala tijekom mjerenja. Tijekom provjere je izmjeren frekventni spektar transmitirane svjetlosti zajedno s *error signalom*, kao i sposobnost stabiliziranja preko *error signala*. Na slici 16 vidljivi su frekventni spektri transmitiranog signala te *error signala*. Transmitirani signal ima jasan i vrlo uzak vrh intenziteta, bez pobuđenih viših modova, iz kojeg vidimo da su laser i rezonator dobro namješteni te da je finesa rezonatora visoka, kao i par manjih vrhova simetrično udaljenih od glavnog vrha, koje smo dodali koristeći EOM. *Error signal* ima željeni izgled, s asimetričnim signalom koji je veoma strm oko frekvencije rezonatorskog moda. Iako *error signal* treba imati iznos napona jednak nuli na frekvenciji samog vrha transmitirane zrake, zbog nesavršenosti elektronike koja se koristi prilikom eksperimenta ukupni signal je blago pomaknut prema negativnim vrijednostima napona, što se uzima u obzir prilikom stabilizacije.



Slika 16. Izgled frekventnog spektra transmitiranog signala te *error signala*. Na transmitiranom signalu su jasno vidljivi *sidebandovi* dobiveni prolaskom kroz EOM, dok je *error signal* nalik željenom.

Slika 17 prikazuje izgled transmitiranog signala i *error signala* u vremenu prije (*lock off*) i nakon uključivanja aktivne stabilizacije (*lock on*). Vanjski faktori, poput mehaničkih vibracija ili promjene temperature, značajno utječu na signal ukoliko nema stabilizacije te je u sustav uveden značajan šum. Uključivanjem aktivne stabilizacije reguliramo frekvenciju signala koristeći aparaturu koja koristi *error signal* kao referencu, što u eksperimentu doprinosi značajnom smanjenju šuma.



Slika 17. Vremenska stabilnost transmitiranog i *error signala* bez aktivne stabilizacije (do treće sekunde) i uz aktivnu stabilizaciju (od treće sekunde). Vidimo naglu promjenu u izgledu signala odmah nakon uključivanja stabilizacije.

Ovim mjerenjima je ujedno i potvrđeno da je eksperimentalni postav dobro složen te da se ovom metodom može uspješno stabilizirati optički rezonator.

ZAKLJUČAK

U ovom seminaru proučavana je stabilizacija visoko-refleksivnog optičkog rezonatora na frekventno-stabilizirani laser. Poblize je opisana Gaussova zraka kao temeljni mod korišten za optičke rezonatore. Kroz seminar je objašnjena fizika optičkih rezonatora kroz kriterije stabilnosti, rezonantne frekvencije za različite modove te moguće gubitke sustava na primjerima Fabry-Pérot i konfokalnog rezonatora. Kao ključni proces u stabilizaciji, detaljno je razrađena PDH metoda stabilizacije te je prikazano njeno funkcioniranje u eksperimentu. Kao konačni rezultat, prikazani su rezultati osnovne karakterizacije rezonatora kao što su mjerenje finese i frekventne udaljenosti rezonatorskih modova.

-
- [1] Steck, Daniel A. *Classical and Modern Optics*, <http://steck.us/teaching> (revision 1.7.4, 6 July 2017)
- [2] C. Gross and I. Bloch, *Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices*, *Science* **357**, 995 (2017)
- [3] K. Bongs, M. Holynski, J. Vovrosh, P. Bouyer, G. Condon, E. Rasel, C. Schubert, W. P. Schleich, and A. Roura, *Taking atom interferometric quantum sensors from the laboratory to real-world applications*, *Nat Rev Phys* **1**, 731 (2019)
- [4] M.-G. Hu, Y. Liu, D. D. Grimes, Y.-W. Lin, A. H. George, R. Vexiau, N. Bouloufa-Maafa, O. Dulieu, T. Rosenband, and K.-K. Ni, *Direct observation of bimolecular reactions of ultracold KRb molecules*, *Science* **366**, 1111 (2019)
- [5] D. C. Aveline, J. R. Williams, E. R. Elliott, C. Dutenhof-fer, J. R. Kellogg, J. M. Kohel, N. E. Lay, K. Oudrhiri, R. F. Shotwell, N. Yu, and R. J. Thompson, *Observation of Bose-Einstein condensates in an Earth-orbiting research lab*, *Nature* **582**, 193 (2020)
- [6] T. L. Nicholson, S. L. Campbell, R. B. Hutson, G. E. Marti, B. J. Bloom, R. L. McNally, W. Zhang, M. D. Barrett, M. S. Safronova, G. F. Strouse, W. L. Tew, and J. Ye, *Systematic evaluation of an atomic clock at 2×10^{-18} total uncertainty*, *Nat Commun* **6**, 6896 (2015)
- [7] H. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping* (Springer, New York, NY, USA, 1999).
- [8] Gaussian Beam https://www.rp-photonics.com/gaussian_beams.html
- [9] Gaussian Beam https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_beam
- [10] Transverse TEM modes Gamma Rays, Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Transverse_mode
- [11] H. Weber *Laser Resonators and Beam Propagation* (Springer, 2005.)
- [12] Optical Cavity https://en.wikipedia.org/wiki/Optical_cavity
- [13] M. Vilić, *Hladni atomi u višedomnom optičkom rezonatoru*, diplomski rad, Zagreb, 2019.
- [14] M. Kruljac, privatna komunikacija
- [15] D. Z. Anderson, *Alignment of resonant optical cavities*, *Appl. Opt.* **23**, 2944 (1984)
- [16] M. Nickerson, *A review of Pound-Drever-Hall laser frequency locking*, <http://jila1.nickersonm.com/papers/PDH%20Locking%20Review.pdf> (2. 7. 2019.)