The no-boundary proposal

Mario Tanfara*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 24. siječnja 2021.)

Izvodimo Diracov formalizam integrala po putevima u slučaju jednodimenzionalnog kvantnog sustava. Nakon toga nalazimo lagranžijan i početne uvjete koji su prikladni za gravitacijsku silu. Većinu seminara se upoznajemo s matematičkim alatom, tek na kraju povlačimo analogiju da bi dobili gravitacijski integral po putevima. Zbog autorovog ograničenog iskustva vrlo ukratko komentiramo "no-boundary" prijedlog Hartlea i Hawkinga, te neke svježe, povezane rezultate.

SADRŽAJ

* mtanfara@dominis.phy.hr

I. UVOD I NOTACIJA

U kvantnoj teoriji sustave opisujemo vektorima u Hilbertovom prostoru $\mathscr{H}$, a fizikalna polja kao operatore na $\mathscr{H}$ koji su definirani u svakoj točki prostorvremena. Ali, čak i za slobodno polje, izrazi za operatore polja nemaju matematičkog smisla u svakoj točki prostorvremena, već se moraju interpretirati kao distribucije na prostorvremenu. Ovo je direktno povezano s činjenicom da ni mjerenja fizikalnih veličina ne možemo vršiti u jednoj točki, već uvijek pričamo o usrednjenju polja po nekoj domeni prostorvremena. U jednostavnom slučaju slobodnih polja ipak se može konstruirati dobro definirana kvantna teorija polja. Uključimo li interakcije polja u razmatranje nailazimo na produkte operatora polja u istoj točki prostorvremena, koji matematički nemaju smisla. Ovo se tretira na način da radimo perturbativni račun dobro definirane slobodne teorije polja, pa rješenja za fizikalne veličine dobijamo kao red potencija u konstanti vezanja specifične teorije. Naravno u općenitom slučaju individualni članovi su divergentni, jer vezana teorija nije dobro definirana. Oni od vas koji su išli na izborne predmete o teoriji polja upozanti su s nekim renormalizacijskim metodama kojima se tretiraju takvi divergentni doprinosi. Radi ovoga svi fizikalni rezultati koje teorija predviđa u biti ovise o renormalizaciji i naposlijetku parametrima koje uvodimo u tom procesu. Ako nam se posreći i konačni rezultati ispadnu neovisni, odnosno da su jedini konačni parametri oni koji su bili prisutni i za slobodni slučaj (masa, naboj ...) onda se teorija naziva *renormalizabilnom*. Kvantna elektrodinamika, Weinberg-Salamova elektroslaba teorija i kvantna kromodinamika su primjeri takvih teorija. Mogli ste primjetiti da kvantne teorije pretpostavljaju fiksnu, ravnu pozadinsku geometriju, Euklidski prostor u kvantnoj mehanici, odnosno prostorvrijeme Minkowskog u teorijama polja. Gravitacijski slučaj se bitno razlikuje, jer bi metrika g_{ab} trebala biti naše kvantno polje, ali isto tako definira i geometriju na kojoj razmatramo to polje koja postaje i dinamična.

U potpunoj teoriji metrika će biti vezana za materiju na njoj koju znamo tretirati kvantnom teorijom, možda samo da tretiramo gravitaciju klasično i uzmemo klasični limes za polja materije, pa bi za kvantnu verziju Einsteinove jednadžbe imali

$$G_{ab} = 8\pi G \langle \hat{T}_{ab} \rangle \quad ,$$

gdje je $\langle \hat{T}_{ab} \rangle$ očekivana vrijednost operatora energije i impulsa u određenom kvantnom stanju. Na ovaj način gubimo princip superpozicije za stanja polja, jer ona direktno određuju geometriju prostovremena koje je klasično.

Pokušalo se i promovirati metriku u operator, ali recimo da imamo neko klasično polje cjelobrojnog spina ψ na prostorvremenu Minkowskog, s operatorom polja $\hat{\psi}$. Nema smisla da mjerenje ψ u x' utječe na mjerenje ψ u x, ako su x i x' prostorno povezani (nema kauzalnih krivulja među njima). Onda očekujemo da će za operator vrijediti

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')] = 0 \quad .$$

Iako ako ćemo se držati onog što smo rekli i tretirati operatore kao distribucije vrijedi

$$[\hat{\psi}(f), \hat{\psi}(g)] = 0 \quad ,$$

gdje su f i g test funkcije čiji su nosači prostorno povezani. Kada raspišemo Einsteinove jednadžbe uz $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$ dobijemo lineariziranu gravitaciju. To je teorija bezmasenog, spin-2 polja na prostorvremenu Minkowskog pa bi očekivali da vrijedi nešto slično.

$$[\hat{g}_{ab}(f), \hat{g}_{ab}(g)] = 0 \tag{1}$$

Ova jednadžba nema smisla, jer mi ne znamo koji su odnosi među nosačima test funkcija f i g dok ne znamo metriku. Također ova jednadžba trebala bi biti neovisna o stanju polja, odnosno neovisna o metrici, a to sigurno nije. Gore spomenuti γ_{ab} je u biti perturbacijski razvoj oko ravnog prostorvremena η_{ab}. Možda bismo mogli perturbaciju γ_{ab} gledati kao dinamičko kvantno polje na fiksnoj ravnoj pozadini. Unaprijed možemo vidjeti da ovakav pristup ne može biti uspješan, jer će pozadina određivati smisao evolucije u vremenu, drugim riječima, kauzalni uvjeti će biti zadovoljeni u odnosu na η_{ab}, dok je stvarna fundamentalna metrika g_{ab}. Kada bi i proveli račun takva teorija pokazala bi se nerenormalizabilnom. Zaključujemo da je upravo centralna ideja opće relativnosti, da Svemir nije smješten u nekakav pozadinski prostor, već je dinamički dio Svemira, jedna od glavnih prepreka kvantiziranju gravitacije.

Kvantne teorije moguće je formulirati na način da zaobilazimo operatore, vektore i Hilbertov prostor, te tretiramo amplitude vjerojatnosti kao fizikalno značajne veličine. Radi se o integralima po putevima, koji imaju prigodno svojstvo da će načelo superpozicije sigurno biti zadovoljeno čisto zbog konstrukcije i pritom još upošljava klasičnu akciju koju znamo definirati za Einsteinove jednadžbe. U seminaru ćemo prvo izvesti formulaciju integrala po putevima za jednodimenzionalni kvantno-mehanički sustav. Nakon toga ćemo pronaći odgovarajući lagranžijan za gravitaciju, te raspraviti o prikladnim početnim uvjetima za opću relativnost. Gravitacijski integrali po putevima zapravo nisu formalno definirani i rade se po analogiji s jednostavnijim slučajevima, što se u prošlosti očekivano pokazalo velikom preprekom za teoriju.

II. INTEGRALI PO PUTEVIMA

Sjetimo se eksperimenta s dvije pukotine i kako smo ga tretirali na kvantnoj mehanici. Čestica je emitirana iz nekog izvora, te prema načelu superpozicije, amplituda vjerojatnosti da je vidimo u nekoj točki na zastoru je suma amplitude da čestica prođe kroz prvu pukotinu i amplitude da prođe kroz drugu pukotinu. Ali recimo da imamo tri ili više rupa. Dobro, samo dodajemo više članova u sumi. Što ako dodamo još pregrada svaka sa svojim pukotinama. Dobro, samo napravimo sumaciju po svim pregradama, odnosno po putanjama kroz pukotine na pregradama. Sada zamislimo da imamo beskonačan broj pregrada i beskonačan broj rupa na svakoj od njih. Tada preostaje samo prazan prostor između izvora i zastora, što nas navodi na sumu, koja sada u biti postaje integracija, po svim mogućim putanjama između izvora i zastora. Navodno je Feynman svom profesoru kvantne mehanike postavio ovakav niz pitanja na jednom od predavanja.

Kako bismo definirali tu sumu po putevima? Vratimo li se malo unazad možemo imati veliki broj pregrada i rupa i onda na kraju puštati limese. Odnosno aproksimirati putanje sa ravnim segmentima. Prema unitarnosti, za amplitudu cijele putanje, možemo uzeti umnožak amplituda po segmentima. Matematičku formulaciju ovog pristupa prvi je dao Dirac.

II.1. Diracov formalizam

Proučavamo slučaj nerelativističkog kvantnog sustava s jednim stupnjem slobode. Neka imamo Hamiltonian $\mathscr{H}$, i operatore položaja i momenta $\hat{q}$, $\hat{p}$. U Heisenbergovoj slici za operator položaja vrijedi $\hat{q}_H(t) = e^{i\mathscr{H}t/\hbar}\hat{q}_S e^{-i\mathscr{H}t/\hbar}$, gdje je $\hat{q}_S$ isti u Schrödingerovoj slici. Neka je $\hbar = 1$ radi jednostavnosti. Postoji potpuni skup vektora $|q,t\rangle$ tako da $\hat{q}_H(t)|q,t\rangle = q|q,t\rangle$. Kada vrijedi $\hat{q}_S|q\rangle = q|q\rangle$, imamo $|q,t\rangle = e^{i\mathscr{H}t}|q\rangle$. Pogledajmo sad neku valnu funkciju $\psi(q',t')$.

$$\psi(q',t') = \langle q'|\psi(t')\rangle = \langle q',t'|\psi\rangle_H$$

Iskoristimo potpunost skupa $|q',t'\rangle$.

$$\psi(q',t') = \int dq \langle q',t'|q,t\rangle\langle q,t|\psi\rangle_H = \int dq \langle q',t'|q,t\rangle\psi(q,t)$$

Objekt $\langle q',t'|q,t\rangle$ se naziva *Feynmanova jezgra* i iz gornje jednadžbe vidimo da je znanje jezgre ekvivalentno rješavanju Schrödingerove jednadžbe. Vrijeme je ovdje samo parametar, pa je segmentacija jednostavna. (t,t') podijelimo u mnogo malih ravnih segmenta. Radi jednostavnosti uzimamo segmente jednake proizvoljno male duljine ε.

$$t' - t = N\varepsilon \quad ,t_n = t + n\varepsilon \quad ,n = 1,...,N-1 \tag{2}$$

Sada u svakoj točki umećemo potpunost seta $|q_n,t_n\rangle$.

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int q_{N-1}... \int dq_1 \langle q',t'|q_{N-1},t_{N-1}\rangle...\langle q_1,t_1|q,t\rangle \tag{3}$$

Segmentne amplitude $\langle q_{m+1},t_{m+1}|q_m,t_m\rangle$ nazivamo matricama transfera $T(m+1,m) \equiv T_m$. Njih je općenito puno lakše naći negoli Feynmanovu jezgru. Vjerojatno vam već od spominjanja proizvoljno malog ε sve miriše na razvoj i upravo to slijedi, specifično upotrijebiti ćemo ga za matrice transfera.

$$T_n = \langle q_{n+1}|e^{-i\mathscr{H}(t_{n+1}-t_n)}|q_n\rangle \approx \langle q_{n+1}|1 - i\mathscr{H}\epsilon|q_n\rangle$$

$$\langle q_{n+1}|\mathscr{H}(\hat{p},\hat{q})|q_n\rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi}\langle q_{n+1}|p_n\rangle\langle p_n|\mathscr{H}|q_n\rangle$$

Pretpostavimo da u $\mathscr{H}$ nema članova miješanih u $\hat{p}$ i $\hat{q}$, pa se Hamiltonijanski operator svodi na klasičnu funkciju.

$$\langle p_n|\mathscr{H}(\hat{p},\hat{q})|q_n\rangle = \langle p_n|q_n\rangle H(p_n,q_n)$$

U slučaju da naša pretpostavka ne vrijedi, najbolji način za nošenje sa situacijom je da koristimo Weylovo uređenje u kojem uprosječujemo preko svih mogućih redoslijeda operatora. U tom slučaju dobili bi drugačiju klasičnu funkciju, $H(p_n, \frac{1}{2}(q_{n+1}+q_n))$. Pisati ćemo $\bar{q}_n$ pa možemo kasnije izabrati o kojem slučaju se radi.

Uz $\langle q_m|p_n\rangle = e^{ip_nq_m}$ imamo rezultat za matricu transfera T_n.

$$T_n = \int \frac{dp_n}{2\pi} e^{ip_n(q_{n+1}-q_n)}(1 - iH(p_n,\bar{q}_n)\epsilon) \tag{4}$$

Sada slijedi osjetljivi dio u kojem proizvoljno usitanjavamo particiju, drugim riječima idemo u limes $\epsilon \to 0,\ N \to \infty$. Raspravimo prvo o integriranju. Imati ćemo $N-1$ integral po položajima q_n. Iz (4) vidimo da ćemo za svaku matricu transfera imati i integraciju po p_n, pa će to dati N integrala po impulsima. Uvodimo prigodnu notaciju za integrale s limesom.

$$\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi} \equiv \int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p$$

Ovakve konstrukcije nazivamo *integralima po putevima*. Granice svakog pojedinog integrala u principu nisu određene, iz čega slijedi da mi zapravo u obzir uzimamo jako široku klasu puteva (nema razloga da budu glatki, čak niti kontinuirani). Jedini zahtjev je da putanje ispunjavaju rubne uvjete $q(t) = q$ i $q(t') = q'$. Ubacujemo izraz za matricu transfera (4) u izraz za jezgru (3).

$$\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p\ \exp\big(i\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}p_n\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon}\big)\prod_{n=0}^{N-1}\big(1 - i\varepsilon H(p_n,\bar{q}_n)\big) \tag{5}$$

Gdje se limes podrazumijeva, ali ga ne pišemo da izraz stane u redak. Pogledajmo pobliže zadnji komad integranda. Uz $\epsilon = (t'-t)/N$ i $x_n = -i(t'-t)H(p_n,\bar{q}_n)$ ima oblik

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\big(1+\frac{x_n}{N}\big) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}e^{x_n/N} = \lim_{N\to\infty}\exp\big(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_n\big)$$

Iskoristimo ovo na (5).

$$\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p\ \exp\Big(i\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\big(p_n\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon} - H(p_n,\bar{q}_n)\big)\Big) \tag{6}$$

Kada pustimo limes ε se ponaša kao diferencijal vremena, pa suma ide u integral po vremenu, a član pod sumom prepoznajemo kao derivaciju po vremenu. p_n i q_n se tada ponašaju kao diskretni uzorci nekih funkcija $q_n \to q(t_n)$ i $p_n \to p(t_n)$.

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p\exp\Big(i\int_t^{t'}[p\dot{q} - H(p,q)]\Big) \tag{7}$$

Očituje se još jedan mogući problem, a taj je da je integrand fazni faktor, pa će nam integral konvergirati samo ako se brzo oscilirajući dijelovi susjednih putanja međusobno ponište. Ovo je posljedica načela superpozicije, prema kojem moramo uzeti u obzir sve moguće putanje. Obično se za postizanje konvergencije radi Wickova rotacija vremenske koordinate da bi dobili eksponencijalno opadanje. Istu tu tehniku koristili su Hartle i Hawking u orginalnoj formulaciji "no-boundary" prijedloga[1], i dok to radi za jednostavni slučaj koji smo izveli, za gravitaciju dolazi do novih divergencija[8], pa se taj pristup morao odbaciti.

Ako Hamiltonijan ima standardnu formu (da je kvadratičan u operatoru impulsa) $H(p,q) = p^2/2m + V(q)$, onda možemo još pojednostaviti ovaj izraz i prikazati ga u poznatijoj formi koja se nekada naziva Feynmanovim integralom po putevima. Primjetite da smo p_n uveli nezavisno od q_n, iz čega slijedi da objekt u eksponencijali $\tilde{L}(q,\dot{q},p) = p\dot{q} - H(p,q)$ zapravo nije lagranžijanska funckija $L(q,\dot{q})$, ali možemo doći do nje u slučaju standardne forme Hamiltonijana. Vraćamo se na izraz za matricu transfera (4), s kraticom $\dot{q}_n$.

$$\begin{aligned} T_n &= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\Big(i\epsilon[p_n\dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} - V(\bar{q}_n)]\Big) \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\Big(\frac{i\epsilon}{2m}(2mp_n\dot{q}_n - p_n^2) - i\epsilon V(\bar{q}_n)\Big) \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\Big(\frac{i\epsilon}{2m}\big(-(p_n - m\dot{q}_n)^2 + m^2\dot{q}_n^2\big) - i\epsilon V(\bar{q}_n)\Big) \end{aligned}$$

Napravimo substituciju $p'_n = p_n - m\dot{q}_n$ i dobijamo Gaussijanski integral. Veliki broj integrala u ovoj formulaciji završi u ovom obliku, stoga ću ovdje ubaciti jedno zabavno rješenje tog integrala na koje sam naišao.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2}$$

Ovo možemo kvadrirati i prebaciti se u polarne koordinate u kojima možemo jednostavno riješiti.

$$I^2 = \iint dxdy\ e^{-a(x^2+y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} rdr\ e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a} \to I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

U našem slučaju $a = i\varepsilon/2m$, pa slijedi rezultat. (Prešutno smo napravili analitičko produljenje, jer je faktor a imaginaran).

$$T_n = \Big(\frac{2i\pi\varepsilon}{m}\Big)^{-1/2} \exp\big(i\varepsilon[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n)]\big) \tag{8}$$

Provođenjem limesa s ovim rezultatom za T_n dobijemo *Feynmanov integral po putevima.*

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \int \mathcal{D}q \exp\Big(i\int_t^{t'} d\tau\big(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\big)\Big) \tag{9}$$

Ovdje možemo prepoznati uobičajeni lagranžijan $L(q,\dot{q})$, te klasični funkcional akcije $S[q(t),\dot{q}(t)]$.

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q \exp(iS[q(t),\dot{q}(t)]) \tag{10}$$

$\mathcal{N}$ je neodređena normalizacijska konstanta, koja ispada divergentna, jer limes $N \to \infty$ zapravo nije dobro definiran. Ipak veliku količinu informacija možemo izvući samo iz funkcionalne ovisnosti, pa se zasad ne zabrinjavamo apsolutnim veličinama. Primjetite da je faza pojedine putanje zadana eksponencijalnom akcije. Znamo da varijacijskim računom možemo doći do klasične mehanike, odnosno kada je akcija stacionarna za varijacije $\delta q(t)$ i $\delta\dot{q}(t)$. Zaključujemo da kvantna mehanika u aproksimaciji stacionarne faze, reproducira klasičnu mehaniku.

Rezultat (10) nas motivira na sljedeći korak, a taj je pronalaženje lagranžijana koji reproducira Einsteinovu jednadžbu.

III. LAGRANŽIJAN OPĆE RELATIVNOSTI

Neka je ψ tenzorsko polje na mnogostrukosti $\mathscr{M}$. Neka je $S[\psi]$ funkcional od ψ (preslikava konfiguracije polja ψ na $\mathscr{M}$ u brojeve). Neka je sada ψ_λ glatka jedno-parametarska familija konfiguracija polja. Pod perturbacijom u polju $\delta\psi$ zapravo mislimo na derivaciju po parametru.

$$\delta\psi = \frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$$

Pretpostavimo da δS postoji za sve takve jedno-parametarske familije. Nadalje, pretpostavimo da postoji glatko tenzorsko polje χ koje je dualno ψ, tako da za sve familije vrijedi

$$\delta S = \int_{\mathscr{M}} \chi\delta\psi \quad ,$$

gdje se podrazumijeva kontrakcija indeksa na χ i $\delta\psi$. U ovom slučaju kažemo da je S *funkcionalno diferencijabilna* u ψ_0, a χ nazivamo *funkcionalnom derivacijom* od S.

$$\chi = \frac{\delta S}{\delta\psi}\Big|_{\psi_0}$$

Ako je ψ simetrično (kao što je metrika), onda tenzoru χ možemo dodati neki antisimetrični tenzor i δS će ostati nepromijenjen. Ovu slobodu eliminiramo jednostavno, tako da zahtijevamo da svaka funkcionalna derivacija bude simetrična. Razmotrimo sada funkcional oblika

$$S[\psi] = \int_{\mathscr{M}} \mathcal{L}[\psi] \quad ,$$

gdje je $\mathcal{L}$ lokalna funkcija koja ovisi o ψ i konačnom broju njenih derivacija

$$\mathcal{L}\Big|_x = \mathcal{L}(\psi(x),\ \nabla\psi(x),\ ...,\ \nabla^k\psi(x)) \quad .$$

Ako je S funkcionalno diferencijabilna i ako su konfiguracije polja koje ekstremiziraju S, rješenja jednadžbi polja za ψ, onda S nazivamo *akcijom*, a $\mathcal{L}$ *lagranžijanskom gustoćom.* Određivanjem ove gustoće zapravo prevodimo teoriju u Lagranžijansku formulaciju.

Pa koja bi to gustoća bila prikladna za relativnost? Einsteinovu jednadžbu rješavamo za metriku, pa će tako akcija biti funkcional metrike (i nekih polja materije koja bivaju na njoj, ali se zasada držimo samo metrike). Znači možemo pisati:

$$S[g] = \int \boldsymbol{\epsilon}\hat{\mathcal{L}} \quad ,$$

gdje je $\boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{|g|}dx^0 \wedge ... \wedge dx^{n-1} \equiv \sqrt{|g|}\boldsymbol{e}$ prirodni volumni element na $(\mathscr{M}, g_{ab})$ u svakoj desnoj koordinatnoj bazi. Ovdje je g determinanta matrice $g_{\mu\nu}$ komponentni metrike g_{ab} u koordinatnom sustavu u kojem su komponente od e_{abcd} jednake Levi-Civita simbolima. Problem je što ćemo i volumni element morati varirati jer ovisi o metrici, ali možemo uvesti fiksni volumni element i definirati integrale u odnosu na taj volumni element. Uzmemo li $\boldsymbol{e}$ kao volumni element definiramo tenzorske gustoće $T^a{}_b$ za koje vrijedi,

$$T^a{}_b = \sqrt{|g|}\tilde{T}^a{}_b \quad ,$$

gdje je $\tilde{T}^a{}_b$ tenzor koji je neovisan o izboru $\boldsymbol{e}$. Da bi akcija S bila neovisna o $\boldsymbol{e}$, $\mathscr{L}$ mora biti skalarna gustoća. Da bi δS bila neovisna o $\boldsymbol{e}$, χ mora biti tenzorska gustoća.

$\hat{\mathcal{L}}$ mora biti nekakav skalar koji je na neki način povezan sa zakrivljenošću metrike, pa idemo isprobati jednostavni izbor Riccijevog skalara, $\hat{\mathcal{L}} \overset{?}{=} R$.

$$S_H[g] = \int \boldsymbol{e}\sqrt{|g|}R$$

S_H se naziva Hilbertovom akcijom. Sada uvodimo perturbaciju u inverznu metriku $g^{ab} + \lambda\delta g^{ab}$ i nadamo se da ćemo variranjem dobiti Einsteinovu jednadžbu. Svejedno je variramo li metriku g_{ab} ili inverznu metriku g^{ab}, ovdje biramo drugi izbor. Želimo $\delta\mathcal{L} = \delta(\sqrt{|g|}R)$ zapisati u obliku $A_{ab}\delta g^{ab}$. Stoga ćemo prvo naći poveznicu između varijacije u metrici δg_{ab} i varijacije u inverznoj metrici δg^{ab}. Ne smijemo koristiti neperturbiranu metriku za podizanje i spuštanje indeksa na perturbacijama, ali sigurno vrijedi sljedeće:

$$g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c \to g_{bc}\delta g^{ab} + g^{ab}\delta g_{bc} = 0 \quad ,$$

ubacimo li g_{ad} slijeva dobijamo relaciju koja povezuje perturbaciju u metrici s perturbacijom u inverznoj metrici.

$$g_{ad}g^{ab}\delta g_{bc} = -g_{ad}g_{bc}\delta g^{ab}$$

$$\delta g_{cd} = -g_{ad}g_{cb}\delta g^{ab} \tag{11}$$

Sada smo spremni varirati našu jednostavnu pretpostavku. Sjetimo se da $R = R_{ab}g^{ab}$.

$$\delta(R\sqrt{|g|}) = R\delta\sqrt{|g|} + \sqrt{|g|}R_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{|g|}g^{ab}\delta R_{ab} \tag{12}$$

Odmah vidimo da je srednji član već u željenoj formi. Prvi će zahtjevati malo masaže, gdje ćemo iskoristiti relaciju $\ln(|\det A|) = \mathrm{Tr}(\ln A)$.

$$\ln(\sqrt{|g|}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\ln g)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g^{ab}\delta g_{bc}) = \frac{1}{2}g^{bc}\delta g_{bc}$$

Iskoristimo relaciju pod (11) i preskačemo korak u kojem samo kontrahiramo metriku i njen inverz.

$$\delta(\sqrt{|g|}) = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g_{ab}\delta g^{ab}$$

Ubacimo to u (12).

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\big(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\big)\delta g^{ab} + \sqrt{|g|}g^{ab}\delta R_{ab}$$

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{|g|}G_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{|g|}g^{ab}\delta R_{ab} \tag{13}$$

Odlično, već prva dva člana reproduciraju Einsteinovu jednadžbu u vakuumu. Naš prvi pokušaj koji je najjednostavniji i unikatan se pokazao dobrim... do na zadnji član. Nakon što ga razmrsimo vidjeti ćemo da se radi o površinskom integralu. Način na koji ćemo eliminirati ovaj član je također najjednostavniji mogući. Samo ćemo ga uvesti (sa suprotnim predznakom) kao dodatni član u definiciju konačne akcije. Ovakav čin nam je dopušten jer u biti mi nemamo ni motivaciju, ni opravdanje, za izbor $\hat{\mathcal{L}} = R$, osim toga što će nam reproducirati željene jednadžbe. Isto tako jedina motivacija za imati ili nemati dodatni član je reproduciranje Einsteinove jednadžbe.

III.1. Površinski član u Hilbertovoj akciji

Da bi došli do konačne forme za ovaj član, morati ćemo naći dobar izraz za Riccijev tenzor. Pošto Riemannov tenzor možemo izraziti preko derivacija prvo nalazimo vezu među derivacijama koju ćemo izraziti preko metrike i njenih prvih derivacija, te onda nalazimo varijaciju Riccijevog tenzora. Naposlijetku je povezujemo s ekstrinzičnom zakrivljenošću ruba mnogostrukosti.

III.1.1. Veza među derivacijama

Imamo li dva operatora derivacije $\tilde{\nabla}_a$ i ∇_a može se naći tenzorsko polje $C^c{}_{ab}$ tako da vrijedi

$$\nabla_a T_b{}^c = \tilde{\nabla}_a T_b{}^c + C^c{}_{ad}T_b{}^d - C^d{}_{ab}T_d{}^c \tag{14}$$

Zahtjevamo da tenzor torzije za sve operatore derivacije iščezava, odnosno da $\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$ za svaki skalarni f. Iz toga slijedi da $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$.

Neka je sada jedan od njih ∇_a kompatibilan s metrikom g_{ab}. Sa sigurnošću možemo reći da vrijedi

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d{}_{ab}g_{dc} - C^d{}_{ac}g_{db} \quad .$$

Pa slijedi

$$C_{cab} + C_{bac} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad . \tag{15}$$

Zamjenom indeksa $a \leftrightarrow b$ dobijemo sličnu relaciju s istim značenjem.

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{\nabla}_b g_{ac} \tag{16}$$

Napravimo još jednu zamjenu $b \leftrightarrow c$.

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{\nabla}_c g_{ab} \tag{17}$$

Zbrajamo (15) i (16), te oduzimamo (17). Iskorištavamo svojstvo simetričnosti $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$ i dobijemo izraz za $C^c{}_{ab}$.

$$2C_{cab} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab}$$

$$C^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab}) \tag{18}$$

III.1.2. Varijacija Riccijevog tenzora

Neka sada imamo familiju egzaktnih rješenja Einsteinove jednadžbe $g_{ab}(\lambda)$, te neka je ${}^\lambda\nabla_a$ familija kompatibilnih derivacija. Neka je $\tilde{g}_{ab} = g_{ab}(\lambda = 0)$ vakuumsko rješenje i $\tilde{\nabla}_a$ njena kompatibilna derivacija. Onda (18) postaje:

$$C^c{}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}g^{cd}(\lambda)(\tilde{\nabla}_a g_{bd}(\lambda) + \tilde{\nabla}_b g_{ad}(\lambda) - \tilde{\nabla}_d g_{ab}(\lambda)) \quad . \tag{19}$$

Za neki dualni vektor ω_c vrijedi

$$[{}^\lambda\nabla_a, {}^\lambda\nabla_b]\omega_c = 2{}^\lambda\nabla_{[a}{}^\lambda\nabla_{b]}\omega_c = R_{abc}{}^d(\lambda)\omega_d \quad , \tag{20}$$

gdje je $R_{abc}{}^d$ Riemannov tenzor zakrivljenosti. Sada $R_{abc}{}^d(\lambda)$ možemo izraziti preko ${}^0R_{abc}{}^d$ i $C^c{}_{ab}(\lambda)$. Za račun koristimo (14), ali ovdje $\nabla_a = {}^\lambda\nabla_a$.

$${}^\lambda\nabla_b\omega_c = \tilde{\nabla}_a\omega_c - C^d{}_{bc}\omega_d$$

$${}^\lambda\nabla_a{}^\lambda\nabla_b\omega_c = \tilde{\nabla}_a({}^\lambda\nabla_b\omega_c) - C^d{}_{ab}{}^\lambda\nabla_d\omega_c - C^d{}_{ac}{}^\lambda\nabla_b\omega_d$$

Imajte na umu da ćemo na kraju napraviti antisimetrizaciju u indeksima a i b pa odmah vidimo da će srednji član iščezavati, pa taj član odmah ispuštamo i ubacujemo prvi rezultat.

$$\begin{aligned}{}^\lambda\nabla_a{}^\lambda\nabla_b\omega_c =& \tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\omega_c - \tilde{\nabla}_a(C^d{}_{bc}\omega_d) \\ &- C^d{}_{ac}\tilde{\nabla}_b\omega_d + C^d{}_{ac}C^e{}_{bd}\omega_e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}^\lambda\nabla_a{}^\lambda\nabla_b\omega_c =& \tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\omega_c - \tilde{\nabla}_a(C^d{}_{bc})\omega_d \\ &- C^d{}_{bc}\tilde{\nabla}_a\omega_d - C^d{}_{ac}\tilde{\nabla}_b\omega_d + C^d{}_{ac}C^e{}_{bd}\omega_e\end{aligned}$$

Treći i četvrti komad su simetrični u indeksima a i b pa oni također otpadaju. Kontrahiranim indeksima e i d zamijenimo nazive.

$${}^\lambda\nabla_{[a}{}^\lambda\nabla_{b]}\omega_c = \tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}\omega_c - \tilde{\nabla}_{[a}(C^d{}_{b]c})\omega_d + C^e{}_{[a|c|}C^d{}_{b]e}\omega_d$$

Iz ovoga slijedi veza među Riemannovim tenzorima.

$$R_{abc}{}^d(\lambda) = {}^0R_{abc}{}^d - 2\tilde{\nabla}_{[a}C^d{}_{b]c} + C^e{}_{c[a}C^d{}_{b]e} \tag{21}$$

Kontrakcijom odgovarajućih indeksa dolazimo do Riccijevih tenzora. Ali $\tilde{g}_{ab}$ je vakuumsko rješenje pa ${}^0R_{ac} = 0$.

$$R_{ac}(\lambda) = R_{abc}{}^b(\lambda) = -2\tilde{\nabla}_{[a}C^b{}_{b]c} + C^e{}_{c[a}C^b{}_{b]e} \tag{22}$$

Iz definicije slijedi da će $C^c{}_{ab}$ biti nula kada je parametar λ nula, pa svi članovi kvadratični u $C^c{}_{ab}$ neće doprinositi $\delta R_{ac}(\lambda)$.

$$\delta R_{ac} = 2\tilde{\nabla}_{[b}\delta C^b{}_{a]c} \tag{23}$$

$\tilde{\nabla}$ je derivacija kompatibilna s vakuumskom metrikom pa je parametarska derivacija "ne vidi" u gornjoj relaciji, a slično će se dogoditi i ispod. Iz relacije (19) možemo vidjeti.

$$\delta C^c{}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{cd}(\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd} + \tilde{\nabla}_b\gamma_{ad} - \tilde{\nabla}_d\gamma_{ab}) \tag{24}$$

Gdje je $\gamma_{ab} = \delta g_{ab}$. Parametarska derivacija "ne djeluje" na inverznu metriku $g^{cd}(\lambda)$ ispred zagrade, zato što je član u zagradi nula kada $\lambda = 0$, jer $\tilde{\nabla}_a(\tilde{g}_{bc}) = 0$. Kontrakcijom i preimenovanjem indeksa slijedi.

$$\delta C^b{}_{bc}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}(\tilde{\nabla}_b\gamma_{cd} + \tilde{\nabla}_c\gamma_{bd} - \tilde{\nabla}_d\gamma_{bc}) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}_c\gamma_{bd}$$

Sada računamo članove u (23).

$$\tilde{\nabla}_a\delta C^b{}_{bc}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c\gamma_{bd}$$

$$\tilde{\nabla}_b\delta C^b{}_{ac}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}_b(\tilde{\nabla}_a\gamma_{cd} + \tilde{\nabla}_c\gamma_{ad} - \tilde{\nabla}_d\gamma_{ac})$$

U izrazu perturbacije Lagranžijana pojavljuje se $g^{ac}\delta R_{ac}$ pa kontrahiramo s vakuumskom metrikom s lijeva.

$$\tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_a\delta C^b{}_{bc} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd}$$

$$\tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_b\delta C^b{}_{ac} = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}^c\gamma_{cd} + \tilde{\nabla}^d\tilde{\nabla}^c\gamma_{cd} - \tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}^b\tilde{\nabla}_b\gamma_{ac})$$

Oduzimamo zadnja dva izraza za rezultat prema (23).

$$\tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_b\delta C^b{}_{ac} - \tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_a\delta C^b{}_{bc} = \tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}^c\gamma_{ac} - \tilde{g}^{bd}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd}$$

$$\tilde{g}^{ac}\delta R_{ac} = \tilde{\nabla}^a v_a \tag{25}$$

Gdje je $v_a = \tilde{\nabla}^c\gamma_{ac} - {}^0g^{bd}\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd}$. Kontrahirali smo s vakuumskom metrikom jer još ne pričamo o materiji na metrici. Ali da jesmo brzo bismo primjetili da ovaj izvod vrijedi samo do na prvi red u perturbaciji oko vakuumskog rješenja, jer materija utječe na metriku. Napokon možemo vidjeti da je zadnji doprinos varijaciji Hilbertove akcije uistinu površinski integral.

III.1.3. Veza s ekstrinzičnom zakrivljenošću

Prema Stokesovom teoremu integral po $\mathscr{M}$ možemo prebaciti na rub $\partial\mathscr{M}$ (ne-null tipa s dobrim volumnim elementom ${}^{(3)}\epsilon$), s normalnim vektorskim poljem n^a za koje vrijedi $n_a n^a = \mp 1$.

$$\int_{\mathscr{M}} \nabla_a v^a \epsilon = \int_{\partial\mathscr{M}} v^a n_a {}^{(3)}\epsilon$$

Koristeći izraz za vektor v^a možemo urediti integrand.

$$n^a v_a = n^a\tilde{g}^{bc}(\tilde{\nabla}_b\gamma_{ac} - \tilde{\nabla}_a\gamma_{bc}) = n^a h^{bc}(\tilde{\nabla}_b\gamma_{ac} - \tilde{\nabla}_a\gamma_{bc})$$

Ovdje je h_{ab} inducirana metrika na rubu. Pošto $\tilde{g}^{bc} = h^{bc} \pm n^b n^c$, imali bi kontrakciju $n^a n^b n^c$ sa zagradom koja je antisimetrična u a, b, pa preostaje samo $n^a h^{bc}$ član. Produkt $n_a v^a$ izvrednuje se na rubu gdje je $\delta g_{ab} = 0$, pa preostaje samo drugi član.

$$n^a v_a = -n^a h^{bc}\tilde{\nabla}_a\gamma_{bc} \tag{26}$$

Za smještenu mnogostrukost s induciranom metrikom h_{ab} i normalnim vektorom n^a *ekstrinzična zakrivljenost* K_{ab} može se definirati na sljedeći način.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_n h_{ab} \tag{27}$$

Raspišimo.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}(n^c\tilde{\nabla}_c h_{ab} + h_{bc}\nabla_a n^c + h_{ac}\nabla_b n^c)$$

Iskoristimo $\tilde{g}_{ab} = h_{ab} + n_a n_b$ (+ znači da smo izabrali n^a vremenskog tipa) i kompatibilnost $\tilde{\nabla}_c\tilde{g}_{ab} = 0$ na prvom članu.

$$
\begin{aligned}
2K_{ab} =& - n^c\tilde{\nabla}_c(n_a n_b) + h_{bc}\tilde{\nabla}_a n^c + h_{ac}\tilde{\nabla}_b n^c \\
=& - n^c n_a \tilde{\nabla}_c n_b - n^c n_b \tilde{\nabla}_c n_a + h_{bc}\tilde{\nabla}_a n^c + h_{ac}\tilde{\nabla}_b n^c \\
=& h^c{}_a \tilde{\nabla}_c n_b - \tilde{\nabla}_a n_b + h^c{}_b \tilde{\nabla}_c n_a - \tilde{\nabla}_b n_a \\
& + h_{bc}\tilde{\nabla}_a n^c + h_{ac}\tilde{\nabla}_b n^c
\end{aligned}
$$

$$
K_{ab} = \frac{1}{2}(h^c{}_a \tilde{\nabla}_c n_b + h^c{}_b \tilde{\nabla}_c n_a) \tag{28}
$$

Zadnja jednakost slijedi iz činjenice da $n_c \nabla_a n^c = \frac{1}{2}\nabla_a(n_c n^c) = 0$, iz koje vrijedi

$$
h_{bc}\nabla_a n^c = \nabla_a n_b \tag{29}
$$

K_{ab} iz (28) kontrahiramo s inverznom metrikom $\tilde{g}^{ab}$, te iskoristimo njenu simetričnost.

$$
K = g^{ab} h^c{}_a \tilde{\nabla}_c n_b = h_{ac}\tilde{\nabla}^c n^a
$$

Sada iz (14) nalazimo parametarsku derivaciju skalara K.

$$
\delta K = h_{ac}(\delta C)^{ca}{}_d n^d = h^a{}_c (\delta C)^c{}_{ad} n^d
$$

Ubacujemo (24).

$$
\begin{aligned}
\delta K =& h^a{}_c \frac{1}{2}\tilde{g}^{cb}(\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd} + \tilde{\nabla}_d\gamma_{ab} - \tilde{\nabla}_b\gamma_{ad}) \\
=& h^{ab}\frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_a\gamma_{bd} + \tilde{\nabla}_d\gamma_{ab} - \tilde{\nabla}_b\gamma_{ad}) \\
=& \frac{1}{2}h^{ab} n^d \tilde{\nabla}_d \gamma_{ab}
\end{aligned}
$$

Gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da prvi i treći član čine objekt antisimetričan u a, b, kontrahiran sa simetričnim h^{ab}. Usporedbom s (26) vidimo da površinski integral možemo povezati s ekstrinzičnom zakrivljenošću ruba.

$$
n^a v_a = -2\delta K \tag{30}
$$

Nadalje ćemo vidjeti kako se uključuje materija u priču i dati ćemo definiciju za tenzor energije i impulsa.

III.2. Kozmološka konstanta i materija

Općenita Einsteinova jednadžba s kozmološkom konstantom Λ glasi.

$$
R_{ab} + (\Lambda - \frac{1}{2}R)g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \tag{31}
$$

Vrlo lako možemo dodati kozmološku konstantu, dok bi tenzor energije i impulsa trebao dolaziti od neke akcije materije.

$$
\mathcal{L}_0 = R - 2\Lambda
$$

Za ukupnu akciju pišemo,

$$
S = \frac{1}{16\pi G}S_0 + S_M
$$

Variranjem S

$$
\frac{1}{16\pi G}\big[R_{ab} + (\Lambda - \frac{1}{2}R)g_{ab}\big] + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = 0
$$

Zadnji član je simetrični $(0, 2)$ tenzor dimenzija gustoće energije, pa ga odmah povezujemo s tenzorom energije i impulsa i tvrdimo.

$$
T_{ab} = -2\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \tag{32}
$$

Sada ćemo pokazati kada je ovaj tenzor sačuvan, kao što bismo očekivali od tenzora energije i impulsa. Recimo da imamo akciju materije S_M invarijantnu pod difeomorfizmima, te neka je $f_\lambda : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ jednoparametarska familija difeomorfizama. Za svaku od njih u točki $p \in \mathscr{M}$ možemo definirati preslikavanje $f^*_\lambda : V_p \to V_{f_\lambda(p)}$ koje prenosi tangentne vektore u $p \in \mathscr{M}$, u tangentne vektore u $f_\lambda(p) \in \mathscr{N}$. U našem slučaju $\mathscr{M} = \mathscr{N}$. Onda invarijantnost akcije pod difeomorfizmima možemo zapisati kao $S_M[g^{ab}, \psi] = S_M[f^*_\lambda g^{ab}, f^*_\lambda \psi]$.

$$
\frac{dS_\lambda}{d\lambda} = 0 = \int \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}\delta g^{ab} + \int \frac{\delta S_M}{\delta \psi}\delta\psi
$$

Ako ψ zadovoljava jednadžbe polja materije, onda drugi član iščezava. Razmatramo perturbacije prvog reda u metrici $g_{ab} \approx \tilde{g}_{ab} + \lambda\gamma_{ab}$. Onda γ_{ab} i γ'_{ab} predstavljaju istu fizikalnu perturbaciju.

$$
\gamma_{ab} = \frac{dg_{ab}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \qquad \gamma'_{ab} = \frac{d(f^*_\lambda g_{ab})}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}
$$

Iz definicije Liejeve derivacije slijedi $\gamma_{ab} = \gamma'_{ab} + \pounds_v g_{ab}$, gdje je v^a vektorsko polje koje generira familiju f_λ.

$$
\pounds_v g_{ab} = \pounds_v g_{ab} = v^c\nabla_c g_{ab} + g_{cb}\nabla_a v^c + g_{ac}\nabla_b v^c = 2\nabla_{(a}v_{b)}
$$

Obje perturbacije bi trebale rezultirati istom fizikom pa obje možemo smatrati kao δg_{ab} iz čega slijedi

$$
\int \frac{\delta S_M}{\delta g_{ab}}(\gamma_{ab} - \gamma'_{ab}) = 0
$$

Koristeći novu definiciju T_{ab} i uz uvjet da v^a ima kompaktan nosač dobijamo sačuvanje.

$$
\int T^{ab}\nabla_{(a}v_{b)} = 0 - \int(\nabla_a T^{ab})v_b = 0
$$

Iz ovoga slijedi $\nabla^a T_{ab} = 0$. Za difeomorfno invarijantu akciju S_M, T_{ab} je uvijek sačuvan zahvaljujući jednadžbama polja materije. Primjenjujući isti postupak na Hilbertovu akciju slijedi da, nezavisno od bilo koje jednadžbe polja, vrijedi $\nabla^a G_{ab} = 0$. Stoga u Lagranžijanskoj formulaciji opće teorije relativnosti, kontrahirani Bianchijev identitet je posljedica invarijantnosti Hilbertove akcije na difeomorfizme.

III.3. Konačna akcija

Kompenziramo li sada površinski doprinos tako da ga oduzmemo od Hilbertove akcije i dodamo doprinose materije i kozmološke konstante...

$$
S[g, \phi] = \frac{1}{16\pi G}\Big(\int_{\mathscr{M}}(R - 2\Lambda) + \int_{\partial\mathscr{M}} 2K\Big) + S_M[g, \phi] \tag{33}
$$

Variranjem po (inverznoj) metrici dobili bi punu Einsteinovu jednadžbu.

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

A variranjem po polju ϕ, dobili bi jednadžbe polja samo iz akcije materije. S ovim smo već upoznati (npr. za akciju spin-0 skalarnog polja dobili bi Klein-Gordon jednadžbu...)

IV. RUBNI UVJETI OPĆE RELATIVNOSTI

Sve teorije s kojima smo se upoznali do sada su imale fiksiranu pozadinsku geometriju na kojoj smo se bavili fizikom i zadavali početne uvjete, ali sada upravo ta geometrija je ono što nas zanima. Stoga nije baš očito koji i kakvi su to početni uvjeti koji odgovaraju općoj teoriji relativnosti. Globalno hiperbolično prostorvrijeme $(\mathscr{M}, g_{ab})$ se može raslojiti Cauchy površinama Σ_t, koje su parametrizirane globalnom funkcijom vremena, t. U smislu da je hiperploha određena uvjetom da je $t =$const. Neka je n^a jedinično vektorsko polje normalno na Σ_t pa slijedi

$$n^a = \frac{\nabla^a t}{\sqrt{-\nabla_a t \nabla^a t}} \quad . \tag{34}$$

Zanimaju nas prostorne Σ_t i vremenski vektori n^a pa će vrijediti $n^a n_a = -1$ (minus u korijenu). Metrika g_{ab} inducira trodimenzionalnu Riemannovu metriku h_{ab} na Σ_t.

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \tag{35}$$

Lako vidimo da je ${h^a}_b$ u biti projektor na hiperplohu, odnosno s tangentnog prostora $V_p(\mathscr{M})$ od $\mathscr{M}$ u točki p, na tangentni prostor $V_p(\Sigma)$ u p. Uvjeravamo se za neki nasumični vektor v^b.

$${h^a}_b v^b = ({g^a}_b + n^a n_b) v^b = v^a + n^a (n_b v^b)$$

$$n_a {h^a}_b v^b = n_a v^a + n_a n^a (n_b v^b) = 0$$

Neka je t^a vektorsko polje na $\mathscr{M}$ koje zadovoljava $t^a \nabla_a t = 1$. t^a možemo rastaviti na dijelove normalne i tangencijalne na Σ_t definirajući *lapse funckiju* N, i *shift vektor* N^a.

$$N = -t^a n_a = (n^a \nabla_a t)^{-1} \tag{36}$$

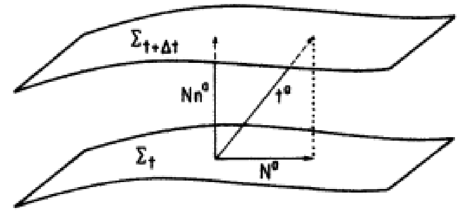
$$(n^a \nabla_a t)^{-1} = \frac{\sqrt{-\nabla_a t \nabla^a t}}{\nabla_a t \nabla^a t} = \frac{-1}{\sqrt{-\nabla_a t \nabla^a t}} = \frac{-t^a \nabla_a t}{\sqrt{-\nabla_a t \nabla^a t}} = -t^a n_a$$

$$N^a = {h^a}_b t^b \tag{37}$$

Pa možemo pisati,

$$t^a = N n^a + N^a \tag{38}$$

Lapse funkcija mjeri brzinu toka vlastitog vremena τ, u odnosu na koordinatno vrijeme t, kada se krećemo normalno na Σ_t. Dok N^a mjeri pomak tangencijalan na hiperplohu koji je sadržan u polju t^a.



Slika 1

Ako hiperplohe Σ_0 i Σ_t identificiramo difeomorfizmom koji slijedi iz integralnih krivulja od t^a, te ako interpretiramo t^a kao tok vremena, efekt evolucije u vremenu izgleda kao da $(\Sigma_0, h_{ab}(0))$ evoluira u $(\Sigma_t, h_{ab}(t))$. Odnosno prostorvrijeme $(\mathscr{M}, g_{ab})$ možemo interpretirati kao vremensku evoluciju Riemannove metrike na fiksiranoj trodimenzionalnoj (pod)mnogostrukosti. Iz ovoga bi očekivali da su među odgovarajućim početnim uvjetima Riemannova metrika h_{ab} i njena vremenska derivacija na podmnogostrukosti Σ. Iz relacije (38) možemo izraziti normalni jedinični vektor n^a.

$$n^a = \frac{1}{N}(t^a - N^a)$$

Prema ovome za metriku vrijedi

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2}(t^a - N^a)(t^b - N^b) \tag{39}$$

U konstruiranju Lagranžijanske formulacije kao varijablu polja tretirali smo inverznu metriku g^{ab}. Ako je $h^{ab} h_{bc} = \delta^a_c$ na Σ_t i $h^{ab} \nabla_b t = 0$ onda možemo tretirati (h_{ab}, N, N^a) kao varijable polja. Ali N i N^a ne smatramo dinamičkim varijablama, pošto one pripisuju dinamiku, odnosno opisuju kako se "pomičemo naprijed u vremenu". Moramo još pronaći neki objekt koji ćemo koristiti kao početni uvjet, a da je povezan s $\dot{h}_{ab}$.

Sjetimo se ekstrinzične zakrivljenosti hiperplohe K_{ab} s induciranom metrikom h_{ab} i normalnim vektorom n^a.

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \pounds_n h_{ab} = {h^c}_{(a|} \nabla_c n_{|b)} \quad .$$

Ovaj tenzor je povezan s veličinom ${h_a}^d {h_b}^e \pounds_t h_{de}$ koju možemo interpretirati kao vremensku derivaciju inducirane metrike na Σ_t. Označavati ćemo je s $\dot{h}_{ab}$. Prvo ćemo pokazati jednu relaciju koja je i intuitivna, jer je vektor n^a ortogonalan na K_{ab}. Tvrdimo da vrijedi

$${h_a}^d {h_b}^e K_{de} = K_{ab}$$

Provjeravamo za prvi član.

$${h_a}^d {h_b}^e {h^c}_d \nabla_c n_e = {h_a}^d {h^c}_d \nabla_c n_b = {h^c}_a \nabla_c n_b$$

Prva jednakost slijedi iz (29), a druga iz činjenice da h_{ab} mogu jedne drugima podizati i spuštati indekse. Za drugi član dobili bi analogan rezultat. Iz ovoga zaključujemo da kada K_{ab} projiciramo na hiperplohu opet dobijemo K_{ab}. Krećemo od istog raspisa kojeg smo i prije koristili kod (27).

$$\begin{aligned} 2K_{ab} =& n^c \tilde{\nabla}_c h_{ab} + h_{bc} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c \\ =& N^{-1}[N n^c \tilde{\nabla}_c h_{ab} + h_{bc} \nabla_a (N n^c) + h_{ac} \nabla_b (N n^c)] \\ =& N^{-1} \pounds_{Nn} h_{ab} = {h_a}^d {h_b}^e N^{-1} \pounds_{Nn} h_{de} \end{aligned}$$

Jednakost slijedi jer $h_{bc}n^c\nabla_a(N) = 0$ prema konstrukciji. Nn^a možemo izraziti preko N^a i t^a.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}h_a{}^d h_b{}^e(\pounds_t h_{de} - \pounds_N h_{de})$$

Slijedi.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}(\dot{h}_{ab} - h_a{}^d h_b{}^e \pounds_N h_{de}) \tag{40}$$

Konačno možemo reći da su prikladni početni uvjeti za opću teoriju relativnost (Σ, h_{ab}, K_{ab}), trodimenzionalna (pod)mnogostrukost Σ, te Riemannova metrika h_{ab} i simetrično tenzorsko polje K_{ab} na Σ.

V. GRAVITACIJSKI INTEGRAL PO PUTU

Prema prošlim razmatranjima mogli bismo sada napisati kako bi izgledala amplituda vjerojatnosti za stanja geometrije i polja ϕ na njoj. U analogiji s (10) koristeći akciju (33).

$$\langle h_1, \phi_1 | h_0 \phi_0 \rangle = \int_{(h_0,\phi_0)}^{(h_1,\phi_1)} \mathcal{D}g \int \mathcal{D}\phi \; e^{iS[g,\phi]} \tag{41}$$

Da smo izvodili i Hamiltonijansku formulaciju opravdali bi korištenje ove forme umjesto (7), jer bi zaista vidjeli da je Hamiltonijan kvadratan u momentu koji je konjugiran h_{ab}.

V.1. "The no-boundary proposal"

Što se tiče konačne metrike znamo što bismo očekivali, jer bi ona trebala odgovarati današnjem Svemiru. Ali što je s početnim uvjetom h_0? Postoje dva prijedloga za "no-boundary" uvjete, jedan od Hawkinga i Hartlea, i jedan od Vilenkina. Ograničimo raspravu samo na integral po metrikama.

$$\text{HH}: \int^h \mathcal{D}g \; e^{-S_E[g]} \qquad \text{V}: \int_\emptyset^h \mathcal{D}g \; e^{iS[g]} \tag{42}$$

Vilenkin[6,7] predlaže integraciju po Lorentzijanskim 4-metrikama od nestajuće početne 3-geometrije $\emptyset$ do konačne h. Dok su Hawking i Hartle[1,3] predložili integriranje po kompaktnim Euklidskim 4-geometrijama g koje induciraju h na rubu, gdje je S_E Euklidska akcija dobivena Wickovom rotacijom koordinate vremena $t \to -i\tau$. Ideja je bila da će Euklidski integral bolje konvergirati u analogiji s kvantnom teorijom polja, te da će to automatski uključiti topološki netrivijalne mnogostrukosti[2]. Ali već uključivanje takvih geometrija čini akciju neomeđenu odozdo[4]. Dodatno, Euklidska akcija sadrži negativne doprinose, poznati "problem konformalnog faktora"[5]. Moguće rješenje koje se pokušalo je da se integral proširi na kompleksne metrike, i nalaze konture u kompleksnoj ravnini, ali nemamo preskripciju koja bi to bila. Ovako zapravo nemamo dobru definiciju formalizma. To je posljedica "loše" analogije da tako kažemo, jer kvantne teorije polja su postavljene na fiksnoj pozadinskoj geometriji, pa je Wickova rotacija relativno prirodan potez. U zakrivljenom vremenu kada niti ne znamo što je točno vrijeme lako vidimo kako takva transformacija nema previše smisla. Tek nedavno formalno je dokazano da nikakav Euklidski integral ne može rezultirati rješenjem Wheeler-de Wittove jednadžbe[8].

Nasreću Lorentzijanski integral se može provesti konzistentno, čime se eliminiraju slabe analogije. Jedini problem ovdje je da je Lorentzijanski integral jako oscilatoran. Već iz definicije vidimo da nije apsolutno konvergentan, jer integriramo fazu e^{iS} preko beskonačne mjere. Feldbrugge, Lehners i Turok[9] pokazali su da je, u nekim jednostavnijim slučajevima, ipak uvjetno konvergentan. Nakon toga su uposlili Picard-Lefschetzovu teoriju da bi takve integrale pretvorili u sume apsolutno konvergentnih integrala. Naposlijetku ovaj pristup je puno prirodniji, ali iste godine, isti tim istraživača pokazao je da su linearizirane perturbacije na metrici nepotisnute[10]. Dorronsorro[13] je pokušao spasiti "no-boundary" prijedlog alternativnim konturama, ali opet FLT nešto kasnije dokazuju da nema izbora kompleksne konture koja će smiriti perturbacije[11]. Njihov rad doslovno je tvrdio da nema spasa za "no-boundary" početne uvjete. Ipak nije dugo sve bilo crno. Lehners i Di Tucci, nedugo nakon, tvrde da je moguće nametnuti Robinove rubne uvjete tako da se eliminaraju nepotisnute perturbacije (rubni uvjeti na linearne kombinacije metrike i njene prve derivacije). Njihovo početno stanje se može interpretirati kao da ima početni Euklidski moment, s kvantnom neodređenošću podijeljenom između početne veličine i momenta[12]. Ako bolje pogledamo ovo je zapravo napuštanje originalne ideje, jer gubimo početnu nula geometriju, tako da naposlijetku "no-boundary" prijedlog zaista nije spašen, ali formalizam živi dalje.

[1] J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983)
[2] S. W. Hawking, Pontif. Acad. Sci. Scr. Varia **48**, 563 (1982)
[3] J. J. Halliwell and S. W. Hawking, Phys. Rev. **D31**, 1777 (1985)
[4] G. W. Gibbons, Phys. Lett. **61A**, 3 (1977)
[5] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and M. J. Perry, Nucl. Phys. **B138**, 141 (1978)
[6] A. Vilenkin, Phys. Rev. **D30**, 509 (1984)
[7] A. Vilenkin, Phys. Rev. **D50**, 2581 (1994), arXiv:gr-qc/9403010 [gr-qc].
[8] J. Feldbrugge, J.-L. Lehners, and N. Turok, arXiv eprint, (2017)
[9] J. Feldbrugge, J.-L. Lehners, and N. Turok, Phys. Rev. **D95**, 103508 (2017), arXiv:1703.02076 [hep-th]
[10] J. Feldbrugge, J.-L. Lehners, and N. Turok, Phys. Rev. Lett. 119, 171301 (2017), arXiv:1705.00192 [hep-th]
[11] J. Feldbrugge, J.-L. Lehners, and N. Turok, Phys. Rev. **D97**, 023509 (2018), arXiv:1708.05104 [hep-th]
[12] A. Di Tucci and J.-L. Lehners, Phys. Rev. Lett. **122**, 201302 (2019), arXiv:1903.06757 [hep-th]
[13] J.D. Dorronsorro, Phys.Rev. **D96**, 043505 (2017)
[14] Robert M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press, (1984)
[15] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Princeton University Press, (2003)