Nejednakosti između fizikalnih parametara crnih rupa

Mate Picukarić
Mentor: dr.sc. Ivica Smolić
3. siječnja 2020.

SAŽETAK

Kod Kerr-Newmanovog rješenja Einsteinove jednadžbe masa, angularni moment i naboj zadovoljavaju određene nejednakosti. Dotične nejednakosti usko su povezane s pretpostavkom kozmičke cenzure te ih je moguće primjeniti i na dinamičke crne rupe zbog čega je njihovo proučavanje toliko interesantno. U ovom radu pobliže ćemo objasniti pojam geometrijske nejednakosti, navesti primjere dotičnih kao i suvremene rezultate te neriješene probleme.

I. UVOD

Glavni matematički alat opisa fizike sustava su jednakosti. To nije ništa neobično jer nam jednakosti omogućuju povezivanje različitih konstrukcija te točno određivanje nepoznatih veličina. To je od velike koristi u teorijama u kojima je rješavanje pripadnih jednadžbi jednostavno. U kompliciranijim slučajevima korisne znaju biti i nejednakosti koje odražavaju svojstva nekih ograničenja. Primjer jedne takve nalazimo u kapacitorima:

$$Q < Q_0 \tag{1}$$

Gdje je Q naboj na pločama kapacitora, a Q_0 vrijednost naboja izboja promatranog kapacitorskog sustava (ovisi o oblicima ploča, dielektriku između i slično). Naravno, ova nejednakost nije pretjerano komplicirana, ali nam daje uvid u fizikalna ograničenja sustava. Ako želimo postići konfiguraciju kapacitora tj. dvije suprotno nabijene ploče naboj na tim pločama mora biti manji od Q_0. U suprotnom, desit će se izboj što će takvu konfiguraciju učiniti neodrživom. Dakle, izbor relevantnih parametara koji opisuju sustav nije potpuno proizvoljan, već mora poštovati neke nejednakosti. Sličnu situaciju susrećemo u općoj teoriji relativosti (OTR u nastavku) gdje fizikalni parametri crnih rupa nisu potpuno proizvoljni, već neke nejednakosti moraju biti zadovoljene kako bi crna rupa bila oformljena. Razlika između OTR-a i primjera je u tom što je nejednakost (1) čisto restriktivne prirode, dok interesantne nejednakosti OTR-a posjeduju i instruktivni karakter. Iz tog razloga navodimo sljedeći primjer.

A. Izoperimetrijska nejednakost

Neka je S ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ površine $per(S)$ i volumena $vol(S)$. Tada vrijedi:

$$\operatorname{per}(S) \geq n \operatorname{vol}(S)^{\frac{n-1}{n}} \operatorname{vol}(B_1)^{\frac{1}{n}} \tag{2}$$

Gdje je $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ jedinična kugla. Jednakost vrijedi kada je S kugla u $\mathbb{R}^n$.

U $\mathbb{R}^2$ ova nejednakost nam kaže da ako je C neka glatka Jordanova krivulja koja duljine L, koja omeđuje dio površine A vrjedi:

$$L^2 \geq 4\pi A \tag{3}$$

gdje je nejednakost zadovoljena ako je krivulja kružna. Interesanno je koliko je kod ove nejednakosti specifičan granični slučaj. Osim što vrijedi za bilo koju krivulju, kod zadovoljene jednakosti točno određuje geometriju krivulje. Zbog toga ova nejednakost spada u klasu nejednakosti koje se zovu geometrijske nejednakosti. Kako je OTR geometrijska teorija, a fizikalni parametri crnih rupa definirani su geometrijski za očekivati je da će nejednakosti s kojima se susretnemo prirodno upadati u istu kategoriju.

Dokaz [2] koji ćemo prezentirati napravio je Hurwitz 1902. godine.

Dokaz:

Neka je krivulja C parametrizirana tako da $t \longmapsto (x(t), y(t))$ "prijeđe" preko C konstantnom brzinom u "vremenu" 2π. To povlači:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = L \tag{4}$$

Zbog toga što je brzina konstantna:

$$\begin{aligned} &\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = const. \Rightarrow (4) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \textstyle\int_0^{2\pi} dt = L \\ &\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\tfrac{L}{2\pi}\right)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Kako su x i y periodične funkcije, možemo ih razviti u Fourierov red:

$$\begin{aligned} &x(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, cos(nt) + b_n \, sin(nt)) \\ &\Rightarrow \dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n \, a_n \, sin(nt) + n \, b_n \, cos(nt)) \\ &y(t) = \tfrac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \, cos(nt) + b'_n \, sin(nt)) \\ &\Rightarrow \dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n \, a'_n \, sin(nt) + n \, b'_n \, cos(nt)) \end{aligned} \tag{6}$$

Ako je C pozitivno orijentirana, površina A iznosi:

$$\begin{aligned} &A = -\int y dx = -\int_0^{2\pi} y\dot{x} \, dt = -\pi \, \langle y, \dot{x} \rangle = \\ &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-n \, a_n b'_n + n \, b_n a'_n) = \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(\, a_n b'_n - \, b_n a'_n) \end{aligned} \tag{7}$$

Duljina krivulje tj. opseg površine zbog konstantnosti brzine iznosi:

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\right)^2 \\ &= \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^{\,2} \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt\right)^2 \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \dot{x}^2+\dot{y}^2\,dt \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+{a'}_n^2+{b'}_n^2) \end{aligned} \tag{8}$$

Koristeći (7) i (8) dobivamo:

$$\begin{aligned} &L^2 - 4\pi A = \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2(a_n^2+b_n^2+{a'}_n^2+{b'}_n^2) - 2n(\,a_n b'_n -\, b_n a'_n)\right] \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - b'_n)^2 + (nb_n + a'_n)^2 \\ &+(n^2-1)({a'}_n^2+{b'}_n^2)] \end{aligned} \tag{9}$$

Očito je da je gornji izraz veći ili jednak nula. Jednakost je zadovoljena ako vrijedi:

$$na_n - {b_n}' = 0 \tag{10}$$

$$nb_n + {a_n}' = 0 \tag{11}$$

$${a_n}' = 0 \tag{12}$$

$${b_n}' = 0 \tag{13}$$

Gdje jednadžbe (12) i (13) vrijede za $n > 1$. Za $n > 1$ stoga trivijalno vrijedi $a_n = b_n = {a_n}' = {b_n}' = 0$. Za $n = 1$ s druge strane imamo:

$$1 \cdot a_1 - {b_1}' = 0 \tag{14}$$

$$1 \cdot b_1 - {a_1}' = 0 \tag{15}$$

Iz čega slijedi ${b_1}' = a_1$ te ${a_1}' = b_1$. Konačno rješenje stoga je:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{a_0}{2} + a_1\,cos(t) + b_1\,sin(t) \\ y(t) &= \tfrac{{a_0}'}{2} - b_1\,cos(t) + a_1\,sin(t) \end{aligned} \tag{16}$$

što odgovara kružnici. Time smo dokazali izoperimetrijsku nejednakost za $\mathbb{R}^2$ slučaj.

II. KOSA CRNIH RUPA I KOZMIČKA CENZURA

U ovom poglavlju navodimo dvije ozbiljne hipoteze manje ozbiljnog naziva. Te hipoteze odigrat će bitnu ulogu u daljnjim razmatranjima dijelom kao temeljna pretpostavka, a dijelom kao podupiruće činjenice. Hipoteza o ne postojanju kose crnih rupa jedna je od motivacija koja stoji iza razmatranja geometrijskih nejednakosti u kontekstu OTR-a. Ovdje ćemo se samo doatknuti njezinih glavni ideja, a za više detalja referiramo se na [3]. Ona kaže da je kranje stanje gravitacijskog kolapsa koji rješava Maxwell-Newtonove jednadžbe u potpunosti opisano klasičnim parametrima: masom, angularnim momentom te nabojem. S time na umu, nejednakosti koje bi se između tih parametara javile povzivale bii relevantne parametre za opis gravitacijskog kolapsa te time dale restrikcije na geometriju prostorvremena. Naravno, hipoteza o ne postojanju kose još uvijek je hipoteza u formalnom smislu. Nije dokazana za općeniti slučaj gravitacijskog kolapsa, iako je potvrđena za sve nama relevantne slučajeve u obliku tzv. "no-hair" teorema za stacionarne crne rupe.

S druge strane hipoteza o kozmičkoj cenzuri govori nam o stukturi krajnjeg produkta gravitacijskog kolapsa. Gravitacijski kolaps nerijetko rezultira singularitetom. Pojednostavljeno, singularitet je točka u prostorvremenu u kojoj se pretpostavlja da je gravitacijska privlačnost beskonačna. Kako ne poznajemo fiziku u singularitetu (zbog toga što su to singularne točke u rješenjima Einsteinove jednadžbe) ne možemo odrediti što bi se desilo s promatračem (tijelom) koji bi do njega došao. Postojanje točke koju promatrač može doseći u kojoj se ne može predvidjeti njegova sudbina narušilo bi determinizam OTR-a. Zbog toga je Roger Penrose 1969. formulirao pojam kozmičke cenzure koji kaže da u svemiru ne postoje "goli" singulariteti tj. da je svaki singularitet sakriven iza horizonta događaja. Horizon događaja je ploha koja okružuje ("cenzurira") singularitet, koja, ako se prijeđe (tako da uđemo u nju), ne dopušta povratak natrag u ostali dio svemira. Horizonti događaja se prirodno javljaju u mnogim ješenjima Einsteinove jednadžbe. Time je determinizam OTR-a spašen činjenicom da je promatrač koji dosegne singularitet već u području iz kojeg nema povratka, tj. teorija je potpuno deterministička za područje van horizonta dok je nepoznato područje sakriveno iza horizonta te bez obzira na događaje unutar horizonta i ponašanje singulariteta ne može utjecati na ostatak "relevantnog" svemira.

III. SCHWARZSCHILDOVO RJEŠENJE

Einsteinova jednadžba za opću teoriju relativnosti glasi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{17}$$

Ona povezuje geometrijska svojstva prostorvremena s lijeve strane jednadžbe sa sadržajem prostorvremena s desne. Tako se s lijeve strane nalaze Riccijev tenzor $R_{\mu\nu}$ i Riccijev skalar R koji nose informaciju o zakrivljenosti prostorvremena, a s desne tenzor $T_{\mu\nu}$ koji nosi informaciju o sadržaju energije i impulsa i gravitacijska konstanta G. Znamo da je Riccijev tenzor dobiven kontrakcijom Riemannovog tenzora, preciznije:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{18}$$

dok je Riccijev skalar dobiven kontrakcijom Riccijevog tenzora:

$$R = R^{\lambda}{}_{\lambda} \tag{19}$$

Kako je Riemannov tenzor dan preko derivacija Christoffelovih simbola:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \tag{20}$$

gdje su Christoffelovi simboli definirani kao:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}}\right) \tag{21}$$

Možemo vidjeti da se radi o sustavu vezanih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. Einsteinovu jednadžbu je stoga vrlo netrivijalno riješiti. Dapače, postoji tek nekolicina rješenja ove jednadžbe.

Napomena: *Pod "rješenje jednadžbe" misli se pronaći metriku $g_{\mu\nu}$ (nekada oznake ds^2) koja će za neku zadanu raspodjelu energije u prostorvremenu $T_{\mu\nu}$ zadovoljavati jednadžbu (17).*

Najjednostavniji primjer rješenja je ono za sfernosimetrični (u prostornom smislu) prostorvremenski vakuum, također poznato i kao Schwarzschildovo rješenje:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega \tag{22}$$

gdje je $d\Omega^2$ standardna metrika na jediničnoj 2-sferi:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{23}$$

Birkhoffov teorem kaže nam da je Schwarzschildovo rješenje ujedno i jedinstveno sfernosimetrično vakuumsko rješenje. S obzirom da je jedini parametar koji opisuje ovakvo rješenje M, kojeg ćemo kasnije definirati kao masu, Birkhoffov teorem također spada u klasu "no-hair" teorema.

Primjetimo da u $r = 0$ i $r = 2GM \equiv R_s$ komponente metrike divergiraju. S obzirom da su komponente metrike koordinatno ovisne, moguće je da ćemo divergenciju otkloniti promjenom koordinatnog sustava ako ona nije koordinatno neovisna tj. topološka. To je moguće učiniti za $r = 2GM$ koji se još zove Schwarzschildov radijus, ali nije moguće za $r = 0$. Točka $r = 0$ je točno singularitet, a 2-sfera $r = 2GM$ točno horizont događaja o kojima smo pričali u poglavlju II što karakterizira crnu rupu. Tako je, sukladno s hipotezom o kozmičkoj cenzuri, singularitet sakriven iza horizonta događaja. Za više detalja o izvodu horizonta i geodezicima (putanjama) u Schwarzschildovom rješenju upućujemo u [4].

IV. PARAMETRI

S obzirom da smo u II. poglavlju rekli kako su rješenja stacionarnih crnih rupa karakterizirana masom, angularnim momentom i nabojem, valjalo bi ih definirati prije nastavka diskusije. Ideja je da pronađemo kvazilokalne veličine koje su globalno očuvane i poklapaju se s parametrima koji karakteriziraju nadolazeća rješenja.

Sve ove veličine bit će zadane integralom nekog polja po prostornoj hiperplohi. Prostornu hiperplohu možemo zamisliti kao jedan "trenutak" prostorvremena za neku definiranu vremensku koordinatu. Dobru definiranost takve koordinate osigurava nam stacionarnost rješenja. Kako bismo definirali naboj krenut ćemo od od tenzora jakosti lektromagnetskog polja $F_{\mu\nu}$. Maxwellove jednadžbe u kovarijantnoj formi govore nam da je četverovektor struje naboja:

$$\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} = J_e^{\mu} \tag{24}$$

Naboj koji prolazi tada kroz neku prostornu hiperplohu (sve točke na njoj povezane su prostornim putevima) dan je integralom po koordinatama x^i na hiperplohi:

$$Q = -\int_{\Sigma} d^3x\sqrt{\gamma}\, n_{\mu}J_e^{\mu} \tag{25}$$

gdje je γ_{ij} inducirana metrika na hiperplohi, a n_{μ} vektor normale na hiperplohu. Koristeći (24) možemo pisati:

$$Q = -\int_{\Sigma} d^3x\sqrt{\gamma}\, n_{\mu}\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} \tag{26}$$

pa uz korištenje Stokesovog teorema dobivamo integral po rubu od Σ:

$$Q = -\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}\, n_{\mu}\sigma_{\nu}F^{\mu\nu} \tag{27}$$

gdje je $\gamma_{ij}^{(2)}$ inducirana metrika na $\partial\Sigma$, a σ_{ν} pripadni vektor normale.

Energiju tj.masu definiramo novom strujom koristeći vremenski Killingov vektor K^{μ}:

$$J_R^{\mu} = K_{\nu}R^{\mu\nu} \tag{28}$$

gdje je $R^{\mu\nu}$ Riccijev tenzor. Ova struje može se napisati[4] kao:

$$J_R^{\mu} = \nabla_{\nu}(\nabla^{\mu}K^{\nu}) \tag{29}$$

pa se onda ukupna energija definirana kao:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\Sigma} d^3x\sqrt{\gamma}\, n_{\mu}J_R^{\mu} \tag{30}$$

može, korištenjem (29) i Stokesovog teorema, zapisati kao:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}\, n_{\mu}\sigma_{\nu}\nabla^{\mu}K^{\nu} \tag{31}$$

U potpunoj analogiji sa slučajem energije/mase možemo definirati angularni moment. Zamislimo da imamo rotacijski Killingov vektor $R = \partial_{\phi}$. Tada u analogiji s (28) možemo definirati struju:

$$J_{\phi}^{\mu} = R_{\nu}R^{\mu\nu} \tag{32}$$

Te je u analogiji s (31) (uz adekvatne popravke konstanti) konačni angularni moment:

$$J = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}\, n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu R^\nu \tag{33}$$

Korisno je definirati još jednu kvazilokalnu veličinu, a to je površina horizonta crne rupe A. Ona je definirana kao:

$$A = \int_H \sqrt{\gamma^{(2)}} d^2x \tag{34}$$

gdje je $\gamma_{ij}^{(2)}$ inducirana metrika na horizontu, a x^i pripadne koordinate. Za Schwarzschildovu crnu rupu, primjerice, površina A iznosi $A = 4\pi(2GM)^2$ što je i očekivano zbog sferne simetrije.

V. KERROVE (KERR-NEWMANOVE) CRNE RUPE

Za razliku od Schwarzschildovog rješenja Einsteinove jednadžbe koje je sfernosimetrično, Kerr-Newmanovo rješenje opisuje rotirajuću nabijenu crnu rupu. Mi ćemo se u ovom poglavlju zbog jednostavnosti zapisa zadržati na Kerrovom rješenju koje opisuje nenabijenu rotirajuću crnu rupu jer se fenomenološki ne razlikuje od nabijenog poopćenja. Kerrova metrika izgleda ovako:

$$\begin{aligned} s^2 = &-\left(1-\tfrac{2MG}{\rho}\right)dt^2 - \tfrac{2GMar\sin^2\theta}{\rho^2}(dtd\theta + d\theta dt) \\ &+\tfrac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \tfrac{\sin^2\theta}{\rho}\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right]d\phi^2 \end{aligned} \tag{35}$$

Gdje su Δ i ρ pokrate za:

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \tag{36}$$

$$\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{37}$$

Ovdje je $a = J/M$ gdje su J i M točno parametri definirani jednadžbama (31) i (33). U Kerr-Newmanovo rješenje koje uključuje električni naboj Q i magnetski naboj P (jdb. (26) uz $F^{\mu\nu} \to *F^{\mu\nu}$) jednostavno prelazimo zamjenom $GMr \to 2GMr - G(Q^2+P^2)$.

Kako bismo pronašli horizonte kod ovakve crne rupe tražimo kada je $g^{rr} = 0$. Kako je $g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2}$ (zbog podizanja indeksa člana uz dr^2 iz (35)), a iz (37) vidimo $\rho \geq 0$ zaključujemo da je $g^{rr} = 0$ kada je:

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 = 0 \tag{38}$$

To nas dovodi do kvadratne jednadže u r koju moramo riješiti kako bismo pronašli položaje horizonta. Rješenja jednadžbe (38) su:

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} \tag{39}$$

Očito broj horizonata u opisanoj crnoj rupi ovisi o iznosu diskriminante u jednadžbi (38). Ako vrijedi $G^2M^2 > a^2$ imat ćemo dva horizonta dok ćemo za $G^2M^2 = a^2$ imati samo jedan. Crna rupa koja zadovoljava (35) i ima dva horizonta zove se Kerrova crna rupa, dok je ona s jednim horizontom ekstremna Kerrova. Interesantno je pogledati slučaj kada:

$$G^2M^2 < a^2 \tag{40}$$

Ako je ta nejednakost zadovoljena jednadžba (38) neće imati realnih rješenja tj. imat ćemo singularitet bez horizonta, a takvu smo mogućnost već odbacili u poglavlju II. Iz tog se razloga zadnji slučaj odbacuje kao nefizikalan. Kako je $a = J/M$ slijedi da fizikalno rješenje mora zadovoljavati:

$$M \geq \sqrt{\frac{|J|}{G}}\,(=\text{Ekstremna Kerrova c.r.}) \tag{41}$$

Valja uočiti usku povezanost nejednakosti (41) s hipotezom kozmičke cenzure. Argument kozmičke cenzure koristio nam je kako bismo odbacili slučaj (40) kao nefizikalan što nas je i dovelo do ovog ograničenja. Ako još primjetimo da smo veličine M i J definirali potpuno geometrijski (u (33) i (31) koriste se samo Killingovi vektori i Riccijev tenzor što su sve svojstva geometrije prostora povezana s fizikalnim preko Einsteinove jednadžbe) možemo reći da smo slično kao u (3) došli do nejednakosti koja stavlja neka ograničenja na geometriju prostora i točno opisuje geometriju u slučaju jednakosti - točnije, do prve relevantne geometrijske nejednakosti.

VI. GEOMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI

Većina diskusije u ovom tekstu preuzeta je iz [6] i [7] zbog čega na njih upućujemo za više detalja. U nastavku ćemo raditi s konvencijom $G = 1$.

U prethodnom poglavlju susreli smo se s nejednakosti

$$M \geq \sqrt{|J|}\,(=\text{Ekstremna Kerrova c.r.}) \tag{42}$$

Za Kerrovu crnu rupu, koristeći jednadžbu (34), može se izračunati površina horizonta koja iznosi:

$$A = 8\pi\left(m^2 + \sqrt{m^4 - J^4}\right) \tag{43}$$

Iz toga je lako iščitati još jednu nejednakost:

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m\,(=\text{Swarzschild}) \tag{44}$$

Pri čemu se koristimo činjenicom da Kerrovo rješenje teži u Schwarzschildovo za $J = 0$. Ako još kvadriramo (42) i upotrijebimo (42) dobit ćemo:

$$8\pi|J| \overset{(42)}{\leq} 8\pi m^2 \overset{(43)}{=} A - 8\pi\sqrt{m^4 - J^2} \leq A \tag{45}$$

Gdje jednakost vrijedi u slučaju ekstremne Kerrove crne rupe. Tako smo koristeći samo (42) i (43) dobili nejednakosti:

$$\sqrt{|J|} \leq M \,(=\text{Ekstremna Kerrova c.r.}) \quad (46)$$

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m \,(=\text{Swarzschild}) \quad (47)$$

$$8\pi|J| \leq A \,(=\text{Ekstremna Kerrova c.r.}) \quad (48)$$

Razlog zbog kojeg su dotične nejednakosti interesantne je zbog toga što se njihova upotreba pronalazi i u općenitijim slučajevima gravitacijskog raspada. Penrose je, primjerice, u svom poznatom članku [1] predložio fizikalne argument koji povezuju globalna svojstva gravitacijskog kolapsa s geometrijskim nejednakostima na početne uvjete. Ti su argumenti doveli do poznate Penroseove nejednakosti (46) bez nametanja zahtjeva na simetrije prostorvremena! U nastavku sagledat ćemo njegove argumente uz pojednostavljenje kroz dva zahtjeva: osnu simetriju te pretpostavku da vrijedi (48). Za nastavak diskuje treba spomenuti Hawkingov teorem o površini crnih rupa. Ovdje ćemo ga navesti bez dokaza, a za više detalja referiramo se na [5]

Uz slabu energijsku pretpostavku i kozmičku cenzuru, površina horizonta događaja budućnosti u asimptotski ravnom prostorvremenu je nepadajuća

Bez previše ulazaka u detalje, ovaj teorem (uz neke tehničke pretpostavke) govori nam da površina horizonta nikada ne opada. Tehničke pretpostavke će, naravno, biti zadovoljene u slučaju koji razmatramo. Koristeći (43) možemo za dinamičke crne rupe kvazilokalno definirati masu. Ne koristimo se formulom (31) jer za njih ne postoji nužno vremenski Killingov vektor koji bi nam omogućio njezino korištenje. Tako je novodefinirana masa m_{bh} dana s:

$$m_{bh} = \sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}} \quad (49)$$

Pretpostavit ćemo da sljedeće tvrdnje vrijede u gravitacijskom kolapsu:

1. Gravitacijski kolaps rezultira u crnoj rupi (slaba kozmička cenzura).
2. Konačno stanje prostorvremena je stacionarno. Također, pretpostavit ćemo da je nakon nekog konačnog vremena sva materija upala u crnu rupu (prešla horizont događaja).

Teorem o jedinstvenosti crnih rupa kaže da je konačno stacionarno stanje koje se spominje u 2. dano točno Kerrovom crnom rupom (podsjetimo se da smo pretpostavili osnu simetriju).Neka su m_0, J_0, i A_0 masa, angularni moment i površina konačne Kerrove crne rupe. Penroseov argument je sljedeći: uzmimo Cauchyjevu površinu S (ugrubo, kompletne "prostorne" početne uvjete u nekom trenutku) takvu da se gravitacijski kolaps već dogodio. Neka Σ označava prsjek horizonta događaja s S te neka je A njegova površina. Neka su (m, J) ukupna masa i angularni moment u prostornoj beskonačnosti. Te veličine se sve mogu izračunati na površini S. Po teoremo o površini crne rupe početna površina može samo rasti tj.:

$$A_0 \geq A \quad (50)$$

Nadalje, s obzirom da gravitacijski valovi nose pozitivnu energiju[4], ukupna masa u prostorvremenu mora biti veća od konačne mase preostale crne rupe:

$$m \geq m_0 \quad (51)$$

U općenitom slučaju nije toliko jednostavno povezati J s konačnim J_0. Angularni moment generalno nije očuvan, ali u slučaju osne simetrije jest stoga vrijedi:

$$J = J_0 \quad (52)$$

Može se pokazati[6] da je pretpostavka da vrijedi (48) nužna kako bi masa crne rupe pratila povećanje njezine površine tj. $\delta A \geq 0 \rightarrow \delta m_{bh} \geq 0$. Prirodno je stoga bilo pretpostaviti da bi svaka osnosimetrična crna rupa trebala zadovoljavati (48). Postojanje crne rupe koja ne poštuje (48) ukazivala bi na to da m_{bh} definiran u (49) nema željeno fizikalno značenje. Stoga, s obzirom na pretpostavku imamo povećanje mase crne rupe:

$$m_{bh} \leq m_0 \quad (53)$$

Koristeći (49), (51) i (53) imamo:

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}} = m_{bh} \leq m \quad (54)$$

Ova nejednadžba predstavlja poopćenje Penroseove nejednakosti na crne rupe s angularnim momentom. Također korištenjem (48) i prethodne jednadžbe dobivamo:

$$\sqrt{\tfrac{A}{16\pi} + \tfrac{4\pi J^2}{A}} \overset{(48)}{\geq} \sqrt{\tfrac{\cancel{8\pi}|J|}{\cancel{16\pi}_2} + \tfrac{\cancel{4\pi} J^{\cancel{2}}}{\cancel{8\pi}_2 \cancel{|J|}}} = \sqrt{|J|} \overset{(54)}{\leq} m \quad (55)$$

Iz svega ovoga možemo postaviti hipotezu:

Tri geometrijske nejednakosti (46), (47) i (48) koje vrijede za Kerrovu crnu rupu očekuje se da vrijede i za osnosimetričnu dinamičku crnu rupu.

Penroseova nejednakost (47) vrijedi i bez zahtjeva osne simetrije. Primjetimo da bi protuprimjer nejednakosti (54) implicirao da kozmička cenzura ne vrijedi. S druge strane dokaz nejednakosti podupirao bi hipotezu kozmičke cenzure, s obzirom da je vrlo teško razumijeti zašto bi ova jako netrivijalna nejednakost vrijedila ako kozmička cenzura ne bi služila kao temeljno fizikalno obrazloženje.

VII. TEOREMI I OTVORENI PROBLEMI

U ovom poglavlju navodimo neke glavne rezulate iz ovog područja istraživanja. Najviše proučavana je Penroseova nejednakost (47) koja, kao što smo već napomenuli, vrijedi i bez zahtjeva na simetriju. Glavne dokaze te nejednakosti napravili su Huisken i Ilmanen [8] te Bray [9] za Riemannove mnogostrukosti. U [8] korištena je metoda slabog toka inverzne usrednjene zakrivljenosti, dok je u [9] korišten teorem o pozitivnoj masi koji kaže da je ukupna masa u asimptotski ravnom prostorvremenu (uz dominantni uvjet na energiju) nenegativna pri čemu je 0 samo ako za prostorvrijeme Minkowskog. Slučaj Penroseove nejednakosti s angularnim momenom (54) znatno je manje istražen.

S druge strane, nejednakosti (46) i (48) nisu općenito dokazane. Napredak je napavljen u obliku teorema sa određenim zahtjevima na simetrije crnih rupa. Za (48) imamo sljedeći dokazani teorem

Teorem 1 *[10]Neka je zadan osnosimetričan, asimptotski ravan i maksimalan početni skup podataka s dva asimptotska kraja. Neka su m i J ukupna masa i angularni moment na jednom od krajeva. Tada vrijedi sljedeća njednakost:*

$$\sqrt{|J|} \leq m \text{ (=Ekstremna Kerrova c.r.)} \tag{56}$$

Za kvazilokalnu nejednakost (46) imamo:

Teorem 2 *Neka je zadana osnonosimetrična, zatvorena, marginalno zatočena i stabilna površina Σ u prostorvremenu s nenegativnom kozmološkom konstantom koje zadovoljava dominantni uvjet na energiju. Tada vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$8\pi|J| \leq A \text{ (=Ekstremni Kerrov horizont)} \tag{57}$$

gdje su A i J površina i angularni moment površine Σ

Ovaj teorem, za razliku od prvog koji je bio u potpunosti globalan (ukupna masa i angularni moment u prostorvremenu), je u potpunosti lokalan rezultat. Točnije ne spominje se nikakva trodimenzionalna mnogostrukost u koji je Σ uronjen. Također, ne spominje se vakuum kao pretpostavka teorema. Dapače, nejednakost vrijedi i kada polja materije imaju angularni moment koji mogu izmjenjivati s crnom rupom. Ne postoji jedinstveni članak u kojemu je Teorem 2 dokazan, već je nadopunjavan kroz niz članaka umanjivanjem jačine pretpostavki teorema. Stoga, za povijesni kontekst i uvid u reference upućujemo na [6].

Intersantno je što se pretpostavlja[11] da nejednakost oblikom sličnu (48) moraju zadovoljavati **sva** tijela, a ne samo crne rupe. Neka je U rotirajuće tijelo s angularnim momentom $J(U)$ te mjerom veličine $R(U)$ u jedinicama duljine. Tada se vjeruje da vrijedi:

$$R^2(U) \gtrsim \frac{G}{c^3}|J(U)| \tag{58}$$

Znak za nejednakost odabran je kako bi simbolizirao da se radi o nejednakosti između redova veličine dok se ne fiksiraju konstante prilikom odabira mjere veličine $R(U)$.

Na poslijetku ćemo nabrojati otvorene probleme u području geometrijskih nejednakosti fizikalnih parametara crnih rupa. Za globalnu nejednakost (46) postoje dva glavna otvorena problema koji se bave generalizacijom pretpostavki Teorema 1:

1. Uklanjanje maksimalnog uvjeta

2. Generalizacija za asimptotski ravne mnogostrukosti s više krajeva

Postignuto je ublaženje pretpostavke maksimalnost početnog skupa podataka u [13], dok se za 2. se vjeruje da je rješiv poblem jer se i na takva prostorvremena apliciraju fizikalni argumenti prezentirani u poglavlju IV., a pronađene su i numeričke potvrde[12] za neke slučajeve. Jedan od problema predstavlja i:

3. Dokaz Penroseove nejejednakost koja uključuje angularni moment (54)

Te na poslijetku problemi vezani uz nejednakost (48) i Teorem 2:

4. Generalizacija nejednakosti (48) bez osne simetrije

5. Generalizacija nejednakosti (48) na obična tijela

Ako se na trenutak vratimo na (33) možemo se podsjetiti da smo angularni moment definirali koristeći rotacijski Killingov vektor R^ν. Razlog zbog kojeg 4. predstavlja toliki problem je iz razloga što u odsustvu osne simetrije ne postoji rotacijski Killingov vektor, a samim time i dobro definiran kvazilokalni angularni moment. Problem 4. tako se svodi na matematički izazov definiranja adekvatnog angularnog momenta u općenitom slučaju. Za više detalja o problemu 5. referiramo se na [11].

VIII. ZAKLJUČAK

Počevši od Kerrovog rješenja Einsteinove jednadžbe uz pretpostavku kozmičke cenzure došli smo do skupa nejednakosti (46), (47), (48) koje smo zatim, prateći pojednostavljen Penroseovu argumentaciju, poopćili na dinamičke osnosimetrične crne rupe. Na poslijetku smo naveli neke dokazane teoreme i otvorene probleme u području geometrijskih nejednakosti fizikalnih parametara crnih rupa. Može biti zbunjujuće zašto su nam od interesa bili teoremi koji s naoko jačim pretpostavkama pokazuju ono što je Penrose uspio pokazati bez pretpostavki na simetriju sustava. Razlog tome je što se Penroseova dedukcija velikim dijelom oslanjala na hipotezu kozmičke cenzure koja, iako fizikalno razumna, sama nije potvrđena. Tako bi dokazivanje navedenih jednakosti u općenitim slučajevima bez oslanjanja na hipotezu kozmičke cenzure moglo poslužiti kao svojevrstan dokaz hipoteze koja nas je fizikalnom intuicijom dovela do istih zaključaka.

[1] R. Penrose: *Naked singularities*, Ann. New York Acad. Sci.,224:125-134, 1973.
[2] Blaschke, Wilhelm: *Die Grundlehren der Mathematischen* Wissenschaften. Berlin: Springer Verlag, 1950. Print.
[3] Suzana Bedić: *Kosa crnih rupa*, PMF 2016.
[4] Sean M. Carroll: *Spacetime and Geometry*, Pearson Education 2018.
[5] Robert M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago. 1984.
[6] Sergio Dain: *Geomeric inequalities for black holes*
[7] Sergio Dain: *Geomeric inequalities for axially symmetric black holes*
[8] G.Huisken,T. Ilmanen: *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*, J. Differential geometry, 59:352-437, 2001.
[9] H. L. Bray: *Proof of the Riemannia Penrose conjecture using the positive mass theorem*, J. Differential Geometry, 59:177-267, 2001.
[10] S. Dain: *Proof of the angular momentum-mass inequality for axially symmetric black holes*, J. Differential Geometry, 79(1):33-67, 2008, gr-qc/0606105
[11] S. Dain: *Inequality between size and angular momentum for bodies*, Phys. Rev. Lett., 112:041101, Jan 2014, 1305.6645
[12] S. Dain, O.E. Ortiz: *Numerical evidences for the angular momentum mass inequality for multiple axially symmetric black holes*, Phys. Rev., D80:024045, 2009, 0905.0708
[13] X. Zhou: *Mass angular momentum inequality for axisymmetric vacuum data with small trace*, ArXiv e-prints, Sept. 2012,1209.1609