

Kvantna računala i kvantni algoritmi: Implementacija C-not kvantnih logičkih vrata korištenjem zatočenih hladnih iona

Matej Kovačević*

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Bijenička 32, 10 000 Zagreb
22. siječnja 2023.

mentor: prof.dr.sc. Hrvoje Buljan

Cilj ovog seminarskog rada je dati kratki uvod u kvantno računanje i objasniti ključne razlike u paradigmi pri prijelazu iz klasične na kvantnu teoriju informacije. Objašnjena je motivacija za eksperimentalnu realizaciju dvo-bitnih logičkih vrata te su analizirani dosadašnji napori u dobivanju istih implementacijom qubita pomoću laserski hlađenih zatočenih iona. Na kraju su ukratko navedeni izazovi koji još stoje pred kvantnim računanjem prije eventualnog postizanja tzv. kvantne nadmoći.

I. Uvod u kvantno računanje

Qubit

U klasičnoj teoriji informacije *bit* predstavlja najmanju jedinicu informacije. Može poprimiti dva stanja, 0 ili 1. Kvantna mehanika nudi mogućnost da uvedemo superpoziciju te tako dobijemo sustav u stanju:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1)$$

To stanje onda predstavlja tzv. *kvantni bit* ili kraće *qubit*. Za stanje superpozicije se često, pomalo nespretno, navodi da je to stanje u kojem je sustav u isto vrijeme "i nula i jedan" ili da je stanje negdje "između", no činjenica je da je stanje superpozicije isključivo kvantno svojstvo za koje nemamo dobar klasični analogon. Upravo superpoziciju, zajedno s dodatnim, isključivo kvantnim svojstvom, isprepletenošću, nastoji iskoristiti kvantna teorija informacije kako bi računске operacije i algoritme učinila efikasnijima i uvela mogućnosti koje nisu ostvarive na klasičnim računalima. Formalno je, dakle, qubit jedinični vektor iz kompleksnog dvodimenzionalnog vektorskog prostora s ortonormiranom bazom, po analogiji s klasičnim bitovima, označenom $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Iako se qubit zbog superpozicije može naći u bilo kojem od beskonačno stanja, iz njega nije moguće izvući više od jednog klasičnog bita informacije. To je tako jer mjerenje qubita u odnosu na neku bazu kolabira stanje iz superpozicije u jedno od svojstvenih stanja s vjerojatnošću koja je proporcionalna kvadratu amplitude tog stanja u superpoziciji. Rezultat mjerenja je i dalje jedna od dvije mogućnosti, 0 s vjerojatnošću $|\alpha|^2$ ili 1 s vjerojatnošću $|\beta|^2$. Dakle, jedan qubit nije nadmoćan nad klasičnim bitom, ali moć kvantnog računanja dolazi do izražaja kombinacijom više qubita.

Više qubita

Sustav od N klasičnih bitova možemo opisati $2N$ -dimenzionalnim vektorom stanja, ali sustav od N qubita možemo opisati 2^N -dimenzionalnim vektorom stanja što znači da prostor stanja eksponencijalno raste s porastom broja qubita za razliku od linearnog porasta s brojem klasičnih bitova. Razlika dolazi od toga što se klasični bitovi kombiniraju kartezijevim produktom, a kvantni bitovi tenzorskim produktom. Ukratko, ako su V i W dvodimenzionalni vektorski prostori s bazama $\{v_1, v_2\}$ i $\{w_1, w_2\}$, baze kartezijevog produkta $(V \times W)$ i tenzorskog produkta $(V \otimes W)$ su $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ i $\{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2\}$ respektivno. Sad je jasno vidljivo da je $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$, a $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$. U slučaju baze za stanje 2 qubita uvodi se notacija $|0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |00\rangle$. Stanje dva qubita opet se može naći u superpoziciji baznih vektora, a neka od tih stanja spadaju u isprepletena stanja

*mkovacev.phy@pmf.hr

(primjerice $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$). Iskorištavanje svojstva isprepletenosti također je važan dio mehanizma računanja i procesuiranja informacija kod kvantnih računala. Spomenuto eksponencijalno povećanje prostora stanja vezanih qubita je dalo nadu da će onda problemi koji zahtijevaju eksponencijalno vrijeme rješavanja na klasičnom računalu postati linearni u vremenu na kvantnom računalu. Vjerojatno najpoznatiji takav primjer je Shorov algoritam za rastavljanje broja na proste faktore koji je za kvantna računala polinomijalan u vremenu dok je faktorizacija za klasična računala NP problem.

Kvantna logička vrata

U klasičnoj teoriji informacije logičke operacije nad bitovima možemo opisati tzv. logičkim vratima. Analogon njima su kvantna logička vrata koja s obzirom da opisuju transformacije kvantnomehaničkog sustava moraju odgovarati unitarnim operatorima. Primjer jednih jednobitnih kvantnih logičkih vrata su NE-vrata koja označavamo operatorom X . Njihovo djelovanje jest sljedeće:

$$\begin{aligned} X : |0\rangle &\rightarrow |1\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow |0\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

što prepoznamo kao analogno djelovanju klasičnih NE-vrata. Matrično se ta vrata mogu zapisati i na sljedeći način:

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|. \quad (3)$$

Važna jednobitna kvantna logička vrata su Hadamardova vrata H koja "rotiraju" kvantni bit i time omogućuju stvaranje superpozicije. Ako su primijenjena individualno na N qubita u stanju $|0\dots 0\rangle$, transformiraju sustav u stanje superpozicije svih 2^N mogućnosti.

$$\begin{aligned} H : |0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

Najvažniji primjer dvobitnih kvantnih logičkih vrata su kontrolirana NE-vrata, C_{not} . Ona djeluju na stanje dva qubita i to na način da promjene drugi qubit iz $|0\rangle$ u $|1\rangle$ i obratno ako je prvi qubit u stanju $|1\rangle$, a ostave ga nepromijenjenog ako je prvi qubit u stanju $|0\rangle$. Zbog toga prvi qubit nazivamo kontrolni (eng. *control*), a drugi qubit ciljani (eng. *target*). Njihovo djelovanje je, stoga, definirano ovako:

$$\begin{aligned} C_{not} : |00\rangle &\rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |10\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Razlog zbog kojeg su C_{not} vrata izrazito bitna je taj što je pokazano da se bilo koji račun na registru qubita može dekomponirati na niz dvobitnih operacija (kao što je upravo C_{not}) u kombinaciji s jednobitnim operacijama. [1–3]

II. Zatočeni ioni kao qubiti

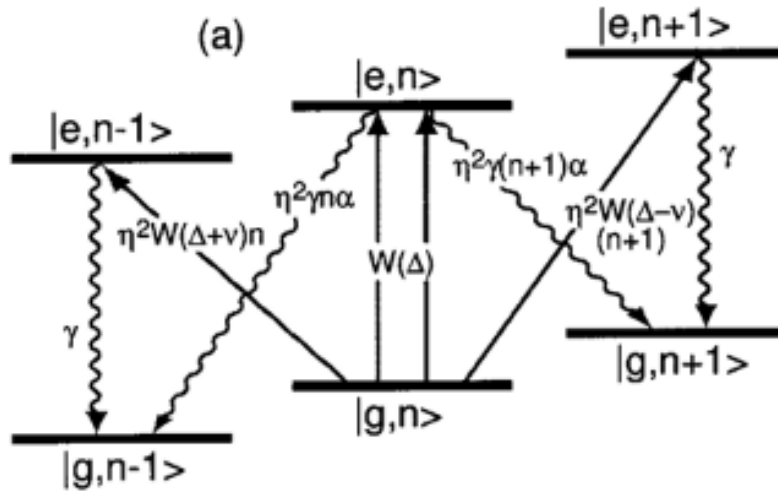
Nameće se pitanje kako konstruirati qubit u realnom svijetu. U principu svaki kvantni sustav s dva nivoa može biti qubit kojem jedan nivo predstavlja $|0\rangle$, a drugi $|1\rangle$. Najveći inženjerski problem očekivano predstavlja dekoherencija koja narušava nužna kvantna svojstva qubita. Potrebna je vrlo visoka razina izoliranosti qubita od okoline kako bi se sačuvala koherencija na vremenskim skalama duljim od onih potrebnih za obavljanje željene operacije. Nekoliko je predloženih i eksperimentalno dobivenih realizacija qubita, od kojih su neke: supravodljivi qubiti, kvantne točke, fotonski qubiti, zatočeni atomi i ioni. Laserski ohlađene zatočene ione kao fizičku realizaciju qubita predložili su Cirac i Zoller 1995 [4]. Osnovno stanje takvog iona, $|g\rangle$ odgovara stanju qubita $|0\rangle$, dok pobuđeno stanje iona $|e\rangle$ odgovara stanju qubita $|1\rangle$. Osnovno stanje iona postiže se tehnikama laserskog hlađenja.

Lasersko hlađenje

Pojam "hlađenje" je nezahvalan za korištenje u situaciji jednog ili nekolicine izoliranih iona s obzirom na uobičajenu definiciju temperature, no u ovom kontekstu on se može shvatiti kao spuštanje iona u osnovno energetska stanje pomoću interakcije s elektromagnetskim poljem lasera frekvencije ω_L i valnog vektora \vec{k} . Hamiltonijan te interakcije dan je sljedećim izrazom [5]:

$$H = \hbar\nu \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2} [|e\rangle\langle g| \exp(ik_z z) + h.c.], \quad (6)$$

gdje ν predstavlja oscilatorsku frekvenciju titranja centra mase (CM) iona, $\Delta = \omega_L - \omega_0$, a ω_0 predstavlja frekvenciju elektronskog dipolnog prijelaza te Ω predstavlja Rabijevu frekvenciju. Također vrijedi Lamb-Dickeov režim u kojem je frekvencija CM moda titranja puno veća od frekvencije odboja (eng. *recoil frequency*), $\nu \gg \omega_R$, što rezultira time da se pobuđuju jedino stanja $|g, n\rangle \rightarrow |e, n \pm l\rangle$ za koja vrijedi $l = 1$ jer su ostali prijelazi potisnuti s višim redom Lamb-Dickeovog parametra koji je u ovom režimu $\ll 1$. Željeno hlađenje postiže se tako da prijelazi u stanja nižih energija postanu vjerojatniji što se realizira namještanjem lasera na frekvencije koje rezultiraju "crvenim bočnim" prijelazima (eng. *red-sideband transitions*). Pokazuje se da se to odgovara zahtjevu $\Delta < 0$. U ovisnosti o omjeru širine prijelaza Γ i frekvencije CM moda ν razlikuju se dva režima koja se nazivaju Dopplerovo hlađenje i tzv. *resolved-sideband cooling*. Potonjim se postižu stanja $|g, 0\rangle$, odnosno "prava" osnovna stanja koja onda služe kao qubiti. Na slici 1 prikazani su nivoi iona te spomenuti prijelazi.



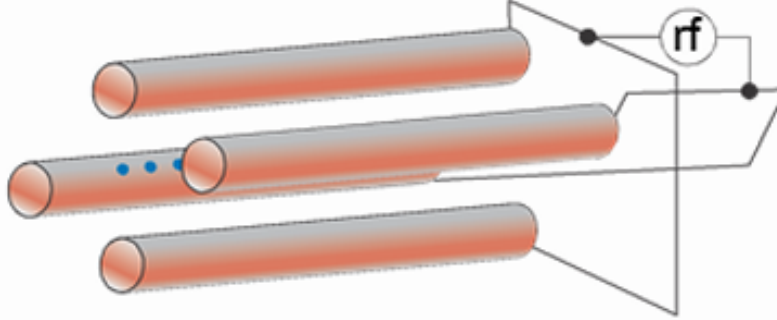
Slika 1 Shematski prikaz nivoa hladnog iona. Preuzeto iz [5].

Zamke iona

Zatočiti mali broj iona u 3 dimenzije i fiksirati ih na određene položaje također predstavlja nimalo trivijalan eksperimentalni problem. Sve se mora odvijati u visokom vakuumu kako ne bi bilo sudara iona s atomima plina, a za kontroliranje iona koristi se elektromagnetsko polje. Prema Earnshawovom teoremu slijedi da je nemoguće postići minimum potencijala u 3 dimenzije statičkim električnim poljem pa se koristi vremenski ovisno električno polje ili kombinacije električnog i magnetskog polja [6]. Jedan od načina izvedbe zamke koja koristi vremenski promjenjivo električno polje je Paulova zamka. To oscilatorsko polje frekvencije u području radiovalova (RF) drži ione na radijalno fiksnom položaju zahvaljujući njihovoj inerciji koja onemogućava da reagiraju na dovoljno brze promjene polova elektroda. Stacionarno električno polje nametnuto je na krajeve zamke da bi se osigurala ravnoteža i u trećoj dimenziji, duž osi zamke. Potencijal se može u tom slučaju zapisati kao:

$$\phi(x, y, z) = (\phi_{dc} + \phi_{ac} \cos(\Omega_{RF} t)) \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{r_0^2}. \quad (7)$$

Rješavanjem pripadne Mathieuove jednadžbe zaključuje se da ion u sve tri dimenzije harmonički oscilira pripadajućim frekvencijama. Shematski prikaz linearne Paulove zamke dan je na slici 2.



Slika 2 Shematski prikaz linearne Paulove zamke. Preuzeto iz [7].

Kontrola qubita

Laseri se, osim za pripremu qubita hlađenjem, koriste i za kontrolu qubita, odnosno za izvođenje operacija nad qubitima koje će qubit transformirati u logičko stanje koje nam omogućuje račun. Odabirom odgovarajuće frekvencije, faze i vremena djelovanja lasera na n -ti ion u linearnoj zamci može ga se staviti u stanje superpozicije. Naprimjer, tzv. $k\pi$ - puls lasera faze ϕ i polarizacije q na n -ti ion odgovara sljedećoj transformaciji stanja qubita:

$$\hat{U}_n^{k,q}(\phi) = \exp\left(-ik\frac{\pi}{2}(|e_q\rangle_n \langle g|ae^{-i\phi} + h.c.)\right). \quad (8)$$

Djelovanje te transformacije na konkretna stanja qubita je sljedeće:

$$\begin{aligned} |g, 0\rangle &\rightarrow |g, 0\rangle \\ |g, 1\rangle &\rightarrow \cos(k\pi/2)|g, 1\rangle - ie^{i\phi}\sin(k\pi/2)|e_q, 0\rangle \\ |e, 0\rangle &\rightarrow \cos(k\pi/2)|e_q, 0\rangle - ie^{-i\phi}\sin(k\pi/2)|g, 1\rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

i ovdje valja napomenuti kako polarizacija lasera može pobuditi i pomoćno stanje ($|e_1\rangle$), osim onog pobuđenog stanja ($|e_0\rangle$) koje predstavlja stanje qubita [1]. Primjenom ovakvih transformacija na dva qubita može se ostvariti transformacija ekvivalentna C_{not} kvantnim logičkim vratima [4]. To se postiže kompozicijom tri ovakve transformacije i to sljedećim redom:

- 1) π puls, $q = 0$, $\phi = 0$ na m -ti ion: $\hat{U}_m^{1,0}$
- 2) 2π puls, $q = 1$, $\phi = 0$ na n -ti ion: $\hat{U}_n^{2,1}$
- 3) opet π puls, $q = 0 = \phi$ na m -ti ion: $\hat{U}_m^{1,0}$.

Kompozicija te tri transformacije može se označiti kao $\hat{U}_{m,n} = \hat{U}_m^{1,0}\hat{U}_n^{2,1}\hat{U}_m^{1,0}$. Djelovanje te transformacije na moguća početna stanja jest sljedeće (oznaka $|m, n, z\rangle$ odnosi se na interna stanja m -tog i n -tog iona, $m, n \in \{g, e_0\}$, te na njihovo zajedničko kolektivno vibracijsko stanje $z \in \{0, 1\}$):

$$\begin{aligned} \hat{U}_{m,n} : |g, g, 0\rangle &\rightarrow |g, g, 0\rangle \\ |g, e_0, 0\rangle &\rightarrow |g, e_0, 0\rangle \\ |e_0, g, 0\rangle &\rightarrow |e_0, g, 0\rangle \\ |e_0, e_0, 0\rangle &\rightarrow -|e_0, e_0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Ovdje još nije sasvim očito kako prepoznati C_{not} operaciju pa se u tu svrhu uvodi oznaka

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm |e_0\rangle), \quad (11)$$

za stanja qubita u superpoziciji. To stanje također se postiže adekvatnim laserskim pulsom koji pobudi atom ne promijenivši mu vibracijski mod i operator koji odgovara takvoj evoluciji qubita označava se s $\hat{V}_n^k(\phi)$, te je njegovo djelovanje:

$$\begin{aligned}\hat{V}^k(\phi) : |g\rangle &\rightarrow \cos(k\pi/2)|g\rangle - ie^{i\phi}\sin(k\pi/2)|e_0\rangle \\ |e_0\rangle &\rightarrow \cos(k\pi/2)|e_0\rangle - ie^{-i\phi}\sin(k\pi/2)|g\rangle.\end{aligned}\quad (12)$$

Sada se može vidjeti da kompozicija $\hat{U}_{m,n}$ djeluje na sljedeći način (opet u notaciji $|\cdot, \cdot\rangle$, prvo mjesto se odnosi na m -ti, a drugo mjesto na n -ti qubit):

$$\begin{aligned}|g, \pm\rangle &\rightarrow |g, \pm\rangle \\ |e_0, \pm\rangle &\rightarrow |e_0, \mp\rangle.\end{aligned}\quad (13)$$

Jasno je da je drugi qubit promijenio stanje iz $|+\rangle$ u $|-\rangle$ i obratno, samo ako je prvi qubit bio u pobuđenom stanju. To je točno situacija koja odgovara ciljnom i kontrolnom qubitu za C_{not} vrata. Konačno, C_{not} vrata između m -tog i n -tog qubita matrično se mogu zapisati kao:

$$\hat{C}_{m,n} = \hat{V}_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{U}_{m,n}\hat{V}_n^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\pi}{2}\right).\quad (14)$$

Realizacija C-not kvantnih logičkih vrata

Monroe, Wineland i ostali su 1995. [8] prvi demonstrirali eksperimentalnu izvedbu C_{not} vrata za što je 2012. godine Wineland nagrađen i Nobelovom nagradom. Oni su koristili jedan ion Berilija, ${}^9\text{Be}^+$. Kontrolni qubit predstavljen je modom harmoničkog oscilatornog titranja iona s 0 ili 1 kvantom energije. Njega se označava $|n\rangle$. Ciljni qubit realiziran je unutarnjim energetskim nivoem iona i za to su korištena sljedeća hiperfina osnovna stanja:

$$\begin{aligned}|0\rangle &= |f = 2, m_F = 2\rangle \\ |1\rangle &= |F = 1, m_F = 1\rangle.\end{aligned}\quad (15)$$

U nastavku teksta koristit će se oznaka $|nS\rangle$ gdje se prva pozicija odnosi na kontrolni, a druga na ciljli qubit kao što je objašnjeno ranije. Prostor stanja tog iona je 4-dimenzionalni prostor (2^2) čija je baza:

$$|nS\rangle \in \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}.\quad (16)$$

Željene tranzicije se induciraju objašnjenim adekvatnim izborom lasera. Valja ovdje još jednom napomenuti da su "bočne" (eng. *sideband*) frekvencije zaslužne za postizanje isprepletenog stanja s obzirom da stavljaju ion u, naprimjer, stanje:

$$|01\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),\quad (17)$$

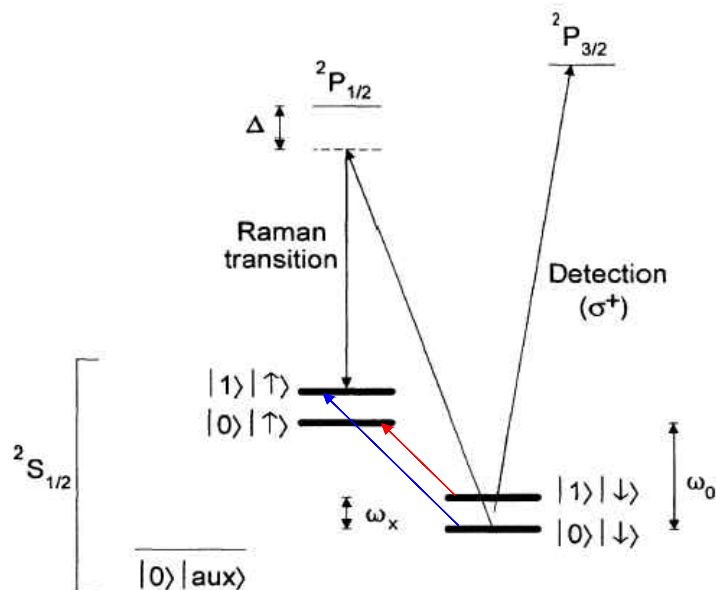
pomoću operatora $\hat{U}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Implementacija C_{not} kvantnih vrata sad se svodi na primjenu sljedećih transformacija:

- 1) $\frac{\pi}{2}$ puls bez bočnog pomaka: $V^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- 2) 2π puls s "plavim" pomakom s fazom podešenom tako da inducira prijelaz s pomoćnim stanjem na slici 3 označenim $|aux\rangle$
- 3) $\frac{\pi}{2}$ puls bez bočnog pomaka, ali sada u protufazi s 1): $V^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Koraci 1) i 3) ostavljaju qubit $|n\rangle$ nepromijenjen dok "rotiraju" qubit $|S\rangle$. Korak 2) mijenja predznak stanju $|11\rangle \rightarrow |0\text{ aux}\rangle \rightarrow -|11\rangle$. Pomoćno stanje je Zeeman pomaknuto od osnovnog primjenom magnetskog polja.

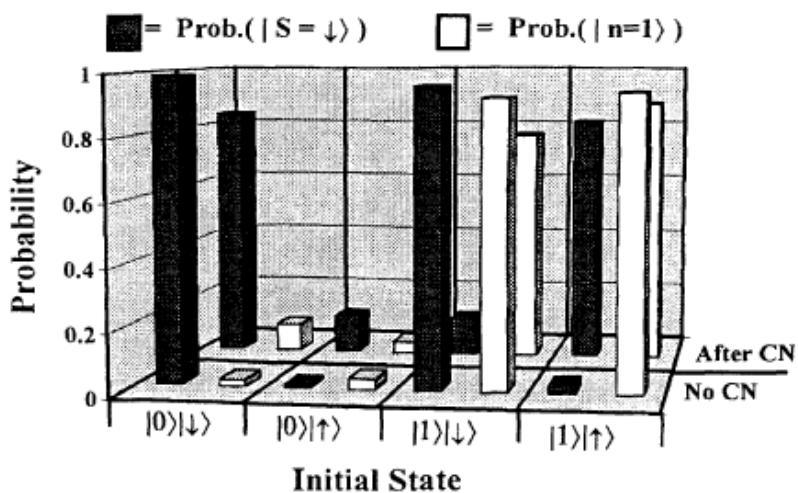
Na slici 3 se vidi i stanje ${}^2P_{3/2} = |F = 3, m_F = 3\rangle$ koje služi za mjerenje stanja qubita $|nS\rangle$. Naime, prijelaz u to stanje moguć je samo iz stanja $|n0\rangle$ što znači da ukoliko je, nakon odgovarajućeg σ^+ pobuđivanja, opažena fluorescencija može se zaključiti da je stanje qubita $|S\rangle = |0\rangle$ (preciznije, niz takvih mjerenja dat će vjerojatnost $P(|S\rangle = |0\rangle)$). Da bi se utvrdilo i stanje qubita $|n\rangle$ dodaje se plavi (crveni) π puls ako je $|S\rangle$ izmjeren kao $|1\rangle(|0\rangle)$. Naknadnim opažanjem ili



Slika 3 Shematski prikaz nivoa Berilijevog iona. Oznake $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$ odgovaraju $S = |1\rangle$ i $S = |0\rangle$ stanju. Preuzeto iz [8].

neopažanjem fluorescencije može se zaključiti u kojem stanju je $|n\rangle$, odnosno opet niz takvih mjerenja daje vjerojatnost $P(|n\rangle = |1\rangle)$.

Na slici 4 dani su rezultati dobiveni nakon primjene C_{not} vrata na svako od individualno dobivenih stanja iz 16. Rezultati pokazuju da ukoliko je kontrolni qubit pripremljen u stanju $|0\rangle$ vjerojatnost ciljnog qubita je u dobroj mjeri očuvana nakon primjene vrata (visina crnog stupca je približno očuvana). Isto tako se vidi da, kad je kontrolni qubit pripremljen u stanju $|1\rangle$, vjerojatnost ciljnog stupca je u dobroj mjeri okrenuta (visina crnog stupca je otprilike zamijenjena prije i nakon primjene transformacija). Time je potvrđeno da populacija stanja prati tablicu istinitosti 5 koja odgovara C_{not} kvantnim logičkim vratima.



Slika 4 Ovisnost vjerojatnosti mjerenja pojedinih stanja $|nS\rangle$ o početnom stanju prije i nakon primjene C_{not} vrata. Preuzeto iz [8].

III. Zaključak

Zatočeni ioni su, kao što je već napomenuto, samo jedna od mogućih izvedbi qubita. Očekivano, u odnosu na ostale imaju prednosti i nedostatke. Vrijeme koherencije postignuto ovom tehnologijom (≈ 1 min) značajno je veće u omjeru s vremenom logičkih vrata nego kod primjerice supravodljivih qubita ili Rydbergovih atoma [6]. Mjera točnosti prilikom pripreme, kontrole i mjerenja qubita ovom metodom također je izrazito visoka. Prednost je i to što je svaki ion fundamentalno identičan, za razliku od primjerice supravodljivih qubita kod kojih u samoj izradi može doći do razlika, no to ujedno znači da rad sa zatočenim ionima zahtijeva izrazito dobru izolaciju od okoline i izrazito homogena vanjska polja bez smetnji. Postojanje dodatnih nivoa u ionu može biti prednost, kao što je objašnjeno prilikom mjerenja konačnog stanja, ali isto tako može dodatno zakomplicirati eksperimentalni postav. Vrijeme potrebno kvantnim logičkim vratima da provedu operaciju na ionima je značajno sporije od nekih ostalih implementacija qubita. Ista operacija koja na zatočenim ionima traje 2 mikrosekunde, na supravodljivim qubitima traje desetak nanosekundi. To znači da postizanje tzv. kvantne nadmoći (eng. *quantum supremacy*) ovom metodom nije obećavajuće. Kvantna nadmoć započinje kad kvantni procesor bude u stanju izvršiti operaciju brže od klasičnog procesora koji još uvijek svojom frekvencijom od ≈ 10 GHz nadmašuje ≈ 1 MHz kvantnih vrata. Također problem s ovom implementacijom qubita, ali i ostalih, predstavlja skalabilnost. Zatočenim ionima postignuto je ≈ 100 qubita, ali supravodljivim qubitima IBM je uspio 2022. postići konfiguraciju od čak 433 qubita. Nekoliko je mogućih konfiguracija povezivanja većeg broja qubita od zatočenih iona, no svaka sa sobom nosi niz tehnoloških i inženjerskih izazova i problema koji će se morati riješiti ukoliko se želi postići smislena upotrebljivost kvantnih računala.

IV. Zahvale

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Hrvoju Buljanu na usmjeravanju i korisnim savjetima prilikom istraživanja ovog područja i izrade ovog rada. Također se zahvaljujem dr. sc. Dariu Jukiću i dr. sc. Karlu Lelasu što su bili na raspolaganju.

Literatura

- [1] DiVincenzo, D. P., "Two-bit gates are universal for quantum computation," *Physical Review A*, Vol. 51, No. 2, 1995, pp. 1015–1022. <https://doi.org/10.1103/physreva.51.1015>.
- [2] Barenco, A., Bennett, C. H., Cleve, R., DiVincenzo, D. P., Margolus, N., Shor, P., Sleator, T., Smolin, J. A., and Weinfurter, H., "Elementary gates for quantum computation," *Phys. Rev. A*, Vol. 52, 1995, pp. 3457–3467. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.3457>.
- [3] Barenco, A., Deutsch, D., Ekert, A., and Jozsa, R., "Conditional Quantum Dynamics and Logic Gates," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 74, 1995, pp. 4083–4086. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4083>.
- [4] Cirac, J. I., and Zoller, P., "Quantum Computations with Cold Trapped Ions," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 74, 1995, pp. 4091–4094. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091>.
- [5] Eschner, J., Morigi, G., Schmidt-Kaler, F., and Blatt, R., "Laser cooling of trapped ions," *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 20, No. 5, 2003, pp. 1003–1015. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.20.001003>.
- [6] Bruzewicz, C. D., Chiaverini, J., McConnell, R., and Sage, J. M., "Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges," *Applied Physics Reviews*, Vol. 6, No. 2, 2019, p. 021314. <https://doi.org/10.1063/1.5088164>.
- [7] Mađar, N., "Ostvarivanje kvantnih računala upotrebom sustava Ionskih zamki," 2012.
- [8] Monroe, C., Meekhof, D. M., King, B. E., Itano, W. M., and Wineland, D. J., "Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, 1995, pp. 4714–4717. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4714>.