

Doprinos twist-3 fragmentacijskih funkcija asimetriji jednog spina u SIDIS procesima

Matija Gašparlin

Mentor: doc. dr. sc. Sanjin Benić

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

(Dated: siječanj 2023.)

U ovom radu opisujemo podrijetlo i doprinos twist-3 fragmentacijskih funkcija u višim redovima računa udarnog presjeka SIDIS procesa. Gledamo asimetričnu produkciju čestica kada je hadron u početnom stanju transverzalno polariziran. Koristimo kolinearnu ekspanziju na hadronskom tenzoru kako bi dobili baždarno nezavisni rezultat. Asimetriju jednog spina vidimo u ovisnostima strukturnih funkcija o azimutalnom kutu unutar udarnog presjeka.

I. UVOD

Cilj ovog rada je sustavni uvod u partonske distribucijske funkcije i fragmentacijske funkcije višeg twist-a. Na temelju Feynmanovog partonskog modela nadograđujemo znanje iz elementarnih čestica kako bi mogli računati više redove u procesima dubokog neelastičnog raspršenja. Stvaramo intuitivnu sliku asimetrije jednog spina te SIDIS procesa. Dodavanjem gluona u SIDIS procese dobivamo doprinose koje klasificiramo kao twist-3 zbog skale mase koja se pojavljuje u matičnim elementima. Računamo diferencijalni udarni presjek te promatramo ovisnost o azimutalnom kutu koja se pojavljuje kao posljedica kvark-gluon interakcija te hadronskih interakcija u konačnom stanju.

Glavna motivacija ovog rada je teorijska priprema za eksplicitno numeričko računanje udarnog presjeka određenog procesa u kojem se pojavljuju twist-3 doprinosi.

II. DIS PROCESI

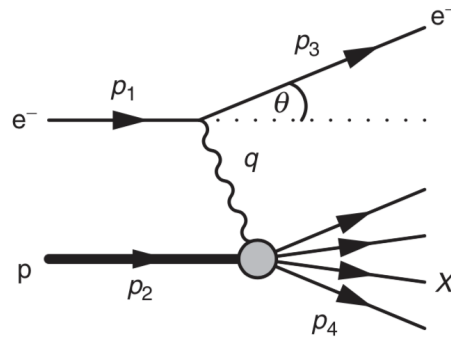
Duboka neelastična raspršenja (engl. "deep inelastic scattering", DIS) su sudari leptona i hadrona gdje lepton izmjenjuje virtualni foton sa hadronom, na primjer nukleonom, te u konačnom stanju detektiramo lepton i jednu ili više čestica označenih sa X nastalih raspadanjem hadrona na višehadronsko konačno stanje:

$$l + h \rightarrow l + X \quad (1)$$

DIS procesi vrlo su važni za proučavanje strukture nukleona. Budući da su nukleoni hadroni, oni nisu elementarni, već imaju podstrukturu. U Feynmanovoj teoriji DIS procesa, virtualni foton kojeg emitira lepton interagira sa kvazi slobodnim česticama koje naziva partoni.

Slika 1 prikazuje DIS proces elektron-proton su-

dara koji će nam poslužiti kao primjer na kojem možemo lako proučiti kinematiku:



Slika 1. Duboko neelastično raspršenje elektrona i protona.

Hadroni u DIS procesima se nakon sudara raspadaju, najčešće na više čestica. Invarijantna masa hadronskog sistema ovisi o četveroimpulsu virtualnog fotona te nam za vrlo velike iznose impulsa Heisenbergova relacija neodređenosti govori da ćemo imati sve manje i manje prostorne skale. Za opis kinematike DIS procesa potrebne su dvije nezavisne varijable. Najčešći izbor te dvije nezavisne varijable su $Q^2 = -q^2$, negativni kvadrat četveroimpulsa virtualnog fotona te Bjorkenov x_{bj} , Lorentz-invarijantna bezdimenzionalna veličina definirana na sljedeći način:

$$x_{bj} \equiv \frac{Q^2}{2p_2 q} \quad (2)$$

Ukoliko Q^2 zapišemo preko četveroimpulseva početnog i konačnog elektrona, označenih sa p_1 i p_3 dobivamo:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(p_1 - p_3)^2 = -2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_3 \\ &= -2m_e^2 + 2E_1 E_3 - 2p_1 p_3 \cos \theta \\ &\approx 2E_1 E_3 (1 - \cos \theta) = 4E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Aproksimacija u gornjoj jednadžbi dolazi od toga da u DIS procesima imamo dovoljno veliku energiju da

možemo zanemariti masu elektrona. Vidimo da je Q^2 pozitivno definitna veličina. Sada možemo dobiti interval vrijednosti koje poprimiti Bjorkenov x_{bj} ako raspíšemo četveroimpuls konačnog hadronskog stanja označenog sa W :

$$\begin{aligned} W^2 \equiv p_4^2 &= (q + p_2)^2 = q^2 + 2p_2 \cdot q + p_2^2 \\ &\Rightarrow W^2 + Q^2 - m_p^2 = 2p_2 \cdot q \end{aligned} \quad (4)$$

Ukoliko desnu stranu gornje jednačbe uvrstimo u definiciju Bjorkenovog x_{bj} -a dobivamo:

$$x_{bj} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m_p^2} \quad (5)$$

Znamo da kvarkovi nastaju u parovima kvark-antikvark pa, budući da proton ima tri valentna kvarka, finalno hadronsko stanje mora sadržavati barem jedan barion. Budući da je proton najlakši barion, zaključujemo da je invarijantna masa finalnog hadronskog stanja veća od mase protona:

$$W^2 \equiv p_4^2 \geq m_p^2 \quad (6)$$

Činjenica da je $Q^2 \geq 0$ uz jednačbu (5) daje nam interval mogućih vrijednosti Bjorkenovog x_{bj} -a:

$$0 \leq x_{bj} \leq 1 \quad (7)$$

Bjorkenov x_{bj} može se shvatiti kao mjera "elastičnosti" procesa. Gornja granica $x_{bj} = 1$ odgovara elastičnim raspršenjima.

U DIS procesima postoje još dvije Lorentz invarijantne varijable y i ν definirane na sljedeći način:

$$y \equiv \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_1} \quad \nu \equiv \frac{p_2 \cdot q}{m_p} \quad (8)$$

Ukoliko proces promatramo iz sustava mirovanja protona, četveroimpuls protona je tada $p_2 = (m_p, 0, 0, 0)$ te raspisivanjem četveroimpulsa ostalih čestica u procesu i uvrštavanjem u definicijsku relaciju (8) dobivamo:

$$y = \frac{m_p(E_1 - E_3)}{m_p \cdot E_1} = 1 - \frac{E_3}{E_1} \quad (9)$$

Veličinu y u sustavu mirovanja protona možemo shvatiti kao udio energije koju početni elektron izgubi prilikom raspršenja. Moguće vrijednosti koje poprima y su $0 \leq y \leq 1$. Veličina ν u istom tom izboru sustava jednaka je:

$$\nu = E_1 - E_3 \quad (10)$$

te opisuje energiju koju početni elektron izgubi. Kinematika DIS procesa za danu energiju centra mase \sqrt{s} potpuno je opisana s dvije nezavisne varijable koje su

Lorentz invarijantne. Varijable y i ν često se koriste u literaturi, međutim u ovom radu izabiremo koristiti nezavisne varijable Q^2 i X .

Najopćenitiji Lorentz invarijantni izraz za diferencijalni udarni presjek DIS procesa $ep \rightarrow eX$ je:

$$\frac{d\sigma^2}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[\left(1 - y - \frac{m_p^2 y^2}{Q^2}\right) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x, Q^2) \right] \quad (11)$$

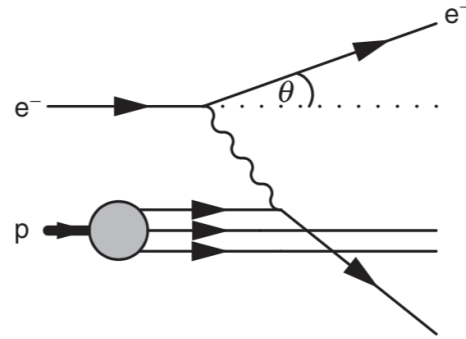
gdje su $F_1(x, Q^2)$ i $F_2(x, Q^2)$ dvije strukturne funkcije. Experimentalno je utvrđeno da u neelastičnom raspršenju obje strukturne funkcije imaju zanemarivu ovisnost o Q^2 , odnosno možemo pisati:

$$F_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x) \quad F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x) \quad (12)$$

što je indikator da se elektron raspršuje na točkastoj čestici, konstituentu protona. Ukoliko je Q^2 veći od par GeV^2 , dobivamo režim dubokog neelastičnog raspršenja gdje strukturne konstante zadovoljavaju tzv. *Callan-Gross* relaciju:

$$F_2(x) = 2x \cdot F_1(x) \quad (13)$$

Ova relacija govori nam da se u dubokom neelastičnom procesu elektron elastično raspršuje na točkastim česticama polovičnog spina. Raspršenje elektrona na kvarku prikazano je na slici 2:



Slika 2. Elastično raspršenje elektrona na kvarku iz protona.

II.1. Feynmanov kvark-parton model

U elastičnom sudaru elektrona sa kvarkom, konstituentom protona s polovičnim spinom, kvark gledamo kao slobodnu česticu. Feynmanov kvark-parton model promatra DIS proces iz sustava gdje proton ima veliku energiju, odnosno možemo zanemariti njegovu masu $E \gg m_p$. Jedna od pogodnosti ovog izbora sustava je da možemo zanemariti komponente impulsa pogođenog kvarka koje su okomite na smjer gibanja protona te možemo pisati:

$$p_q = \xi p_2 = (\xi E_2, 0, 0, \xi E_2) \quad (14)$$

gdje je ξ udio impulsa protona kojeg nosi kvark koji sudjeluje u interakciji. Prije interakcije kvarka sa virtualnim fotonom možemo pisati da mu je kvadrat četveroimpulsa jednak masi:

$$\xi^2 p_2^2 = m_q^2 \quad (15)$$

što naravno mora vrijediti i nakon sudara s virtualnim fotonom koji nosi impuls q :

$$(\xi p_2 + q)^2 = \xi^2 p_2^2 + 2\xi p_2 \cdot q + q^2 = m_q^2 \quad (16)$$

Izjednačavanjem jednačbi (15) i (16) dobivamo:

$$\xi = \frac{-q^2}{2p_2 \cdot q} = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q} \equiv x_{bj} \quad (17)$$

U Feynmanovom kvark-parton modelu Bjorkenov x označava upravo udio impulsa protona kojeg nosi kvark koji sudjeluje u elastičnom sudaru s elektronom. Mjerenjem strukturnih funkcija povezano je s raspodjelom impulsa unutar protona.

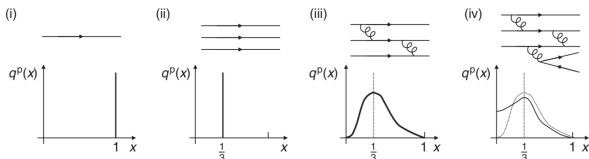
Kasnije ćemo vidjeti da udio impulsa koji nosi parton nije jednak Bjorkenovom x_{bj} -u za više redove računa.

II.2. Partonske distribucijske funkcije

U protonu imamo velik broj kvarkova koji neprestano međudjeluju izmjenom gluona, nosilaca jake sile. Raspodjela impulsa unutar protona opisana je partonskim distribucijskim funkcijama (engl. *Parton Distribution Functions, PDF's*). Izraz:

$$u^p(x) \delta x \quad (18)$$

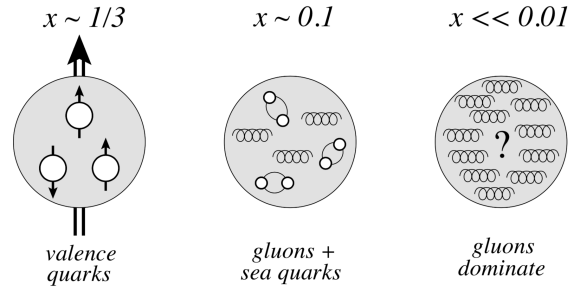
opisuje broj u kvarkova s udjelom ukupnog impulsa protona između x i $x + \delta x$. PDF definirane su za svaki kvark u pojedinom hadronu i njihovi oblici ovise o dinamici sustava kojeg promatramo. Grafovi na slici ispod pokazuju moguće oblike PDF za kvarkove unutar protona:



Slika 3. Mogući oblici partonskih distribucijskih funkcija za kvarkove unutar protona.

Na prvom grafu na slici 3 imamo situaciju kada je proton sastavljen od jedne točkaste čestice koja nosi sav impuls protona, na drugom grafu imamo tri statična kvarka od kojih svaki nosi trećinu impulsa protona, dok na zadnja dva grafa imamo situacije kada kvarkovi međusobno

interagiraju razmjenom gluona koji mogu stvoriti nove virtualne parove kvarkova i antikvarkova. Kada imamo interakciju kvarkova gluonima vidimo da su njihove PDF razmujane u odnosu na delta funkcije bez interakcija. Također je bitno napomenuti da produkcijom novi parova kvarkova imamo povećanje vrijednosti PDF na malim x -evima zbog raspodjele impulsa protona na mnoštvo novonastalih virtualnih parova kvarkova. Ovdje opet x označava udio impulsa koji kvark nosi, koji je jednak Bjorkenovom x_{bj} samo u osnovnim procesima bez gluona. Na slici 4 prikazan je nukleon i njegova podstruktura sastavljena od kvarkova i gluona na različitim vrijednostima udjela impulsa x :



Slika 4. Ilustracija podstrukture nukleona za različite vrijednosti Bjorkenovog x -a.

Za vrlo male vrijednosti x -a imamo veliki broj gluona s malim udjelima ukupnog impulsa.

Diferencijalni udarni presjek elastičnog sudara elektrona i partona (kvarka) koji nosi udio x ukupnog impulsa protona izvodi se potpuno analogno drugim procesima kvantne elektrodinamike (engl. *quantum electrodynamics, QED*) pa ćemo ga ovdje preskočiti. Rezultat je sljedeći:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{Q^4} \left[(1-y) + \frac{y^2}{2} \right] \quad (19)$$

i izražen je preko Lorentz invarijantnih veličina, gdje ovisnost o x ulazi kroz definiciju varijable y danu u (8). Diferencijalni udarni presjek ukupnog DIS procesa sudara elektrona i protona dobivamo koristeći gornji udarni presjek sudara elektrona i partona te definicijama PDF kvarkova. Ako jednačbu (19) poopćimo na raspršenje naboja Q_i na kvarku okusa i sa udjelom ukupnog impulsa u intervalu $x \rightarrow x + \delta x$ imamo:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{Q^4} \left[(1-y) + \frac{y^2}{2} \right] \times Q_i^2 q_i^p(x) \delta x \quad (20)$$

gdje je $q_i^p(x)$ PDF kvarka okusa i . Ako sada prosumiramo po svim okusima i podjelimo gornju jednačbu na δx dobivamo Feynmanovo rješenje za udarni presjek dubokog neelastičnog raspršenja u partonskom modelu za

sudar elektrona i protona:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[(1-y) \frac{F_2^{ep}(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1^{ep}(x, Q^2) \right] \quad (21)$$

Ukoliko usporedimo ovaj rezultat sa jednadžbom (11) u kojoj uzimamo $Q^2 \gg m_p^2 y^2$ da bi zanemarili član s masom protona, dobivamo izraz za strukturne funkcije unutar partonskog modela:

$$F_2^{ep}(x, Q^2) = 2x \cdot F_1^{ep}(x, Q^2) = x \sum_i Q_i^2 q_i^p(x) \quad (22)$$

Vidimo da smo prirodno dobili Bjorkenovo skaliranje iz činjenice da je DIS proces zapravo elastično raspršenje elektrona na točkastim Diracovim česticama polovičnog spina. Čestice spina 0 dale bi faktor $F_1 = 0$. Budući da u kvantnoj kromodinamici (engl. *quantum chromodynamics*, *QCD*) zbog velike konstante vezanja jake sile α_S ne možemo upotrijebiti perturbativni račun, PDF moramo računati iz mjerenja strukturnih funkcija u DIS procesima.

Budući da kvarkovi unutar protona neprestano međusobno interagiraju izmjenom gluona te produkcijom kvark-antikvark parova, moguće je da nastanu $s\bar{s}$ i teži parovi. Ovi doprinosi strukturnim funkcijama su mali i zanemarivi budući da priroda gluonskih propagatora s faktorom $1/q^2$ suzbija gluone velikih impulsa. Za reakciju elektrona i protona strukturalni faktor F_2 dobivamo sumom iz jednadžbe (22), gdje smo također zanemarili ovisnost o Q^2 zbog prethodno navedenih razloga:

$$F_2^{ep}(x) \approx x \left(\frac{4}{9} u^p(x) + \frac{1}{9} d^p(x) + \frac{4}{9} \bar{u}^p(x) + \frac{1}{9} \bar{d}^p(x) \right) \quad (23)$$

Ovdje su $u^p(x)$ i $d^p(x)$ PDF za gornje i donje kvarkove, analogno za antikvarkove. Budući da raspoređenje poštuje izospinsku simetriju, za raspoređenje elektrona na neutronu imamo iste PDF kao i za proton uz zamjenu $u \leftrightarrow d$ pa možemo u oznaci ispustiti superskript.

Integriranjem strukturnih funkcija po cijelom intervalu x -eva dobivamo rezultat za udio impulsa koji u protonu nose gornji i donji kvarkovi:

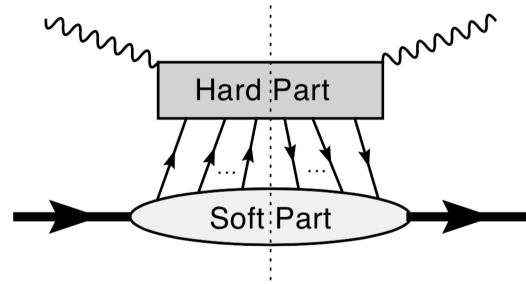
$$f_u \approx 0.36 \quad f_d \approx 0.18 \quad (24)$$

Vidimo da kvarkovi i antikvarkovi u protonu nose više od 50% ukupnog impulsa, dok je ostatak impulsa raspodjeljen na neutralne čestice koje identificiramo kao nositelje jakih interackija, gluone čiji račun ne ulazi u perturbativne QED metode koje smo do sada koristili te nam je za objašnjenje ovih, i mnogih drugih fenomena potrebna QCD.

III. SIDIS PROCESI

DIS procesi koje smo gore promatrali su inkluzivni te smo aproksimirali izmjenu samo jednog virtualnog fotona između elektrona i protona. Također smo prešutno pretpostavili da je energija elektrona dovoljno mala da ne mogu nastati čestice kao što su W^\pm i Z bozoni te je time i izlazni lepton jednak ulaznom. Strukturne funkcije DIS procesa možemo rastaviti na tvrdi dio, koji opisuje interakciju na malim udaljenostima (velikim energijama) koji je moguće izračunati perturbativno u QCD i ne perturbativni meki dio koji je opisan PDF-ovima. Ne perturbativni meki dio je univerzalno svojstvo hadrona i ne ovisi o procesu u kojem hadron sudjeluje. PDF-ovi opisuju kako su impulsi i spinovi partona raspoređeni unutar hadrona.

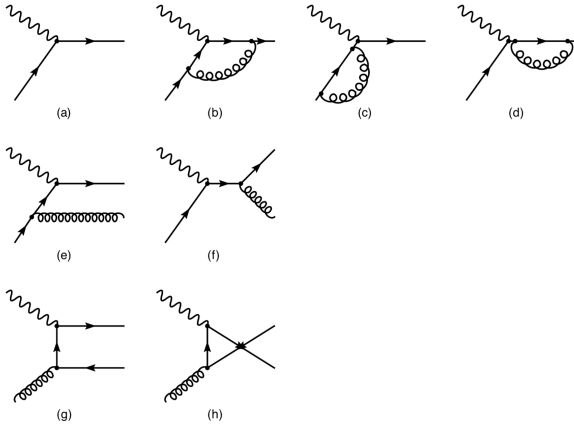
Slika 5 prikazuje inkluzivni DIS proces rastavljen na tvrde i meke dijelove koji su povezani partonskim linijama:



Slika 5. Ilustracija tvrdog i mekog dijela inkluzivnih DIS procesa.

Vidimo da između perturbativnog tvrdog i neperturbativnog mekog dijela možemo imati proizvoljno mnogo partonskih linija koje opisuju izmjenu partona između tih dijelova procesa.

Na slici 6 prikazani su dijelovi DIS procesa s QCD korekcijama reda α_S :



Slika 6. QCD korekcije reda α_S partonskog modela.

Veći broj izmjenjenih partona doprinosi višim twist doprinosima.

III.1. Twist

Udarne presjeke DIS procesa, osim Feynmanovim partonskim modelom, moguće je izračunati pomoću OPE metode (engl. *operator product expansion, OPE*). Diferencijalni udarni presjek DIS procesa možemo rastaviti na leptonski tenzor $L_{\mu\nu}$ koji je potpuno opisan QED i hadronski tenzor $W^{\mu\nu}$:

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega_{\text{hrf}}} = \frac{\alpha^2 E'}{Q^4 E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (25)$$

gdje smo izabrali sustav mirovanja ulaznog hadrona. Leptonski tenzor je za bezmasene leptone jednak:

$$L_{\mu\nu} \equiv [\bar{u}\gamma_\mu u]^* [\bar{u}\gamma_\nu u] \quad (26)$$

OPE metoda temelji se na raspisu hadronskog tenzora $W^{\mu\nu}$ preko komutatora hadronskih struja. Hadronski tenzor nećemo izvoditi u ovom radu, nego samo citirati rezultat iz [? Jaffe]

$$W^{\mu\nu}(P, q; S) = \frac{1}{4\pi M} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P, S | [\hat{J}^\mu(x), \hat{J}^\nu(0)] | P, S \rangle \quad (27)$$

gdje je elektromagnetska struja sustava kvarkova raznih okusa f dana s:

$$J^\mu(x) = \sum_f Z_f \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (28)$$

Z_f označava električni naboj kvarka s okusom f .

Općenito, možemo rastaviti produkt bilokalnih DIS operatora hadronskih struja $J^\mu(x)$ i $J^\nu(0)$ u različitim

prostorno-vremenskim trenucima na sumu lokalnih operatora $\hat{O}^{(i)}$ pomnoženih s Wilsonovim koeficijentima:

$$\hat{A}(x)\hat{B}(0) = \sum_{i,s} C_i^{(s)}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_s} \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_s}^{(i)}(0) \quad (29)$$

gdje indeks s označava spin pojedinog operatora \hat{O} .

Malo intuitivniji pristup je dimenzionalna analiza. Ukoliko pogledamo općeniti matrični element s operatorom θ imamo:

$$\langle P | \theta_{\mu_1 \dots \mu_{n_\theta}}(0) | P \rangle = P_{\mu_1} \dots P_{\mu_{n_\theta}} \cdot M^{d_\theta - n_\theta - 2} f_\theta + \dots \quad (30)$$

U gornjoj jednadžbi masa M predstavlja skalu hadronske mase $M \sim \Lambda_{\text{QCD}} \sim M_N/3$ i njena je potencija određena dimenzionalnom analizom te ju nazivamo twist.

$$t \equiv d - s \quad (31)$$

gdje je d dimenzija operatora θ .

Doprinosi koji u izrazima za udarni presjek dolaze uz faktor $\frac{1}{Q^2}$ nazivaju se twist-2, dok se twist-3, twist-4 i viši doprinosi pojavljuju uz veće potencije faktora $\frac{1}{Q^2}$. U DIS i SIDIS procesima, twist-2 doprinosi pojavljuju se u svim procesima s dvije kvarkovske i proizvoljno mnogo gluonskih linija. U nastavku ovog rada opisat ćemo doprinose SIDIS procesima koji dolaze od twist-3 distribucijskih funkcija.

Osim stroge matematičke definicije dane u jednadžbi (31), twist možemo shvatiti na način da gledamo doprinos koji stoji uz faktor $(\frac{1}{Q^2})^p$ i kažemo da je on reda twist- t za $t = 2 + 2p$.

III.2. SIDIS

Prvi pokazatelj utjecaja gluona na DIS procese dobivamo ako kvadrat apsolutne Feynmanove amplitude za procese sa slike 6 označene s (e) i (f) zapišemo preko Mandelstamovih varijabli:

$$|M|^2 = 2g^2 e_i^2 C_F \left[-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2Q^2 \hat{u}}{\hat{s}\hat{t}} \right] \quad (32)$$

gdje su Mandelstamove varijable definirane na način:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (p_1 + p_2)^2 \\ \hat{t} &= (p_1 - p_3)^2 \\ \hat{u} &= (p_1 - p_4)^2 \end{aligned} \quad (33)$$

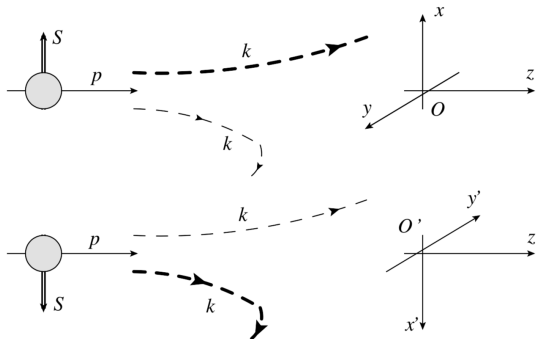
Gluoni koji nastaju u procesima (e) i (f), kao i izlazni kvark imaju transverzalni impuls p_T s obzirom na smjer

impulsa virtualnog fotona. U ovoj situaciji, umjesto jednog mlaza hadrona, detektiramo dva kolinearna hadronska mlaza u izlaznom stanju u smjeru izlaznih partona. Hadroni s velikim p_T impulsom su direktni pokazatelj postojanja gluona.

Polu-inkluzivni DIS procesi (engl. *semi-inclusive deep inelastic scattering*, *SIDIS*) su oni u kojima detektiramo hadron u konačnom stanju. U SIDIS procesima, za razliku od DIS procesa, možemo identificirati hadron u konačnom stanju koji odgovara ulaznom hadronu s kinematičkim promjenama.

IV. SSA

U SIDIS procesima možemo koristiti zraku nepolariziranih leptona te s njom gađati polariziranu metu. Metu polariziramo okomito na smjer gibanja leptona, budući da nam taj izbor daje potpunu rotacijsku simetriju oko smjera zrake. Produkcija čestice koja se giba na lijevu stranu od osi zrake kada je spin mete prema "gore" zbog rotacijske simetrije mora biti ekvivalentna produkciji čestice koja se giba na desno od osi zrake kada je meta polarizirana prema "dolje". Asimetrija jednog spina (engl. *Single spin asymmetry*, *SSA*) je efekt da broj čestica stvorenih sa obje strane zrake leptona nije isti. Na slici 7 ilustrirana je rotacijska invarijantnost produkcije čestica pri različitim polarizacijama mete:



Slika 7. Ilustracija rotacijske invarijantnosti SSA.

Kada je meta polarizirana okomito, odnosno transversalno s obzirom na smjer zrake ulaznih leptona, govorimo o transversalnoj asimetriji jednog spina, odnosno StSA. Veličina koja opisuje StSA efekt označava se s A_N i ona je definirana kao omjer diferencijalnih udarnih presjeka polarizirane mete i nepolariziranih diferencijalnih udarnih presjeka:

$$A_N \equiv \frac{d\sigma^\uparrow(k) - d\sigma^\downarrow(k)}{2d\sigma_{\text{ne pol}}} \quad (34)$$

Jedno vrlo zanimljivo svojstvo StSA udarnog presjeka je da je neparan na naivnu PT transformaciju (inverziju vremena T, zatim paritetnu transformaciju P). Naziv "naivna" označava da smo zamijenili početno i konačno stanje. Nepolarizirani diferencijalni udarni presjek je parn s obzirom na naivnu PT transformaciju, što nam govori da je u StSA uzrokovan mehanizmima koji su drugačiji od onih zaslužnih za nepolarizirani slučaj SIDIS reakcija.

V. DOPRINOS TWIST-3 SSA-U U SIDIS

Glavni dio ovog rada je doprinos twist-3 fragmentacijskih funkcija asimetriji jednog transversalnog spina u polu-inkluzivnim dubokim elastičnim raspršenjima. SIDIS proces koji promatramo je sudar elektrona i polariziranog protona:

$$e p^\uparrow \rightarrow e h X \quad (35)$$

Koristimo Feynmanovo baždarenje prilikom pronalaska udarnog presjeka. Budući da propagator u nazivniku ima imaginarni član $i\varepsilon$, moramo imati dodatnu imaginarnu jedinicu da bi ukupni udarni presjek bio realan. U ovom radu računamo samo doprinose twist-3 fragmentacijskih funkcija u kojima imaginarnu jedinicu pronalazimo u mekom dijelu procesa.

V.1. twist-3 fragmentacijske funkcije

Fragmentacijske funkcije koje promatramo odnose se na hadrone spina 0 koji se pojavljuju u procesu (35). Fragmentacijske funkcije partona u QCD definirane su preko matricnih elemenata kvarkovskih i gluonskih operatora polja. Svaka partonska distribucijska funkcija, opisana u odjeljku gore, imat će pripadnu fragmentacijsku funkciju. Dodatni doprinos dolazi od interakcija hadrona u konačnom stanju, što će uvesti još jednu fragmentacijsku funkciju. Preko kvarkovskih polja možemo definirati tri kvarkovske fragmentacijske funkcije u SIDIS preko hadronskih matricnih elemenata:

$$\begin{aligned} & z \sum_X \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | \gamma^\mu \psi(0) | \pi(P) X \rangle \langle \pi(P) X | \bar{\psi}(\lambda w) | 0 \rangle \\ & = 4 \left[\hat{f}_1(z) p^\mu + \hat{f}_4(z) M^2 w^\mu \right] \\ & z \sum_X \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | \psi(0) | \pi(P) X \rangle \langle \pi(P) X | \bar{\psi}(\lambda w) | 0 \rangle \\ & = 4M \hat{e}_1(z) \end{aligned} \quad (36)$$

Gornji primjer dan je za produkciju piona. P označava četveroimpuls piona, p i w su vektori svjetlosnog tipa, a masa M je generična skala mase QCD koja nije isto

što i masa proizvedenog hadrona m_π . Sve tri fragmentacijske funkcije došle su uz pripadne PDF te su sve realne.

Najbitnije svojstvo u daljnjoj diskusiji jest da je $\hat{e}_1(z)$ kiralno neparna i twista-3, dok su $\hat{f}_1(z)$ i $\hat{f}_4(z)$ kiralno parne i daju doprinose twista-2 i twista-4.

Iz kvark-gluon korelacijskih funkcija izvodimo twist-3 fragmentacijske funkcije F-tipa:

$$\begin{aligned}
& z \sum_X \int \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2pi} e^{-i\frac{\lambda}{z_1}} e^{-i\mu(1/z_2-1/z_1)} \\
& \times \langle 0 | \psi_i(0) | \pi(P) X \rangle \langle \pi(P) X | \bar{\psi}(\lambda w) g F^{\alpha\beta}(\mu w) w_\beta | 0 \rangle \\
& = \frac{M_N}{2z_2} (\gamma_5 \not{P}_h \gamma_\lambda)_{ij} \varepsilon^{\lambda\alpha\omega P_h} \hat{E}_F(z_1, z_2) \\
& z \sum_X \int \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\mu}{2pi} e^{-i\frac{\lambda}{z_1}} e^{-i\mu(1/z_2-1/z_1)} \\
& \times \langle 0 | \bar{\psi}_j(\lambda w) | \pi(P) X \rangle \langle \pi(P) X | g F^{\alpha\beta}(\mu w) w_\beta | 0 \rangle \\
& = \frac{M_N}{2z_2} (\gamma_5 \not{P}_h \gamma_\lambda)_{ij} \varepsilon^{\lambda\alpha\omega P_h} \tilde{E}_F(z_1, z_2)
\end{aligned} \tag{37}$$

Ukoliko u gornjim izrazima zamijenimo tenzor $F^{\alpha\beta}$ sa kovarijantnom derivacijom D^α dobivamo fragmentacijske funkcije D-tipa $\hat{E}_D(z_1, z_2)$.

Preostaje nam pronaći dodatni doprinos fragmentacijske funkcije koja je posljedica interakcija hadrona u konačnom stanju:

$$\begin{aligned}
& z \sum_X \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 \psi(0) | \pi(P) X \rangle \langle \pi(P) X | \bar{\psi}(\lambda n) | 0 \rangle \\
& = 4M \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha n_\beta \hat{e}_1(z)
\end{aligned} \tag{38}$$

Ovakva fragmentacijska funkcija $\hat{e}_1(z)$ postaje 0 kada je stanje $|\pi(P)X\rangle$ invarijantno na naivnu inverziju vremena, što bi bilo kada nebi postojale interakcije hadrona u konačnom stanju. Budući da nas zanimaju doprinosi višeg twista, hadronske interakcije u konačnom stanju daju nam doprinose SSA gdje fragmentacijsku funkciju $\hat{e}_1(z)$ ne možemo zanemariti. Dokaz ove tvrdnje može se vidjeti preko članova višeg reda u hadronskom tenzoru $W^{\mu\nu}$ prilikom vremenske inverzije. [1][32]. Za razliku od $\hat{e}_1(z)$, fragmentacijska funkcija $\hat{e}_1(z)$ ne doprinosi SSA.

Koristeći QCD jednadžbu gibanja:

$$i \frac{d}{d\lambda} \psi_-(\lambda n) = -\frac{1}{2} \not{n} i \not{D}_\perp(\lambda n) \psi_+(\lambda n) \tag{39}$$

dobivamo jednadžbu koja nam povezuje fragmentacijske funkcije $\hat{e}_1(z)$ i $\hat{e}_1(z)$ i funkciju D-tipa:

$$z \sum_X \int \frac{dz'}{z'^2} \hat{E}_D(z', z) = \hat{e}_1(z) + i \cdot \hat{e}_1(z) \tag{40}$$

V.2. Kinematika

Za SIDIS proces (35) imamo pet nezavisnih Lorentz invarijantnih veličina:

$$\begin{aligned}
Q^2 = -q^2 \quad x &\equiv \frac{Q^2}{2p_2 q} \quad \hat{s} = (p_1 + p_2)^2 \\
z_f &\equiv \frac{p_2 \cdot p_T}{p_2 \cdot q} \quad q_T \equiv -q_t^2
\end{aligned} \tag{41}$$

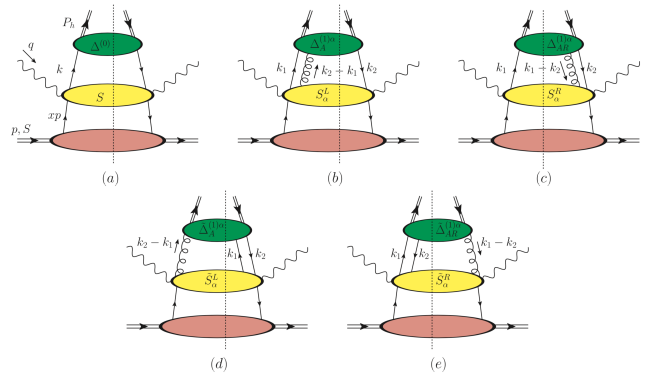
gdje je q_t transversalna komponenta impulsa virtualnog fotona. Proces promatramo iz sustava mirovanja hadrona gdje su virtualni foton i nukleon u početnom stanju kolinearni. Ponovimo li analizu iz DIS dijela, za diferencijalni udarni presjek SIDIS procesa dobivamo:

$$\frac{d^6\sigma}{dx dQ^2 dz_f dq_T^2 d\phi d\xi} = \frac{\alpha_{EM}^2}{128\pi^4 x^2 \hat{s}^2 Q^2} z_f \cdot L^{\mu\nu} \cdot W_{\mu\nu} \tag{42}$$

gdje su kutevi definirani tako da je ξ azimutalni kut hadrona, a ϕ azimutalni kut leptona. $L^{\mu\nu}$ i $W_{\mu\nu}$ su leptonski i hadronski tenzori, a $\alpha_{EM} = e^2/(4\pi)$ je konstanta vezanja u QED.

V.3. Hadronski tenzor

Na slici (8) prikazani su diagrami u kojima postoji twist-3 doprinosi polariziranim udarnim presjecima, odnosno diagrami koji pridonose SSA:



Slika 8. Diagrami promatranog SIDIS procesa u kojima postoje twist-3 doprinosi SSA. Zelena elipsa označava elemente fragmentacijske matrice, žuta elipsa je partonski tvrdi dio, a crvena elipsa je kvarkovska transversalna raspodjela $h(x)$.

Hadronski tenzor ovisi o impulsima ulaznog hadrona, virtualnog fotona koji ga pogađa i izlaznog hadrona. Možemo odmah separirati kvarkovsku transversalnu distribuciju $h(x)$:

$$W_{\mu\nu}(p_2, q, p_T) = \sum_f \int \frac{dx}{x} \cdot h(x) \cdot w_{\mu\nu}(xp_2, q, p_T) \tag{43}$$

Budući da imamo transverzalno polarizirani proton, parton u njemu isto će biti transverzalno polariziran, međutim može biti u smjeru polarizacije protona ili u suprotnom smjeru. Kvarkovska transverzalna distribucija $h(x)$ govori nam koliko partona ima isti, a koliko suprotni smjer polarizacije u odnosu na proton. $h(x)$ je jedna od tri twist-2 distribucijske funkcije te dolazi kada u interakciji imamo gluon. Ovo možemo intuitivno vidjeti iz činjenice da ako u konačnom stanju nemamo polarizacije, a u početnom imamo, treba nam dodatna reakcija s gluonom na kojeg predamo angularni moment.

Da bi izračunali ukupni $w_{\mu\nu}(xp_2, q, p_T)$ moramo zbrojiti doprinose svih diagrama:

$$w_{\mu\nu}(xp_2, q, p_T) \equiv w_{\mu\nu}^{(a)} + w_{\mu\nu}^{(b)} + \dots + w_{\mu\nu}^{(e)} \quad (44)$$

doprinosi su oblika:

$$w_{\mu\nu}^{(i)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \text{Tr} \left[\Delta^{(i)}(k) \cdot S_{\mu\nu}^{(i)}(k) \right] \quad (45)$$

za reakciju bez gluona gdje su $S_{\mu\nu}(k)$ partonski tvrdi dijelovi te $\Delta(k)$ hadronski matricni elementi definirani preko integrala u (36). Dopriinos (b) diagrama gdje postoji dodatni gluon je oblika:

$$w_{\mu\nu}^{(b)} = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Tr} \left[\Delta_A^{(1)\alpha}(k_1, k_2) \cdot S_{\mu\nu, \alpha}^L(k_1, k_2) \right] + \text{Tr} \left[\Delta_{AR}^{(1)\alpha}(k_1, k_2) \cdot S_{\mu\nu, \alpha}^R(k_1, k_2) \right] \right\} \quad (46)$$

Slično dobivamo i (c) doprinose, dok za (d) i (e) diagrame imamo zamjenu $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$ i $S \rightarrow \tilde{S}$ za pripadne hadronske tvrde dijelove. Također, u svim izrazima prešutno radimo i trag po bojama kvarkova. Vidimo da u gornjim izrazima hadronski tvrdi dijelovi ovise o QED polju A za kojeg znamo da nije baždarno invarijantno. Iz tog razloga moramo kolinearnom ekspanzijom pretvoriti tu ovisnost u ovisnost o tenzoru $F_{\alpha\beta}$ koji je baždarno invarijantan.

Da bi dobili twist-3 doprinose potrebno je na tvrdom dijelu napraviti kolinearnu ekspanziju:

$$S_{\mu\nu}(k) = S(k) = S\left(\frac{p_T}{z}\right) + \frac{\partial S(k)}{\partial k^\alpha} \Big|_{c.l.} \Omega_{\beta}^{\alpha} k^\beta + \dots \quad (47)$$

gdje c.l. označava kolinearni limit $k \rightarrow p_T/z$. Metodu ćemo pokazati na diagramu (a), analogni račun vrijedi za ostale diagrame:

$$w^{(a)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Delta^{(0)}(k) S(k) \right] \quad (48)$$

Primjenimo kolinearnu ekspanziju:

$$w^{(a)} = \int \frac{dz}{z} \text{Tr} \left[\Delta_{ij}^{(0)}(z) S(z) \right] - i\Omega_{\beta}^{\alpha} \int \frac{dz}{z} \text{Tr} \left[\Delta_{\partial}^{(0)\beta}(z) \frac{\partial S(k)}{\partial k^\alpha} \Big|_{c.l.} \right] \quad (49)$$

$$\Delta_{ij}^{(0)}(z) = \frac{1}{N} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | \psi_i(0) | hX \rangle \langle hX | \bar{\psi}_j(\lambda w) | 0 \rangle$$

$$\Delta_{\partial ij}^{(0)\alpha}(z) = \frac{1}{N} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | \psi_i(0) | hX \rangle \left\langle hX | \bar{\psi}_j(\lambda w) \overleftarrow{\partial}^\alpha | 0 \right\rangle \quad (50)$$

Potpuno analognu analizu moguće je provesti na diagramima (b) i (c) gdje twist-3 doprinose dolaze od kvark-gluon interakcija, međutim svi izrazi u $w^{(a,b,c)}$ koji sadrže derivaciju hadronskog matricnog elementa $\Delta_{\partial ij}^{(0)\alpha}(z)$ nisu baždarno nezavisni.

Još jedna bitna stvar za napomenuti je da, iako svaka twist-3 fragmentacijska funkcija sama za sebe ne zadovoljava očuvanje elektromagnetske struje, zbroj $w^{(a)} + w^{(b)} + w^{(c)}$ zadovoljava:

$$w_{\mu\nu}^{(a)} + w_{\mu\nu}^{(b)} + w_{\mu\nu}^{(c)} = \int \frac{dz}{z^2} \text{Tr} [\Delta(z) S_{\mu\nu}(z)] + \Omega_{\beta}^{\alpha} \int \frac{dz}{z^2} \text{ImTr} \left[\Delta_{\partial}^{\beta}(z) \frac{\partial S_{\mu\nu}(k)}{\partial k^\alpha} \right] - \Omega_{\beta}^{\alpha} \int \frac{dz_1}{z_1^2} \frac{dz_2}{z_2^2} P \left(\frac{1}{1/z_2 - 1/z_1} \right) \times \left\{ \text{ImTr} \left[\Delta_F^{\beta}(z_1, z_2) S_{\mu\nu, \alpha}^L(z_1, z_2) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \right\} \quad (51)$$

Koristeći *Ward-Takahashi* identitete za QED moguće je pokazati da su svi doprinosi twist-3 fragmentacijskih funkcija u tvrdom dijelu u hadronskom tenzoru invarijantni na elektromagnetsko baždarenje. [1]

V.4. Udarni presjek

Idući korak u računu twist-3 doprinosa SSA u SIDIS procesima jest račun kontrakcije tenzora:

$$L^{\mu\nu}(p1, p3) W_{\mu\nu}(p2, q, p_T) \quad (52)$$

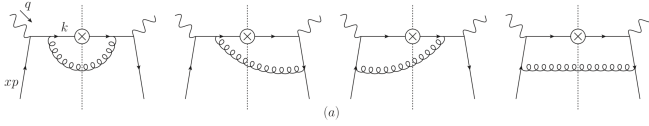
što je napravljeno u [1][40] na način da hadronski tenzor $W_{\mu\nu}$ rastavimo na 6 nezavisnih tenzora $\mathcal{V}_k^{\mu\nu}$ te dobivamo:

$$L^{\mu\nu}(p1, p3) W_{\mu\nu}(p2, q, p_T) = Q^2 \sum_k \mathcal{A}_k(\phi - \chi) [W_{\rho\sigma} \mathcal{V}_k^{\rho\sigma}] \quad (53)$$

gdje sumiramo po $k \in \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$ i sa \mathcal{A}_k su označene strukturne funkcije definirane kao:

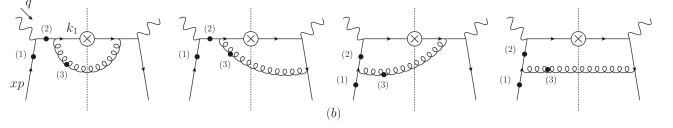
$$\mathcal{A}_k(\phi - \chi) \equiv \frac{1}{Q^2} L_{\mu\nu} \mathcal{V}_k^{\mu\nu} \quad (54)$$

Udarni presjek SIDIS procesa ovisi o 5 strukturnih funkcija povezanih sa \mathcal{A}_k od kojih svaka ima drugu ovisnost o azimutalnom kutu $\phi - \chi$. Postoji 12 Feynmanovih diagrama koji doprinose polariziranom diferencijalnom udarnom presjeku sa twist-3 doprinosima. Promatramo ih u grupama po 4 diagrama. Na slici (9) nalaze se Feynmanovi diagrami koji udarnom presjeku doprinose s fragmentacijskim funkcijama \hat{e}_1 i $\hat{e}_{\bar{1}}$ definiranim u (36) i (38):



Slika 9. Feynmanovi diagrami koji doprinose SSA-u SIDIS procesa sa twist-3 fragmentacijskim funkcijama \hat{e}_1 i $\hat{e}_{\bar{1}}$.

U diagramima na slici (10) twist-3 doprinosi su fragmentacijske funkcije F-tipa \hat{E}_F definirane u (37):



Slika 10. Feynmanovi diagrami koji doprinose SSA-u SIDIS procesa sa twist-3 fragmentacijskim funkcijama F-tipa \hat{E}_F i $\hat{E}_{\bar{F}}$.

Crna točkica na diagramima označava gluon koji iz \otimes dolazi na mjesto točkice. Posljednjih 4 diagrama su viših redova te ih nećemo promatrati u ovom radu.

Konačni izraz za polarizirani diferencijalni udarni presjek jednog spina u SIDIS procesima s twist-3 doprinosima je:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \sigma}{dx dQ^2 dz_f dq_T d\phi d\chi} &= \frac{\alpha_{EM}^2 \alpha_S M_N}{16\pi^2 x^2 S^2 Q^2} \sum_k A_k S_k \int_{x_{\min}}^1 \frac{dx}{x} \int_{z_{\min}}^1 \frac{dz}{z} \delta \left(\frac{q_T^2}{Q^2} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{z}\right) \right) \\ &\times \sum_a e_a^2 h^a(x) \left[\frac{\hat{e}_1^a}{z} \hat{\sigma}_k^1 + \frac{d}{d(1/z)} \left\{ \frac{\text{Im} \tilde{e}^a(z)}{z} \right\} \hat{\sigma}_k^2 + \text{Im} \tilde{e}^a(z) \hat{\sigma}_k^3 \right. \\ &\left. - 2 \int_z^\infty \frac{dz'}{z'^2} \left\{ P \left(\frac{1}{1/z - 1/z'} \right) \text{Im} \hat{E}_F^a(z', z) \hat{\sigma}_k^4 + z \text{Im} \tilde{E}_F^a(-z', (1/z - 1/z')^{-1}) \hat{\sigma}_k^5 \right\} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

gdje su za $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ pokrate $S_k \equiv \sin(\Phi_S - \chi)$ te za $k \in \{8, 9\}$ $S_k \equiv \cos(\Phi_S - \chi)$. Granice integracije su:

$$x_{\min} = x \left(1 + \frac{z_f}{1 - z_f} \frac{q_T^2}{Q^2} \right) \quad (56)$$

$$z_{\min} = z_f \left(1 + \frac{x_{bj}}{1 - x_{bj}} \frac{q_T^2}{Q^2} \right) \quad (57)$$

Sada možemo izračunati eksplicitne izraze za partonske tvrde udarne presjeke $\Delta \hat{\sigma}_k^i$ gdje su $i \in \{1, \dots, 5\}$ te $k \in \{1, \dots, 4, 8, 9\}$, međutim budući da ih ima 30 i svi su izrazi vrlo složeni nećemo ih eksplicitno navoditi.

VI. ZAKLJUČAK

Sustavno smo uveli partonske distribucijske funkcije i fragmentacijske funkcije višeg twist-a. Interakcijama gluona i kvarkova u SIDIS procesima dobili smo asimetriju jednog spina. Na baždarno invarijantan način raspisali smo hadronski tenzor koristeći kolinearnu ekspanziju i dobili doprinose diferencijalnom udarnom presjeku twist-a-3 koji ovise o azimutalnom kutu. Sa rezultatom (55) možemo izračunati sve udarne presjeke tvrdog dijela SIDIS procesa.

¹ Kanazawa, K. and Koike, Y. (2013) "Contribution of the twist-3 fragmentation function to the single transverse-spin asymmetry in semi-inclusive deep inelastic scattering," Phys. Rev. D, 88(7).

² Xiangdong Ji (1994) "Chiral-odd and spin-dependent quark fragmentation functions and their applications", Phys. Rev. D 49, 114

³ J. C. Collins and D. Soper, "PARTON DISTRIBUTION AND DECAY FUNCTIONS" Nucl. Phys. B194, 445 (1982)

⁴ H. Eguchi, Y. Koike, and K. Tanaka, "Twist-3 Formalism for Single Transverse Spin Asymmetry Reexamined: Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering", Nucl. Phys. B 763, 198 (2007).

⁵ H. Eguchi, Y. Koike, and K. Tanaka, "Single transverse spin asymmetry for large-pT pion production in semi-

- inclusive deep inelastic scattering”, Nuclear Physics B 752 (2006) 1–17
- ⁶ A. Metz, D. Pitonyak, ”Fragmentation contribution to the transverse single-spin asymmetry in proton–proton collisions”, Physics Letters B 723 (2013) 365–370
- ⁷ M. Sievert, ”Transverse Spin and Classical Gluon Fields: Combining Two Perspectives on Hadronic Structure”, arXiv:1407.4047
- ⁸ Y. Hatta^a, B. Xiaob, S. Yoshidac, and F. Yuan, ”Single spin asymmetry in forward pA collisions II: Fragmentation contribution”, Phys. Rev. D 95, 014008 (2017)
- ⁹ M. Schlegel, ”Time reversal odd effects in SIDIS”
- ¹⁰ R. L. Jaffe, ”Spin, Twist and Hadron Structure in Deep Inelastic Processes”, MIT-CTP-2506
- ¹¹ M. Thomson, ”Modern Particle Physics”, ISBN 978-1-107-03426-6