

Čestična statistika

Nikola Herceg*

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

(Dated: 24. siječnja 2021.)

Koristeći formalizam integrala po putevima i alate iz teorije homotopije pokazujemo da postoji onoliko vrsta čestica, tj. valnih funkcija koliko i skalarnih unitarnih reprezentacija fundamentalne grupe konfiguracijskog prostora. Ova tvrdnja ima posebne implikacije na sustave nerazpoznatljivih čestica koje u kvantnoj domeni imaju bitno drugačija svojstva nego u klasičnoj. Pokazujemo da u tri dimenzije postoje dva tipa čestica, bozoni i fermioni. Na kraju dajemo kratki pregled aniona, vrste čestica koje se pojavljuju u dvije prostorne dimenzije i prezentiramo njihovu fizikalnu realizaciju inspiriranu Aharonov-Bohmovim efektom.

I. UVOD

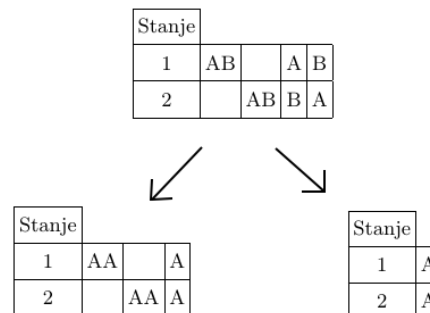
I.1. Povijesni kontekst

Krajem 19. stoljeća Maxwell i Boltzmann izveli su Maxwell-Boltzmannovu distribuciju koja opisuje gustoću vjerojatnosti brzine čestica u idealnom plinu. Izvod pretpostavlja kontinuum mogućih brzina i raspoznatljivost čestica pošto u klasičnoj fizici možemo slijediti putanje individualnih čestica i tako ih razlikovati unatoč tome što su identične po svojim fizikalnim karakteristikama (masa, naboj i ostalo). Einstein, Rayleigh i Jeans 1905. nezavisno su primijetili da ukupna snaga zračenja crnog tijela divergira ako se uzmu u obzir sve više frekvencije, što je nužno jer u particijskoj funkciji moramo sumirati po svim mogućim stanjima, pa time i svim frekvencijama [11].

Godine 1900. Max Planck izveo je točan izraz za zračenje idealnog crnog tijela pretpostavljajući da se energija emitira i apsorbira u diskretnim iznosima. Bose je 1924. u radu „Planck’s Law and Hypothesis of Light Quanta” riješio ovaj problem u kvantnoj domeni pretpostavljajući da su fotoni nerazpoznatljive čestice.

Nerazpoznatljivost identičnih čestica u kvantnom faznom prostoru posljedica je kanonskih komutacijskih relacija za položaj i impuls zbog kojih je fazni prostor „razmazan” pa koncept putanje nema previše smisla. Ta razmazanost proporcionalna je Planckovoj konstanti koja je vrlo mala pa je Maxwell-Boltzmann distribucija dobra aproksimacija pri sobnim uvjetima (visoke energije u odnosu na skalu Planckove konstante). Kontinuum brzina je isto razumna pretpostavka s obzirom na to da pri sobnim uvjetima imamo jako puno diskretnih stanja kad kvantno promatramo česticu u kutiji.

No kvantna fizika nam govori da pri nižim temperaturama, odnosno energijama ($E \approx k_B T$), broj dostupnih stanja postaje puno manji i time aproksimacija kontinuum nije više dobra. Opće je poznato da postoje dvije vrste čestica u prirodi s obzirom na ponašanje višestruke valne funkcije identičnih čestica, bozoni i fermioni. Bozoni daju Bose-Einstein, a fermioni Fermi-Dirac distribuciju.



Slika 1: Moguće kombinacije dvije čestice u dva stanja klasično (gore) i kvantno (dolje). Primijećujemo da čestica B postaje A (nerazpoznatljivost) te da u desnom dijagramu imamo najviše jednu česticu u svakom kvantnom stanju (Paulijev princip).

One se mogu izvesti iz kanonske ili velekanonske particijske funkcije. Moguća stanja sustava razlikuju se ovisno o tipu čestica pošto fermionski sustavi ne dozvoljavaju više od jedne čestice u jednom stanju. Ovu „degeneraciju” mogućih stanja pri prelasku iz klasične u kvantnu fiziku ilustrirali smo na slici 1. Na njoj promatramo sustav dvije identične čestice od kojih svaka može zaposjedati jedno od dva kvantna stanja. Gornja tablica prikazuje klasično moguća stanja¹ koja rezultiraju Maxwell-Boltzmannovom distribucijom, a donje dvije prikazuju bozone i fermione koji rezultiraju Bose-Einstein i Fermi-Dirac distribucijom.

I.2. Naivni izvod i njegove mane

Za početak pokazujemo dokaz postojanja dviju vrsta čestica koji se koristi na uvodnim kolegijima iz kvantne fizike.

Neka je (skalarna, zbog jednostavnosti) valna funkcija

¹ Klasično imamo kontinuum dozvoljenih energetskih stanja tako da ovu ilustraciju ne treba shvatiti predoslovno. Njena svrha je prikazati kako mikroskopski uvjeti uzrokuju različite makroskopske statistike čestica u vidu particijske funkcije.

* nikolaherceghr@gmail.com, ovo je seminar pod vodstvom mentora dr.sc. Tajrona Jurića.

sustava dvije identične čestice dana s:

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Kako su čestice identične, njihova zamjena mora rezultirati množenjem valne funkcije s neopservabilnom fazom:

$$\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = e^{i\theta} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Ponovna zamjena mora voditi na polaznu valnu funkciju pošto nema rezova ni singulariteta, tj. valna funkcija je jedinstveno definirana na domeni $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

$$e^{i\theta} \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = e^{2i\theta} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Ovdje već vidimo prvi mogući problem, npr. elektron koji napravi krug oko zavojnice pokupit će dodatnu fazu proporcionalnu toku magnetskog polja kroz zavojnicu (Aharonov-Bohm efekt). Time vrijednost valne funkcije nije ista iako se elektron vratio u početni položaj. No stavimo to zasad na stranu, zadnja jednadžba ograničava moguće faze:

$$e^{i\theta} = \pm 1. \quad (1)$$

Negativni predznak odgovara fermionima, a pozitivni bozonima.

Jedno od pitanja koje je prirodno postaviti je gdje se i kako odvija zamjena čestica? Jasno je da su na početku i na kraju čestice u pripadnim točkama prostora, no gdje su između i mogu li prelaziti jedna kroz drugu? Je li proces zamjene kontinuiran?

Osim toga, je li konfiguracijski prostor uopće $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ kako sugerira argument valne funkcije? Prisjetimo se Gibbsovog paradoksa u termodinamici u kojem je dijeljenje faznog prostora s $n!$ „popravilo” izraz za entropiju sustava identičnih čestica (postaje ekstenzivna, tj. aditivna).

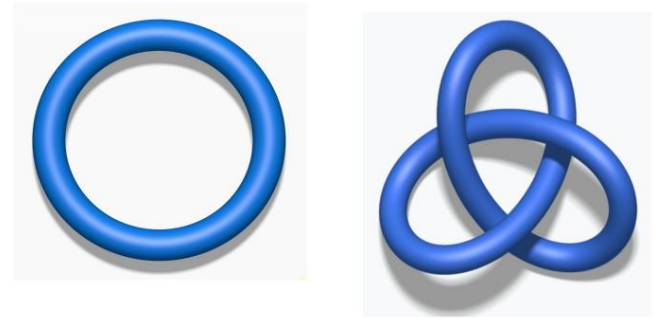
Ideja je nešto slično napraviti ovdje, no umjesto faznog prostora (hamiltonijan) baviti ćemo se konfiguracijskim (lagranžijan) zato što on igra glavnu ulogu u formalizmu Feynmanovih integrala po putevima kojeg koristimo za dokaz (1).

Taj formalizam nam omogućuje da tvrdnju dokažemo uz minimalne dodatne pretpostavke, a one koje uvedemo su razumne pretpostavke topološkog karaktera koje se odnose na konfiguracijski prostor. Kako i samo ime sugerira, u Feynmanovom formalizmu integrira po svim mogućim putanjama između neke dvije točke.

U poglavlju II ćemo uvesti teoriju homotopije koja te putanje (kojih ima mnogo) sažima u određene klase (kojih ima puno manje) s algebarskom strukturom grupe². U poglavlju III uvodimo formalizam integrala po putevima. Zatim u poglavlju IV spajamo koncepte iz prva dva te dokazujemo tvrdnju. Za kraj u poglavlju V diskutiramo slučaj aniona³ koji se pojavljuju u dvije dimenzije.

² Općenito grupoida, strukturu grupe dobivamo ako promatramo petlje iz iste točke.

³ Ovo nema veze s anionima koje vidamo u kemiji, porijeklo naziva dano je u fusnoti 11.



Slika 2: Trostruki čvor ne možemo otpetljati u tri dimenzije. [12]

II. TEORIJA HOMOTOPIJE

II.1. Motivacija

Uvodne definicije iz opće topologije dane su u dodatku A i u nastavku se nadovezujemo na njih i slijedimo [1].

Na prvu se čini da homeomorfne prostore možemo neprekidno deformirati jedan u drugi, ali to nije nužno istina. Promotrimo npr. čvor koji kao mnogostrukost uronjenu⁴ u \mathbb{R}^3 ne možemo neprekidno deformirati u torus uronjen u \mathbb{R}^3 iako lokalno izgledaju isto u svakoj točki (homeomorfni su). Situacija je prikazana na slici 2.

Ako bi pokušali ove prostore neprekidno deformirati jedan u drugi, morali bi ih presjecati. Homeomorfizam bi tada bio preslikavanje iz početnog $t = 0$ u konačno $t = 1$ vrijeme procesa deformacije. Drugim riječima, zaboravlja što se dešava između, a time i presjecanje. Homotopija s druge strane pamti pa nju zamišljamo kao kontinuirani proces u vremenu. Pošto u ovom slučaju zahtjevamo da figura ne smije presjecati samu sebe, ne postoji homotopija⁵ koja deformira torus u trostruki čvor i obrnuto. U nastavku preciziramo ovu definiciju.

II.2. Definicije i fundamentalna grupa

Put u prostoru X je neprekidno preslikavanje $f : I \rightarrow X$, gdje je $I = [0, 1]$ jedinični interval. Homotopija puteva f_0 i f_1 je familija puteva $f_t : I \rightarrow X$, $0 \leq t \leq 1$ takva da vrijedi:

- (1) Kraj i početak su fiksni, tj.

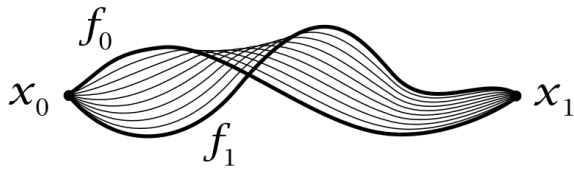
$$f_t(0) = x_0, f_t(1) = x_1, \quad \forall t \in I.$$

- (2) Pridruženo preslikavanje $F : I \times I \rightarrow X$ definirano s $F(s, t) \equiv f_t(s)$ je neprekidno.

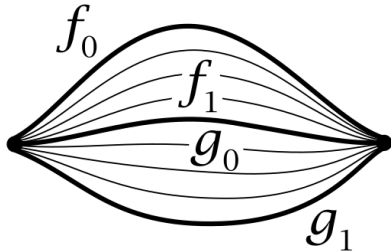
- (3) Početak ($t = 0$) i kraj ($t = 1$) homotopije odgovaraju putevima f_0 i f_1 .

⁴ eng. embedding, ne smije se presjecati.

⁵ Formalno izotopija u slučaju čvorova.



Slika 3: Vizualizacija homotopije. [1]



Slika 4: Vizualizacija tranzitivnosti. [1]

Tada kažemo da su putevi f_0 i f_1 homotopični i pišemo $f_0 \simeq f_1$. Ako parametar t predstavlja vrijeme, onda homotopiju zamišljamo kao kontinuiranu deformaciju jednog puta u drugi unutar prostora X . Familija puteva prikazana je na slici 3.

Homotopija puteva za fiksne krajnje točke je relacija ekvivalencije⁶.

Dokaz:

Refleksivnost je dana konstantnom homotopijom, $f_t(x) = f$.

Simetričnost dobivamo tako da „okrenemo vrijeme“: ako je $f_0 \simeq f_1$ preko f_t , inverzna homotopija f_{1-t} daje traženu homotopiju.

Za dokaz tranzitivnosti pretpostavimo da vrijedi $f_0 \simeq f_1$ i $f_1 = g_0 \simeq g_1$. Traženu homotopiju dobivamo tako da pola vremena koristimo prvu a pola vremena drugu homotopiju, tj. duplo ubrzamo svaku od njih i spojimo ih. Grafički prikaz je na slici 4. \square

Klasu homotopije puta f pišemo $[f]$, dakle

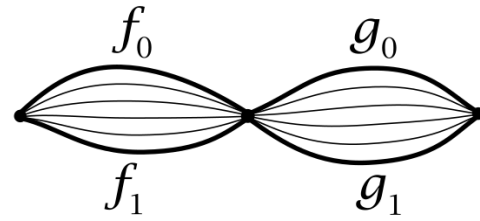
$$[f] = \{g \mid g \simeq f\}.$$

Homotopičnost dva puta f_1 i f_2 sada možemo pisati kao $[f_1] = [f_2]$. Skup svih klasa homotopije između a i b označavamo s $\pi(X, a, b)$.

Za dva puta $f, g : I \rightarrow X$ takva da je $f(1) = g(0)$ definiramo njihovu kompoziciju ili produkt kao put koji prolazi prvo jednim, a zatim drugim putem:

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s - 1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

⁶ Refleksivna, simetrična i tranzitivna binarna relacija koja grupira elemente u klase ekvivalencije.



Slika 5: Kompozicija puteva ili konkatencija je lijepljenje krajnje točke jednog s početnom točkom drugog puta. [1]

Ovako definiran produkt dobro se ponaša s obzirom na homotopiju. Ako vrijedi $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$ te $f_0(1) = g_0(0)$, tada definiranjem $f_t \cdot g_t$ dobivamo homotopiju $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$. Grafički prikaz je na slici 5.

Put koji počinje i završava u istoj točki $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ zovemo petlja, a x_0 istaknuta točka. Za skup svih klasa homotopije petlji $[f]$ u točki x_0 pišemo $\pi_1(X, x_0)$. Ako dodatno definiramo produkt $[f][g] = [f \cdot g]$, skupu dajemo strukturu grupe koju zovemo fundamentalna grupa i označavamo ju također s $\pi_1(X, x_0)$.

Dokaz:

Prije svega, grupno množenje je dobro definirano jer se produkt dobro ponaša s obzirom na homotopiju, tj. čuva ju. Reparametrizirani putevi f i $g = f\phi(s)$, gdje $\phi(s) : I \rightarrow I$ reparametrizira, povezani su homotopijom $f_t(s) = (1-t)\phi(s) + ts$ pa su u istoj klasi ekvivalencije.

Neutralni element je put koji miruje u x_0 , $e(s) = x_0$. Očito je $[e][f] = [f][e] = [f]$ jer su ovi putevi isti do na reparametrizaciju.

Asocijativnost vrijedi jer su $([f][g])[h]$ i $[f]([g][h])$ također samo reparametrizirani putevi.

Inverz je put unatrag, $[f(1-s)] = [f^{-1}]$ jer je $[f][f^{-1}] \simeq e$ do na trivijalnu reparametrizaciju preko homotopije $h_t = (1-t)f_{1-t} \cdot f_{1-t}^{-1} \cdot e$, gdje je $f_t(s) = f(ts)$. \square

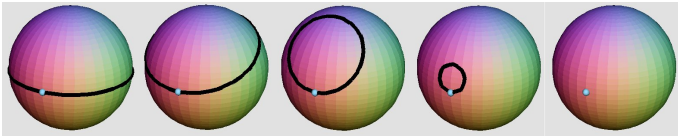
Homotopija dakle grupira krivulje u klase unutar kojih se jedna može neprekidno deformirati u drugu. Fundamentalna grupa govori nam kako su te klase povezane. U fizici smo navikli na grupe gledati kao posljednicu simetrije, što i ovdje vrijedi u neku ruku, ali ne doslovno. Ovdje dimenzionalnost grupe, tj. broj generatora odgovara broju rupa u prostoru pa fundamentalna grupa na neki način služi kao detektor rupa. Kroz nekoliko primjera dobit ćemo intuitivniju sliku o fundamentalnoj grupi.

II.3. Primjeri

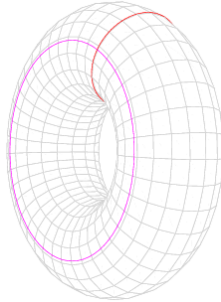
Promotrimo najosnovnije prostore:

Kartezijev prostor \mathbb{R}^n :

Fundamentalna grupa prostora \mathbb{R}^n je trivijalna jer su svaka dvije petlje f i g homotopski ekvivalentne preko linearne homotopije $h_t(s) = (1-t)f(s) + tg(s)$. To znači da je $[f] = [e]$ pa grupa sadrži jedan element. Ovo je u skladu s



Slika 6: Svaku petlju na sferi moguće je kontrahirati u točku. [13]



Slika 7: Fundamentalnu grupu torusa generiraju dvije petlje. [14]

idejom da prostor \mathbb{R}^n nema rupa.

Sfera:

Fundamentalna grupa sfere je trivijalna jer je svaku petlju moguće stegnuti u točku kako je prikazano na slici 6. Ovo nije moguće na kružnici.

Kružnica S^1 :

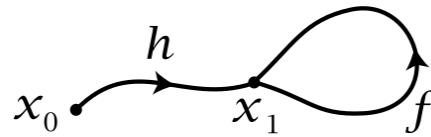
Formalan dokaz je dosta rigorozan, tako da ćemo ga ukratko argumentirati slikovito. Fundamentalna grupa je $(\mathbb{Z}, +)$, grupa cijelih brojeva s obzirom na zbrajanje. Svako petlji možemo pridružiti cijeli broj namotaja, gdje predznak odgovara smjeru namatanja. Jasno je da se pri kompoziciji petlji broj namotaja zbraja i da su petlje s istim brojem namotaja homotopične jer ih možemo „izravnati“ u uniformo namatanje. Dakle, klase ekvivalencije su broj namotaja i grupno množenje (kompozicija puteva) odgovara zbrajanju.

Torus:

Fundamentalna grupa je $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, kao da gledamo dvije nezavisne kružnice, što ima smisla jer za svaku petlju možemo definirati broj namotaja oko malog i velikog radijusa. Generatori grupe prikazani su na slici 7. Kako je torus zapravo $S^1 \times S^1$, ovo je posljedica općenitije tvrdnje da je $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

II.4. Uloga istaknute točke i mreža puteva

Istaknuta točka nam je poslužila kako bi put imao isti početak i kraj, tj. da bi kompozicija bila dobro definirana nad klasama homotopije. Prirodno je pitati se kako se mijenja fundamentalna grupa ako kontinuirano mijenjamo tu



Slika 8: Promjena istaknute točke. [1]

točku. Iz prethodnih primjera vidimo da se ona ne mijenja izborom istaknute točke.

Promotrimo petlje iz dvije istaknute točke, x_0 i x_1 . Neka je $h : I \rightarrow X$ put od x_0 do x_1 . Tada svakoj petlji f iz točke x_1 možemo pridružiti petlju u točki x_0 dobivenu kompozicijom $h \cdot f \cdot h^{-1}$. Grafički prikaz je na slici 8.

Ovo pridruživanje inducira izomorfizam β_h među pripadnim fundamentalnim grupama.

Dokaz:

$$\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

$$\beta_h[f] = [h \cdot f \cdot h^{-1}].$$

Pošto je $\beta_h[f \cdot g] = [h \cdot f \cdot g \cdot h^{-1}] = [h \cdot f \cdot h^{-1} \cdot h \cdot g \cdot h^{-1}] = \beta_h[f]\beta_h[g]$, ovo je homomorfizam. Nadalje, β_h je izomorfizam s inverzom $\beta_{h^{-1}}$, $\beta_h\beta_{h^{-1}}[f] = \beta_h[h^{-1} \cdot f \cdot h] = [h \cdot h^{-1} \cdot f \cdot h \cdot h^{-1}] = [f]$, analogno za $\beta_{h^{-1}}\beta_h$. \square

Ovime smo pokazali da fundamentalna grupa ne ovisi o izboru konkretne točke unutar povezanе komponente prostora X . To znači da bez gubitka općenitosti možemo pisati $\pi_1(X)$ za putevima povezan prostor X .

Slično tako, elemente fundamentalne grupe u točki x možemo bijektivno preslikati u klase homotopije između točaka a i b . Za to je prvo potrebno izabrati mrežu puteva $C(a)$ koja svakoj točki a pridružuje proizvoljni put od točke x do a . Sada za svaki par točaka (a, b) definiramo f_{ab} kao

$$f_{ab} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, a, b),$$

$$f_{ab}(\alpha) = [C^{-1}(a)]\alpha[C(b)].$$

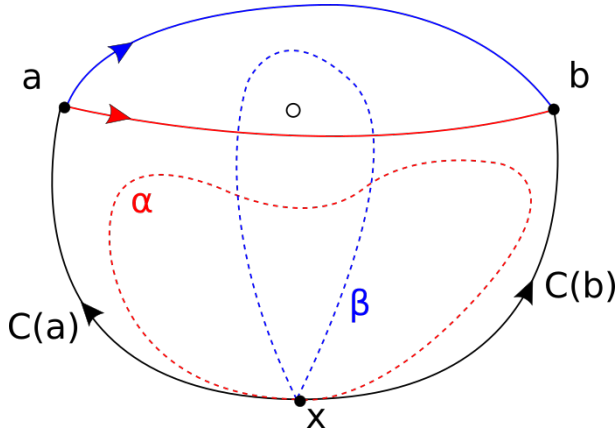
Ovo preslikavanje je bijektivno, dokaz je analogan gornjem. Grafički prikaz mreže homotopije za dvije točke je na slici 9.

Nadalje, zbog toga što se kompozicija puteva dobro ponaša s obzirom na homotopiju i jer je $[C(b)][C(b)^{-1}] = [e]$, slijedi

$$f_{ab}(\alpha)f_{bc}(\beta) = f_{ac}(\alpha\beta). \quad (2)$$

Ovaj izraz je posljedica postojanja fundamentalnog grupoida⁷ prostora X .

⁷ Grupoid je kao grupa osim što grupno množenje nije definirano na svim elementima, kao što kompozicija nije definirana za sve puteve.



Slika 9: Prostor je $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, maknuta točka ilustrirana je šupljim krugom. Iscrtkane petlje su predstavnici različitih elemenata fundamentalne grupe, a pune obojane crte su nehomotopični putevi između a i b . Jedna od njih je homotopski ekvivalentna petlji α , a druga β .

Sjetimo se da smo strukturu grupe mogli pridjeliti klasama homotopije petlji jer počinju i završavaju u istoj točki pa je kompozicija svake dvije dobro definirana.

Kompozicija puteva općenito je dobro definirana ako je krajnja točka prvog početna točka drugog puta. Promotrimo li pripadne klase homotopije, nije teško uvjeriti se u postojanje gornjeg homomorfizma jer putevi u principu jednako dobro i konzistentno mogu detektirati rupe kao i petlje.

III. INTEGRALI PO PUTEVIMA

Ukratko prezentiramo integrale po putevima slijedeći [2]. Schrödingerova jednačba omogućuje nam da uz pomoć hamiltonijana izračunamo stanje sustava iz stanja u kojem je sustav bio inifinitezimalno vremena ranije. Metoda integrala po putevima s druge strane ovisi o svojstvima sustava u svim vremenima. U tom smislu ova je metoda globalna u odnosu na Schrödingerovu koja je lokalna.

Originalna Feynmanova formulacija bila je za jednu česticu u Kartezijevom prostoru. Amplituda prijelaza iz stanja $|x_a\rangle$ u vremenu t_a u stanje $|x_b\rangle$ u vremenu t_b dana je s

$$\langle x_b t_b | x_a t_a \rangle = \langle x_b | \hat{U}(t_b, t_a) | x_a \rangle.$$

Kapicom iznad slova označavamo operatorsku opservablu, a bez kapice klasičnu. Npr. $\hat{H} \equiv H(\hat{x}, \hat{p}, t)$. Prvo podijelimo vrijeme na $N + 1$ ekvidistantnih intervala $t_a < t_1 < \dots < t_N < t_b$ trajanja $\epsilon \equiv \frac{t_b - t_a}{N+1} = t_{i+1} - t_i$,

$$\langle x_b t_b | x_a t_a \rangle = \langle x_b | \hat{U}(t_b, t_N) \hat{U}(t_N, t_{N-1}) \dots \dots \hat{U}(t_n, t_{n-1}) \dots \hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_a) | x_a \rangle.$$

Zatim ubacimo potpun skup stanja

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| = 1, \quad n = 1, \dots, N \quad (3)$$

između svaka dva operatora \hat{U} . Amplituda postaje

$$\langle x_b t_b | x_a t_a \rangle = \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle, \quad (4)$$

gdje smo stavili $x_b \equiv x_{N+1}$, $x_a \equiv x_0$, $t_b \equiv t_{N+1}$, $t_a \equiv t_0$. Integrandi su produkti amplituda za vremenske intervale

$$\langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle = \langle x_n | e^{-i\epsilon \hat{H}/\hbar} | x_{n-1} \rangle.$$

Uz pretpostavku da se Hamiltonijan može napisati kao zbroj kinetičke i potencijalne energije dobivamo

$$e^{-i\epsilon \hat{H}/\hbar} = e^{-i\epsilon(\hat{T} + \hat{V})/\hbar} = e^{-i\epsilon \hat{V}/\hbar} e^{-i\epsilon \hat{T}/\hbar} e^{-i\epsilon^2 \hat{X}/\hbar^2}, \quad (5)$$

gdje smo primjenili Baker-Campbell-Hausdorff formulu u kojoj je

$$\hat{X} \equiv \frac{i}{2} [\hat{V}, \hat{T}] - \frac{\epsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{6} [\hat{V}, [\hat{V}, \hat{T}]] - \frac{1}{3} [[\hat{V}, \hat{T}], \hat{T}] \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Kako član koji sadrži \hat{X} u jednačbi (5) ima uz sebe ϵ^2 faktor koji je zanemariv u limesu $N \rightarrow \infty \implies \epsilon \rightarrow 0$, amplituda se u prvoj (i dovoljnoj) aproksimaciji svodi na

$$\begin{aligned} \langle x_n | e^{-i\epsilon H(\hat{p}, \hat{x}, t_n)/\hbar} | x_{n-1} \rangle &\approx \quad (6) \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x_n | e^{-i\epsilon V(\hat{x}, t_n)/\hbar} | x \rangle \langle x | e^{-i\epsilon T(\hat{p}, t_n)/\hbar} | x_{n-1} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x_n | e^{-i\epsilon V(\hat{x}, t_n)/\hbar} | x \rangle. \quad (7) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{ip_n(x - x_{n-1})/\hbar} e^{-i\epsilon T(p_n, t_n)/\hbar}. \quad (8)$$

Integral (7) je vrijednost matrice elementa operatora tipa $\hat{O}(x) = O(\hat{x})$ u bazi $|x\rangle$. On iznosi

$$\langle x_n | e^{-i\epsilon V(\hat{x}, t_n)/\hbar} | x \rangle = \delta(x_n - x) e^{-i\epsilon V(x_n, t_n)/\hbar}.$$

Ubacivanjem nazad u (6) za amplitudu imamo

$$\begin{aligned} \langle x_n | e^{-i\epsilon H(\hat{p}, \hat{x}, t_n)/\hbar} | x_{n-1} \rangle &\approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{ip_n(x_n - x_{n-1})/\hbar - i\epsilon [T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n)]/\hbar} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovog rezultata nazad u (4) konačno imamo

$$\langle x_b t_b | x_a t_a \rangle \approx \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}^N \right), \quad (9)$$

gdje je

$$\mathcal{A}^N = \sum_{n=1}^{N+1} [p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H(p_n, x_n, t_n)].$$

Kako je kinetička energija $\frac{p^2}{2M}$, slijedi

$$\mathcal{A}^N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n (x_n - x_{n-1}) - \epsilon \frac{p_n^2}{2M} - \epsilon V(x_n, t_n) \right].$$

Zapišimo ovo kao binom u p_n :

$$\mathcal{A}^N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[-\frac{\epsilon}{2M} \left(p_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} M \right)^2 + \frac{M}{2} \epsilon \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - \epsilon V(x_n, t_n) \right].$$

Integral p_n prostora u relaciji (9) postaje

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\epsilon}{2M} \left(p_n - M \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i \epsilon / M}},$$

gdje smo koristili formulu za imaginarni gausijan dokazanu u dodatku B:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{ia}} \quad (a > 0).$$

Amplituda je sad

$$(x_b t_b | x_a t_a) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i \epsilon / M}} \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi\hbar i \epsilon / M}} \right] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}^N \right), \quad (10)$$

gdje je

$$\mathcal{A}^N = \epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{M}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(x_n, t_n) \right].$$

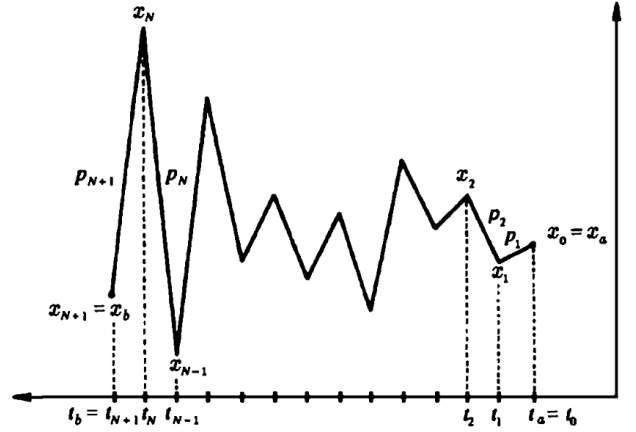
U limesu kontinuuma ($N \rightarrow \infty$), \mathcal{A}^N postaje funkcional $\mathcal{A}[x(t)]$ i prvi član u zadnjem izrazu postaje derivacija po vremenu pošto $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\mathcal{A}[x] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 - V(x, t) \right] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(x, \dot{x}).$$

Ovu veličinu prepoznajemo kao akciju. Klasična putanja je ona za koju je ona ekstremalna, dok je u kvantnoj fizici potrebno sumirati akciju po svim mogućim putevima. Ukupnu amplitudu sad možemo zapisati preko oznake \mathcal{D} koja zapravo označava limes $N \rightarrow \infty$ integrala u (10):

$$(x_b t_b | x_a t_a) \equiv \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}x e^{i\mathcal{A}[x]/\hbar}. \quad (11)$$

Mjera integracije $\mathcal{D}x$ označava sve moguće puteve u konfiguracijskom prostoru koji počinju u x_a i završavaju u x_b .



Slika 10: Vizualizacija amplitude za konačni N . Prikazan je jedan od mogućih puteva, a sve ostale dobivamo variranjem visina x_i . Poredak na x-osi je takav da odgovara poretku operatora u izrazima. [2]

Vizualna interpretacija je na slici 10. Riječ put opravdava činjenica da graf na toj slici u limesu $N \rightarrow \infty$ postaje gladak ($\lim_{N \rightarrow \infty} dx_i \sum \rightarrow Dx$). S druge strane proizvoljni glatki (beskonačno puta derivabilan) put možemo proizvoljno blizu reproducirati za dovoljno veliki N ($Dx \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \prod dx_i \sum$) pa stoga razlikujemo dva različita glatka puta.

Izvod Schrödingerove jednadžbe u formalizmu integrala po putevima dan je u dodatku C.

IV. VEZA HOMOTOPIJE I INTEGRALA PO PUTEVIMA

U ovom poglavlju slijedimo rad [4] u kojem su Laidlaw i DeWitt pokazali da je amplitudu moguće napisati kao

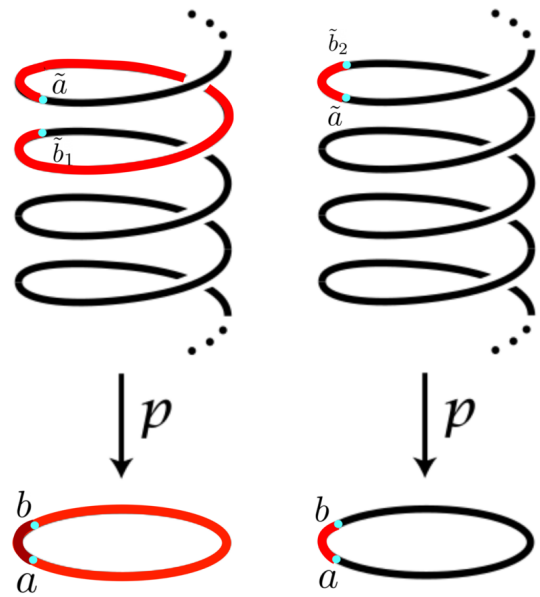
$$K(b, t_b; a, t_a) \equiv (x_b t_b | x_a t_a) = \sum_{\alpha \in \pi_1(X)} \chi(\alpha) K^\alpha(b, t_b; a, t_a), \quad (12)$$

gdje je K^α **parcijalna amplituda** dobivena integracijom po svim putevima koji su u klasi (vidi potpoglavlje II.4) $f_{ab}(\alpha)$, a $\chi(\alpha)$ koeficijenti koji moraju tvoriti skalarnu unitarnu reprezentaciju fundamentalne grupe kofinguracijskog prostora. Notacija za amplitudu je zbog preglednosti promjenjena u odnosu na prethodno poglavlje.

Pretpostavljamo da je konfiguracijski prostor X višestruko povezan, povezan putevima, lokalno povezan putevima i lokalno jednostavno povezan. Ovi pojmovi pojašnjeni su u dodatku A. Prije samog dokaza uvodimo neke matematičke pojmove koje spominjemo u glavnom dokazu.



Slika 11: Vizualizacija projekcije pravca na kružnicu. Crvenom bojom označena je okolina jedne točke na kružnici, a na zavojnici (\mathbb{R}) su crveno označeni skupovi u prasluci te okoline. [1]



Slika 12: Usporedba dvije putanje između točaka a i b u X s pripadnim podizanjima u \tilde{X} .

IV.1. Natkrivajući prostor

Pretpostavimo da je konfiguracijski prostor čestice kružnica. Fizikalno bi to bio npr. rotator s fiksnom osi poput vrtuljka ($L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$). Detaljnija analiza ovakvog sustava dana je u poglavlju 23.1 [5], ovdje promatramo samo osnovne aspekte.

Natkrivajući prostor prostora X je prostor \tilde{X} zajedno s preslikavanjem $p: \tilde{X} \rightarrow X$ takvim da za svaku točku $x \in X$ postoji okolina U čija je prasluka $p^{-1}(U)$ unija disjunktnih otvorenih skupova od kojih se svaki homeomorfno preslikava u U preko p .

Definicija zvuči komplicirano pa stoga pogledajmo primjer kružnice. Jedan od natkrivajućih prostora kružnice je pravac \mathbb{R} skupa s projekcijom p danom s:

$$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, \\ p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Ova projekcija grafički je prikazana na slici 11.

Kako je preslikavanje p lokalno homeomorfizam, lagranžijan L koji je definiran na prostoru X možemo „podići“ u lagranžijan \tilde{L} definiran na \tilde{X} postkomponiranjem puta u \tilde{X} s p . Lagranžijan je općenito funkcija koordinata i njihovih derivacija u vremenu što je dobro definirano s obzirom na neprekidnost preslikavanja p .

Intuitivno je jasno da postoji put ekstremalne akcije između točaka a i b na kružnici. No postoji i mnogo drugih puteva koji su lokalni ekstremali. Od točke a do b možemo doći najkraćim putem kao na desnom dijelu slike 12 ili uz dodatni krug kao na lijevom dijelu slike.

Nije posve jasno kako nametnuti uvjet dodatnog kruga ako gledamo isključivo kružnicu. No ako promotrimo pripadni natkrivajući prostor nametanje ovog uvjeta postaje jednostavno jer put koji radi jedan krug više i završava u točki b na kružnici završava u točki \tilde{b}_1 u natkrivajućem prostoru, dok onaj koji ne radi krug završava u točki \tilde{b}_2 pod pretpostavkom da su krenuli iz iste točke \tilde{a} u \tilde{X} . Kako je \tilde{X} konfiguracijski prostor s lagranžijanom (dobivenim podizanjem s kružnice), između svake dvije točke postoji put ekstremalne akcije. Ako je \tilde{X} dodatno jednostavno povezan, ekstremal je jedinstven.

Za konačnu točku mogli smo izabrati bilo koju točku iz prasluka $p^{-1}(b)$ koje su očito u bijekciji s elementima fundamentalne grupe pošto oni odgovaraju broju namotaja.

Dakle, prelaskom u natkrivajući prostor uvjerali smo se u postojanje ekstremalnog puta u svakoj klasi homotopije.

Napomenimo još da je univerzalni natkrivajući prostor onaj koji je jednostavno povezan. On je jedinstven (do na homeomorfizam). Može se pokazati ([1]) da je to prostor koji natkriva sve natkrivajuće prostore nekog prostora. Pravac \mathbb{R}^1 je prema prvom primjeru u potpoglavlju II.3 jednostavno povezan i stoga je univerzalni natkrivajući prostor kružnice. Njegovo postojanje pokazano je npr. u korolaru 82.2 iz [8]:

Topološki prostor X ima univerzalni natkrivajući prostor ako i samo ako je povezan putevima, lokalno povezan putevima i semilokalno jednostavno povezan.

U dodatku A je definicija lokalno jednostavno povezanog prostora koji je uvijek i semilokalno jednostavno povezan.

IV.2. Djelovanje grupe na prostor

Jednostruka petlja na kružnici efektivno podiže crvene okoline na slici 11 za jednu razinu gore.

Ova petlja je reprezentant generatora fundamentalne grupe \mathbb{Z} . Općenito element $n \in \mathbb{Z}$ djeluje tako da za n razina podigne (ili spusti za $n < 0$) crvene okoline u \tilde{X} .

Ovo zovemo djelovanje grupe $G(\mathbb{Z})$ na prostor $\tilde{X}(\mathbb{R})$. Općenito, za svaku točku $x \in \tilde{X}$ fiksni $\alpha \in G$ šalje $x \rightarrow x'$ i to pišemo kao

$$x' = \alpha(x).$$

Vratimo se na pravac i kružnicu. Razmišljajući u obrnutom smjeru, kružnicu možemo dobiti iz pravca lijepljenjem točaka udaljenih za 2π . Lijepljenje znači poistovjetiti točke prema nekoj relaciji ekvivalencije. U ovom slučaju relacija je

$$x \simeq x + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Time smo kružnicu dobili kao kvocijentni prostor (vidi datak A) pravca i grupe \mathbb{Z} :

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Kažemo da grupa G efektivno djeluje na prostor \tilde{X} ako za svaki $\alpha \neq e \in G$ i $x \in \tilde{X}$ vrijedi

$$\alpha(x) \neq x.$$

Grupa \mathbb{Z} efektivno djeluje na pravac jer jedino jedinični element fiksira točke (nula namotaja). Za kraj dajemo iskaz teorema 81.6 iz [8]:

Ako je \tilde{X} univerzalni prostor natkrivanja, fundamentalna grupa $\tilde{X}/G = X$ je izomorfna G .

Dakle, do fundamentalne grupe kružnice mogli smo doći zaključivši da \mathbb{Z} djeluje efektivno na \mathbb{R} pa mora biti $\pi_1(S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

IV.3. Temeljne tvrdnje i dokazi

Za početak dokazujemo sljedeće tvrdnje imajući na umu jednadžbu (12):

I:

$$K^\gamma(c, t_c; a, t_a) = \sum_{\alpha\beta=\gamma} \int K^\beta(c, t_c; b, t_b) K^\alpha(b, t_b; a, t_a) db,$$

gdje je K^β parcijalna amplituda.

II:

Svaka točka $a \in X$ ima okolinu U tako da za svaku drugu točku a' u toj okolini vrijedi

$$K^\alpha(a', t'; a, t) \rightarrow 0 \quad \text{za} \quad t' \rightarrow t, \quad t' \neq t$$

za točno jedan $\alpha \in \pi_1(X, x)$.

III:

Promjena mreže $C \rightarrow \bar{C}$ relabelira koeficijente u (12) tako da $K^\alpha \rightarrow \bar{K}^\alpha = K^{\lambda\alpha\mu}$ za neke $\lambda, \mu \in \pi_1(X, x)$.

IV:

Parcijalne amplitude su linearno nezavisne funkcije 4 parametra.

Prvu tvrdnju možemo interpretirati kao jednadžbu Smoluchowskog koja se pojavljuje u Markovljevim procesima što ilustrira Brownov karakter integrala po putevima.

Dokaz I:

Svaki put u klasi $f_{ac}(\gamma)$ možemo rastaviti na dva puta q_1, q_2 gdje je $q_1 \in f_{ab}(\alpha)$ i $q_2 \in f_{bc}(\beta)$ za neku proizvoljnu točku puta b i $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x)$ za koje vrijedi $\alpha\beta = \gamma$. Ovo vrijedi zbog jednadžbe (2). Potrebno je integrirati po db zato jer svi mogući putevi prolaze kroz sve moguće točke a pri kompoziciji puteva amplitude se množe pošto je akcija u eksponentu jednadžbe (11) pa aditivnost putanje (zbrajanje akcije po segmentima) postaje množenje pripadnih amplituda. Do na zahtjev zadržavanja u klasi γ , ovo je zapravo ubacivanje potpunog skupa stanja (3) u vremenu t_b . \square

Druga tvrdnja nema toliko interpretacija kao prva, no intuitivno je jasno da će između svake dvije prostorne točke postojati globalni ekstremal akcije (odgovara klasičnoj putanji, vidi potpoglavlje IV.1) koji je krivulja pa stoga pripada jednoj klasi homotopije koja je u tom slučaju dominantna.

Dokaz II:

Neka je $a \in X$. Pošto je X lokalno jednostavno povezan, postoji okolina V točke a koja je jednostavno povezana. Dakle, za svaki $b \in V$ svi putevi iz a u b su homotopični. Za dovoljno mali $\epsilon > 0$ moguće je izabrati novu okolinu $U \subset X$ tako da je za svaku točku $a' \in U$ klasična akcija $S_c/\hbar < \epsilon$ ako i samo ako je ona unutar U . Klasična akcija je globalni ekstrem u prostoru funkcionala (i bez smanjenja općenitosti uzimamo da je minimalna), no može postojati više lokalnih koji pripadaju različitim klasama homotopije kao što smo se uvjerali u potpoglavlju IV.1.

Neka je $q(a, a')$ put između a i a' koji prolazi djelomično izvan skupa U . Tada možemo pisati $q(a, a') = q(a, b) \cdot q(b, a')$ za $b \notin U$ i $t_a < t_b < t_{a'}$. Kako je akcija aditivna s obzirom na kompoziciju puteva i $b \notin U$, vrijedi $S[q(a, a')] > S[q(a, b)] > \hbar\epsilon$ što znači da klasična putanja, ona za koju je akcija minimalna (i po konstrukciji skupa U manja od $\hbar\epsilon$), mora ležati u potpunosti unutar skupa U . Ako je ϵ toliko mali da je $U \subset V$, put $q_c(a, a')$ je jedinstven pošto leži unutar jednostavno povezanog skupa V (sjetimo se da je lokalnih ekstremala koliko i klasa homotopije). Kako vremenski interval postaje sve manji i manji, ampli-

tudi značajno doprinose samo putevi koji su bliski klasičnom koji tada leže unutar U i V pa su homotopični. \square

Pojasnimo malo zadnju rečenicu. Razvoj akcije oko klasične putanje je kao da parabolu razvijamo oko minimuma. U tom slučaju x -os je u neki apstraktni parametar x kojim deformiramo putanju i nije jedinstven, a y -os je vrijednost akcije.

Npr. ako je put minimalne akcije dan funkcijom $f : I \rightarrow X$, za svaku funkciju $g : I \rightarrow X$ za koju vrijedi $g(0) = g(1) = 0$, vrijedi $S[h_x] > S[f]$, gdje je put h_x

$$h_x = f + xg.$$

Stoga funkcija $y(x) \equiv S[h_x]$ ima minimum⁸ u točki $\epsilon = 0$.

Iz formule (11) vidimo da svaka akcija, tj. put, koji je u našem slučaju točka na x -osi, doprinosi s određenom fazom amplitudi. Oko minimuma su faze praktički jednake za neku ϵ -okolinu na x -osi pošto derivacija parabole iščezava. Uloga skupa U je zadavanje ove ϵ okoline.

Amplitudu možemo zamišljati⁹ kao zbroj jediničnih vektora u kompleksnoj ravnini. Kako se malo pomičemo oko minimuma, smjer vektora ostaje približno konstantan pa njihov zbroj ima preferirani smjer.

Kad bi gledali doprinose drugih klasa homotopije morali bi izaći iz te okoline, no tamo derivacija parabole više nije nula.

Ako amplitudu opet gledamo kao zbroj jediničnih vektora, onda se u tom slučaju malim pomakom oko centra koji je daleko od minimuma faza značajno mijenja jer je lokalno kosi pravac, a kako je faza zapravo kut jediničnog vektora u kompleksnoj ravnini, onda sumiramo vektore različitih kuteva pa imamo destruktivnu interferenciju, tj. mali doprinos amplitudi.

Dokaz III:

Pretpostavimo da se mreža mijenja iz C u \bar{C} . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ab}(\alpha) &= [\bar{C}^{-1}(a)] \alpha [\bar{C}(b)] \\ &= [C^{-1}(a)] [C(a)] [\bar{C}^{-1}(a)] \alpha [\bar{C}(b)] [C^{-1}(b)] [C(b)] \\ &= [C^{-1}(a)] \lambda \alpha \mu [C(b)] \\ &= f_{ab}(\lambda \alpha \mu), \end{aligned} \tag{13}$$

gdje su

$$\begin{aligned} \lambda &= [C(a)\bar{C}^{-1}(a)] \in \pi_1(X, x), \\ \mu &= [\bar{C}(b)C^{-1}(b)] \in \pi_1(X, x). \end{aligned} \tag{14}$$

Pošto putevi $C(a)$ i $\bar{C}(a)$ idu od x do a , ovo su dobro definirane petlje. Za provjeru uzmimo $\bar{C} = C$. Tada su klase λ i μ jedinični elementi u $\pi_1(X, x)$ jer smo inverze u

⁸ Općenito ovaj minimum ne mora biti kvadratični kao kod parabole koju uzimamo zbog jednostavnosti. Korištenjem teorema o srednjoj vrijednosti lako se generalizira.

⁹ Ovakvu interpretaciju daje Feynman u svojoj popularnoj knjizi „QED: The Strange Theory of Light and Matter”.

fundamentalnoj grupi reprezentirali petljama koje idu „unazad”. Kako su λ i μ jedinični element, očekivano ne mijenjaju oznake parcijalnim amplitudama.

Dakle, iz jednadžbe (13) za parcijalne amplitude dobivamo

$$\bar{K}^\alpha(b, t_b; a, t_a) = K^{\lambda \alpha \mu}(b, t_b; a, t_a).$$

\square

Dokaz IV:

Pretpostavimo da amplitude nisu linearno nezavisne funkcije. Tada postoji skup kompleksnih brojeva A_α od kojih barem dva ne iščezavaju i za koje vrijedi

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} K^{\alpha}(b, t_b; a, t_a) = 0 \quad \text{za sve } a, b \in X \text{ i } t_a, t_b.$$

No ovakav zahtjev nije dovoljno dobar jer poredak koeficijentata ovisi o odabiru mreže pa treba uzeti u obzir sve moguće mreže. Prethodni uvjet sad postaje

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} K^{\lambda \alpha \mu}(b, t_b; a, t_a) = 0 \quad \text{za sve } a, b \in X$$

i za sve $\lambda, \mu \in \pi_1(X, x)$.

Pretpostavka je da su funkcije linearno zavisne za sve (a, t_a, b, t_b) pa posebno i za $t_a \rightarrow t_b$. Tada prema tvrdnji II možemo odabrati neku točku i okolinu unutar koje točno jedna parcijalna amplituda K^α ne iščezava pa u tom slučaju efektivno svi osim jednog A^α iščezavaju što je kontradikcija s obzirom na početnu pretpostavku. \square

IV.4. Restrikcije na koeficijente $\chi(\alpha)$

Kako bi izraz (12) bio fizikaln, promjena mreže ne smije biti opservabilna pošto ne postoji apriori preferirana mreža. Vjerojatnosti koje su kvadrat modula amplitude su ono što fizikalno opserviramo pa ovaj zahtjev prevodimo kao

$$|K(b, t_b; a, t_a)| = \left| \sum_{\alpha} \chi(\alpha) K^{\lambda \alpha \mu}(b, t_b; a, t_a) \right|$$

za sve $\lambda, \mu \in \pi_1(X, x)$.

Koeficijenti $\chi(\alpha)$ ne ovise o a, t_a, b, t_b pa odabirom $t_a \rightarrow t_b$ slično kao u prethodnom dokazu na temelju tvrdnje II zaključujemo $|\chi(\alpha)| = 1$ za sve α .

Slično kao u dokazu prve tvrdnje, vrijedi

$$|K(c, t_c; a, t_a)| = \left| \int K(c, t_c; b, t_b) K(b, t_b; a, t_a) db \right|,$$

što je ekvivalentno

$$\begin{aligned} e^{i\theta} K(c, t_c; a, t_a) &= \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha) \chi(\beta) \int K^{\beta}(c, t_c; b, t_b) K^{\alpha}(b, t_b; a, t_a) db \end{aligned} \tag{15}$$

za neki $\theta \in \mathbb{R}$. Pritom smo zapisali amplitude kao u jednadžbi (12) ne pretpostavljajući zasad ništa o koeficijentima

$\chi(\alpha)$. Promijenimo sad mrežu za sve točke $b \in X$ osim a i c tako da sve puteve do točke b pretkomponiramo s nekom krivuljom iz klase $\gamma \in \pi_1(X, x)$, dakle $[\overline{C}(b)] = \gamma[C(b)]$. Iz jednadžbi (13) i (14) vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\overline{f}_{ab}(\alpha) &= f_{ab}([C(a)][C^{-1}(a)]\alpha\gamma[C(b)][C^{-1}(b)]) = f_{ab}(\alpha\gamma) \\ \overline{f}_{bc}(\beta) &= f_{bc}([C(b)][C^{-1}(b)]\gamma^{-1}\beta[C(c)][C^{-1}(c)]) = f_{bc}(\gamma^{-1}\beta) \\ \overline{f}_{ac}(\delta) &= f_{ac}(\delta).\end{aligned}\quad (16)$$

Zadnja jednakost slijedi iz provjere posebnog slučaja u dokazu III. Lijevu stranu jednadžbe (15) možemo zapisati u stilu (12) kao

$$e^{i\theta} K(c, t_c; a, t_a) = e^{i\theta} \sum_{\delta \in \pi_1(X, x)} \chi(\delta) K^\delta(c, t_c; a, t_a).$$

Kako \overline{f}_{ac} ne ovisi o γ , a time i \overline{K}_{ac} , sumiranjem ovog izraza po svim $\gamma \in \pi_1(X, x)$ dobivamo isti izraz pomnožen s N , brojem elemenata $\pi_1(X)$. Desna strana jednadžbe (15) promjenom mreže i sumiranjem po svim γ postaje

$$\sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha)\chi(\beta) \sum_{\gamma} \int K^{\gamma^{-1}\beta}(c, t_c; b, t_b) K^{\alpha\gamma}(b, t_b; a, t_a) db,$$

gdje smo koristili (16). Pošto je $(\alpha\gamma)(\gamma^{-1}\beta) = \alpha\beta$, unutar-
nja suma po γ je prema tvrdnji I jednaka $K^{\alpha\beta}(c, t_c; b, t_b)$.
Izjednačavanjem lijeve i desne strane dobivamo

$$\begin{aligned}Ne^{i\theta} \sum_{\alpha\beta=\delta} \chi(\delta) K^{\alpha\beta}(c, t_c; a, t_a) &= \\ = \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha)\chi(\beta) K^{\alpha\beta}(c, t_c; a, t_a).\end{aligned}$$

Pošto su amplitude linearno nezavisne, slijedi

$$e^{i\theta} N\chi(\delta) = \sum_{\alpha\beta=\delta} \chi(\alpha)\chi(\beta).\quad (17)$$

Uzimajući modul obje strane imamo

$$N = \left| \sum_{\alpha\beta=\delta} \chi(\alpha)\chi(\beta) \right| \leq \sum_{\alpha\beta=\delta} |\chi(\alpha)\chi(\beta)| = N,$$

gdje smo koristili $|\chi(\alpha)| = 1$ i nejednakost trokuta. Jednakost u nejednakosti trokuta vrijedi ako i samo ako su faze sumanada jednake, a pošto im je modul 1, dijeljenjem (17) s N slijedi

$$e^{i\theta} \chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta).$$

Globalna faza θ je neopservabilna pa možemo uzeti $\theta = 0$. Slijedi

$$\chi(\alpha)\chi(\beta) = \chi(\alpha\beta), \quad \text{uz} \quad |\chi(\alpha)| = 1.$$

Ovaj izraz nam govori da koeficijenti $\chi(\alpha)$ tvore skalarnu unitarnu reprezentaciju fundamentalne grupe $\pi(X)$ i najbitniji je rezultat u ovom radu,

$$\chi(\alpha) = D(\alpha).$$

Prirodno je pitati se je li ovakvo spajanje koeficijenata $\chi(\alpha)$ i elemenata $D(\alpha)$ konzistentno ako je odabir mreže proizvoljan. Pogledajmo što se dešava pri proizvoljnoj promjeni mreže. Iz jednadžbe (14) slijedi

$$K = \sum_{\alpha} D(\alpha) K^{\alpha} \rightarrow \overline{K} = \sum_{\alpha} D(\alpha) K^{\lambda\alpha\mu},$$

gdje su $\lambda, \mu \in \pi_1(X, x)$ fiksni pošto promatramo amplitudu između neke dvije točke $a, b \in X$. Pomnožimo \overline{K} s lijeva s $D(\lambda)$ i s desna s $D(\mu)$. Dobivamo

$$D(\lambda)\overline{K}D(\mu) = \sum_{\alpha} D(\lambda\alpha\mu) K^{\lambda\alpha\mu} = \sum_{\lambda\alpha\mu} D(\lambda\alpha\mu) K^{\lambda\alpha\mu} = K,$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili činjenicu da je D reprezentacija, a u drugoj da grupnim množenjem svih elemenata grupe s fiksnim elementom ponovno dobivamo sve elemente grupe (primijenjeno dva puta, za λ i μ). Uzimanjem modula obje strane zadnje jednadžbe vidimo da je ova promjena neopservabilna kako je $|D(\alpha)| = 1$.

Uočimo da pojedine parcijalne amplitude same po sebi nemaju fizikalnog smisla, već samo kad se gledaju sve zajedno, što implicira da je nužno sumirati po svim putevima.

IV.5. Sustav identičnih čestica

Za konfiguracijski prostor n različitih čestica u m -dimenzionalnom Kartezijevom prostoru uzimamo skup Y sastavljen od n članova koji su m -torke realnih brojeva, s tim da izbacujemo točke u kojima neke dvije čestice imaju isti položaj. Za te točke kažemo da pripadaju rubu Δ . Ovako konstruiran prostor zovemo $Y(n, m)$, dakle

$$Y(n, m) = \{y = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n); \mathbf{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^m) \text{ i } \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j\}.$$

Razlog izbacivanja točaka podudarnosti je tehničke prirode i razni autori su argumentirali da nema fizikalnih posljedica [3]. Za barem dvije čestice, $n \geq 2$, vrijedi:

$Y(n, 1)$ nije povezan.

$Y(n, 2)$ je višestruko povezan.

$Y(n, m)$ je jednostavno povezan za $m \geq 3$.

Prvu tvrdnju za dvije čestice u jednodimenzionalnom prostoru je jednostavno vizualizirati jer je $Y(2, 1)$ ravnina bez dijagonale (ruba) $\{(x, x)\}$. Očito nije moguće povezati dvije točke s raznih strana dijagonale putem koji je u potpunosti unutar Y .

Preostale dvije tvrdnje nije jednostavno za vizualizirati pošto nam trebaju barem 4 dimenzije ali je intuitivno jasno da će prostor biti sve povezaniji s porastom dimenzije pošto je dimenzija ruba za m manja od dimenzije prostora. Npr. u dvije dimenzije je $Y(2, 2)$ 4-dimenzionalan, a rub koji uklanjamo je skup $\{(x, y), (x, y)\}$ koji je dvodimenzionalan pa ostaje 2 dimenzije viška u odnosu na jednu dimenziju u prethodnom slučaju.

Dvodimenzionalni slučaj je posebno zanimljiv, na njega ćemo se osvrnuti u idućem poglavlju.

Pokažimo sad nešto slabiju tvrdnju, da je prostor povezan.

Dokaz:

Graf kompleksne funkcije $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je dvodimenzionalna ploha u četverodimenzionalnom realnom prostoru $(\text{Re } z, \text{Im } z, \text{Re } f(z), \text{Im } f(z))$. Neka su (z_1, w_1) i (z_2, w_2) dvije točke u ovom prostoru koje nisu dio ruba, dakle $z_1 \neq w_1$ i $z_2 \neq w_2$ i dodatno $z_1 \neq z_2$. Definiramo funkciju $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kao

$$f(z) = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) + w_1.$$

Vrijedi $f(z_1) = w_1$ i $f(z_2) = w_2$. Rub je graf funkcije $e(z) = z$. Funkcija f dira rub ako je $f(z) = z$, što vrijedi u točno jednoj točki z_0 . Očito je moguće povući krivulju u kompleksnoj ravnini između z_1 i z_2 zaobilazeći z_0 . Ova krivulja inducira krivulju na grafu koja povezuje ove dvije točke u prostoru Y . Ako je $z_1 = z_2$, zamijenimo uloge z i w , a ako su z i w jednaki, nema se što za dokazati. \square

Pogledajmo sad slučaj identičnih čestica. Dobar konfiguracijski prostor je skup klasa ekvivalencije dobivenih identifikacijom svih točaka u $Y(n, 3)$ koje se mogu dobiti permutiranjem vektora položaja čestica. Ovo zapisujemo kao¹⁰

$$X = Y(n, 3)/S_n,$$

gdje je S_n simetrična grupa opisana u dodatku *D*. Formalno, dvije točke a i b u Y su ekvivalentne u X ako postoji element α permutacijske grupe S_n tako da vrijedi $a = \alpha(b)$. Za dvije čestice u jednodimenzionalnom prostoru ovo bi bilo kao da zalijepimo sve točke ispod i iznad dijagonale presavijanjem oko dijagonale.

Ovakvo djelovanje permutacijske grupe na prostor Y definira projekciju $p : Y(n, 3) \rightarrow X$. Pošto smo izbacili točke ruba, za svaku točku $y \in Y$ i svaki $\alpha \in S_n, \alpha \neq e$ vrijedi $\alpha(y) \neq y$.

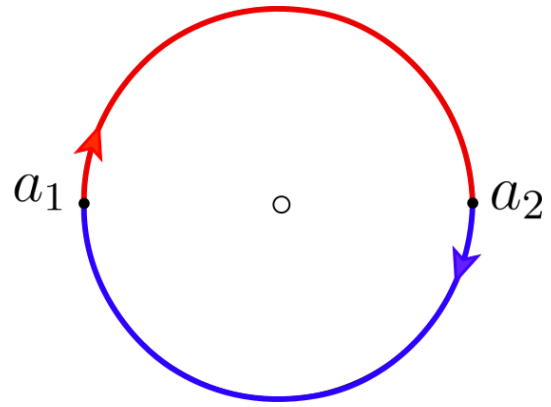
U prijevodu, grupa S_n djeluje efektivno na prostor Y . Pošto je Y jednostavno povezan i S_n djeluje efektivno, $(Y(n, 3), p)$ je univerzalni natkrivajući prostor za X i fundamentalna grupa mu je izomorfna S_n . Postoje samo dvije skalarne unitarne reprezentacije grupe S_n :

$$\begin{aligned} D^1(\alpha) &= +1 \text{ za sve } \alpha, \\ D^2(\alpha) &= \pm 1, \end{aligned}$$

gdje u $D^2(\alpha)$ predznak $+$ odgovara parnoj, a predznak $-$ neparnoj permutaciji. Ovo daje dvije moguće vrste valnih funkcija ovisno o reprezentaciji, bozone i fermione:

$$\begin{aligned} K^{\text{Bose}} &= \sum_{\alpha} D^1(\alpha) K^{\alpha}, \\ K^{\text{Fermi}} &= \sum_{\alpha} D^2(\alpha) K^{\alpha}. \end{aligned}$$

¹⁰ Vidi potpoglavlje IV.2.



Slika 13: Prikaz petlje u prostoru $X'(\mathbf{r})$.

Ponovimo ukratko:

pod pretpostavkom da amplitudu možemo zapisati na način (12), kvantna fizika daje ograničenja na izbor koeficijenata $\chi(\alpha)$. Oni moraju tvoriti skalarnu unitarnu reprezentaciju fundamentalne grupe konfiguracijskog prostora.

U tri dimenzije, zbog toga što je $X(3, n)$ jednostavno povezan, ova grupa je S_n . Ona ima dvije nezavisne reprezentacije koje predstavljaju ponašanje valne funkcije pri zamjeni čestica.

Primijetimo da zamjena dvije čestice odgovara putu u prostoru Y , a petlji u prostoru $X = Y/S_n$ pošto je krajnja točka poistovječena s početnom zbog djelovanja simetrične grupe. U slučaju prve reprezentacije ta zamjena množi amplitudu s $+1$, a druge s -1 . Dakle, zamjena čestica je na neki način usadena u fundamentalnu grupu ispravnog konfiguracijskog prostora.

U nastavku proučavamo dvodimenzionalni slučaj.

V. ANIONI

Prostor $Y(2, 2)$ koji čine dvije različite čestice u dvije dimenzije možemo gledati iz perspektive jedne čestice, npr. prve. U tim koordinatama prva čestica miruje u ishodištu a druga ima neki položaj zadan relativnom koordinatom $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Sad smo četverodimenzionalni prostor sveli na dvodimenzionalni $Y'(\mathbf{r})$ kojem je rub je dan točkom $(0, 0)$ jer iz $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ slijedi $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Ovo je dakle ravnina bez ishodišta koje je iste prirode kao točka $z_0 \in \mathbb{C}$ u prijašnjem dokazu. Dvije nehomotopične petlje u tom prostoru prikazane su na slici 9 iscrtkanim krivuljama. Ovaj prostor ima fundamentalnu grupu $(\mathbb{Z}, +)$ kao i kružnica jer opet postoji dobro definiran broj namotaja, tj. dvije krivulje s različitim brojem namotaja ne možemo deformirati jednu u drugu.

Djelovanje grupe S_2 poistovjećuje točke dobivene zamjenom koordinata. U prostoru Y' ovo se na koordinatu \mathbf{r} reflektira tako da se točke \mathbf{r} poistovjete s $-\mathbf{r}$ i time dobivamo $X'(\mathbf{r})$. To znači da su točke a_1 i a_2 na slici 13 zapravo jedna točka. Petlju prikazanu na toj slici dobivamo putovanjem od točke a_1 do a_2 , npr. po gornjoj crvenoj krivulji.

Kako je svaka točka te krivulje ekvivalentna nasuprotnoj, zamišljamo da se istovremeno crta donja, plava krivulja. Dolaskom do točke a_2 napravili smo petlju koja ne bi bila petlja da nismo poistovjetili nasuprotno točke. Ponavljanjem ove petlje možemo dobiti onu s dva namotaja i općenito proizvoljnim brojem. Nadalje, dvije točke različitog broja namotaja nisu homotopične pa je fundamentalna grupa opet \mathbb{Z} .

Prema prethodnom poglavlju, mogućih skupova koeficijentata $\chi(\alpha)$ ima onoliko koliko ima skalarnih unitarnih reprezentacija grupe \mathbb{Z} . No takvih reprezentacija je beskonačno mnogo, jer za jedinični element možemo odabrati bilo koji broj na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravnini:

$$f = e^{ix}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Tada n -ti element grupe (\mathbb{Z}) odgovara broju f^n u ovoj reprezentaciji. Beskonačan broj reprezentacija vodi na beskonačan broj tipova čestica.

Godine 1977 grupa fizičara sa sveučilišta u Oslu predvođena Jonom Leinaasom i Janom Myrheimom izračunali su da tradicionalna podjela na bozone i fermione ne vrijedi u dvije dimenzije [6]. Pet godina kasnije Frank Wilczek u radu [7] daje teorijski opis ovih čestica i naziva ih anionima¹¹.

V.1. Wilczekov rad

Dajemo kratki pregled Wilczekovog rada [7].

Promotrimo prvo situaciju za jednu česticu u specifičnom elektromagnetskom polju. Imamo zavojnicu u prostoru koja nosi konstantan tok magnetskog polja po presjeku. Ograničavamo se na dvije dimenzije, tj. čestice koje se gibaju u ravnini sa solenoidom u ishodištu.

Magnetsko polje izvan zavojnice iščezava. Klasično zbog toga nema Lorentzove sile pa zavojnica nema nikakvog efekta na gibanje, no kanonski impuls $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}}$ sadrži vektorski potencijal koji igra bitnu ulogu u kvantnoj fizici. U jednom od baždarenja dan je s

$$A_\varphi(\varphi) = \frac{\varphi\Phi}{2\pi r},$$

gdje je Φ tok kroz zavojnicu¹². Radimo baždarnu transformaciju

$$A'_i = A_i - \partial_i\Lambda = 0, \quad \Lambda(\varphi) = \Phi\varphi/2\pi,$$

gdje su $i \in \{r, \varphi\}$ i Λ skalarna funkcija koja je rješenje jednadžbe $A'_i = 0$.

Funkcija $\Lambda(r, \varphi)$ odgovara skalarnom vektorskom potencijalu i nije periodična već zbog zahtjeva njene neprekidnosti ima logaritamski tip reza na nekom polupravcu kroz ishodište u ravnini.

Iz algebarske perspektive to je posljedica netrivialne prve grupe de Rhamove kohomologije za ravninu bez točke ili ekvivalentno prostor bez pravca. Ta grupa je također \mathbb{Z} kao i $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0})$ iz sličnih razloga (sjetimo se da fundamentalna grupa detektira rupe).

Baždarne transformacije $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ daju $U(1)$ lokalnu fazu valnoj funkciji:

$$\psi'(\varphi) = e^{iq\Lambda(\varphi)} = e^{iq\Phi\varphi/2\pi}\psi(\varphi). \quad (18)$$

Valna funkcija $\psi(\varphi)$ mora biti dobro definirana, tj. periodična. Iz toga za transformiranu valnu funkciju ψ' koristeći prethodnu jednadžbu dobivamo:

$$\psi'(\varphi + 2\pi) = e^{2\pi i\Phi}\psi'(\varphi). \quad (19)$$

U slučaju $\Phi = 0$ dobivamo periodičnu funkciju ($\varphi \in [0, 2\pi)$), no općenito je funkcija definirana na pravcu $\varphi \in \mathbb{R}$.

Nametanjem ovakvog rubnog uvjeta na valne funkcije koje zadovoljavaju Schrödingerovu jednadžbu dobivamo da su one oblika:

$$\psi'(\varphi) \sim e^{im\varphi}, \quad m = N + \frac{q\varphi}{2\pi}, \quad N \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

U transformiranoj valnoj funkciji smo eliminiranjem vektorskog potencijala ($\mathbf{A}' = \mathbf{0}$)¹³ dobili neobične rubne uvjete.

Primjećujemo da je transformacija $\psi'(\varphi)$ iz jednadžbe (18) slična projekciji pravca na kružnicu na kojoj je definirana periodička $\psi(\varphi)$.

$$\psi'(\varphi) \approx e^{i\varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Valna funkcija jednoznačno je definirana na univerzalnom natkrivajućem prostoru pošto je jednostavno povezan¹⁴. Slijedi teorem iz [3], str. 122:

Svakoj valnoj funkciji na univerzalnom natkrivajućem prostoru (\tilde{Q}, p) odgovara višestruko definirana (eng. multi valued) valna funkcija na prostoru Q .

Ravnina bez ishodišta Q je topološki $Q = S^1 \times \mathbb{R}$. Kako je univerzalni natkrivajući prostor kružnice pravac, koji je ujedno i sam sebi natkrivajući prostor, slijedi $\tilde{Q} = \mathbb{R}^2$.

Kvantna fizika slobodne čestice u ravnini dobro nam je poznata. Tada jednadžba (20) odgovara vlastitim stanjima angularnog momenta.

Pošto je čestica u dvije dimenzije, jedina moguća rotacija je oko osi okomite na ravninu. Ovo mijenja algebru operatora angularnog momenta u odnosu na tri dimenzije i spektar izgleda drugačije, čestica može imati necjelobrojni spin i necjelobrojne projekcije na os rotacije.

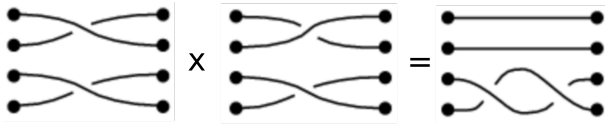
Promotrimo sada dvije identične čestice u limesu $q \rightarrow 0$ tako da je individualna snaga interakcije sa zavojnicom $q\Phi$ konstantna. Ovako je značajna samo interakcija između pojedine čestice i zavojnice, a njihova međusobna interakcija se može zanemariti pošto je proporcionalna s q^2 .

¹¹ Eng. anyon, jer može imati bilo koju (any) reprezentaciju kao što smo već vidjeli na primjeru dvije čestice.

¹² U radu se koristi termin flux tube umjesto zavojnice.

¹³ Za $\mathbf{A}' = 0$ dobivamo sustav slobodne neutralne čestice u ravnini.

¹⁴ Vidi potpoglavlje IV.1.



Slika 14: Operacija u grupi B_4 . Lijevi faktor je $\sigma_3\sigma_1$, a desni $\sigma_3\sigma_1^{-1}$. Uočavamo da je $\sigma_3^2 \neq e$ jer je nemoguće otpetljati pletenicu držeći krajeve fiksima. [15]

Prebacivanjem u koordinate centra mase (R, θ) i relativne koordinate (r, ϕ) , Wilczek pokazuje da u baždarenju $\mathbf{A}' = 0$ vrijedi

$$\Psi(R, \theta; r, \varphi + 2\pi) = e^{4\pi i \Delta} \Psi(R, \theta; r, \varphi), \quad \Delta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi}.$$

Ovo je dvočestična verzija izraza (19). Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ je isti vektor kao iz prethodnog potpoglavlja. Veličina Δ ponekad se naziva anomalni angularni moment.

Pošto su čestice identične, ispravni konfiguracijski prostor dobivamo identifikacijom parova $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \sim (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$. Ovo je djelovanje grupe S_2 .

No prostor $Y(2, 2)$ nije povezan pa zato fundamentalna grupa nije S_2 nego Z kao što smo se uvjerali na početku poglavlja. Put koji mijenja ϕ koordinatu za $-\pi$ radijana prikazan je na slici 13 crveno i čini petlju u pravom konfiguracijskom prostoru kao što je već prethodno argumentirano. Zamjena čestica je sada $\phi \rightarrow \phi + \pi$. Promjena valne funkcije je

$$\Psi(R, \theta; r, \varphi + \pi) = e^{2\pi i \Delta} \Psi(R, \theta; r, \varphi), \quad \Delta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi}.$$

Za $\Delta = 0$ dobivamo bozone, a za $\Delta = 1/2$ fermione. Osim njih, postoji kontinuum vrijednosti između koji je moguće postići ovisno o toku kroz zavojnicu. Ova transformacija analogna je promjeni mreže za koju je pokazano da množi amplitude neopsekvabilnom fazom.

V.2. Grupe pletenica

Na kraju prethodnog poglavlja pokazali smo da je fundamentalna grupa n čestica u tri dimenzije S_n . Može se pokazati (vidi [3], str. 131) da je fundamentalna grupa n čestica u dvije dimenzije grupa pletenica B_n definirana u dodatku D.

Ta grupa je vrlo slična simetričnoj grupi, no pošto dvije uzastopne zamjene ne moraju voditi na identitetu, dopušta beskonačno mnogo reprezentacija. Zovemo ju grupa pletenica jer joj generatore možemo vizualizirati kao zamjenu dvije niti kojima držimo krajeve fiksima.

Prema generatorima definiranim kao u dodatku D, operaciju $(\sigma_3\sigma_1^{-1})(\sigma_3\sigma_1) = \sigma_3^2 \neq e$ možemo vizualizirati kao na slici 14.

Odabir skalarne reprezentacije $D(\alpha) = e^{i\theta}$ vodi na klasične abelijanske (komutativne) anione. Grupa B_2 se

sastoji od dvije niti za koje postoji dobro definiran broj namotaja¹⁵ pa vrijedi $B_2 \cong \mathbb{Z}$. Prethodna analiza za jednu česticu u polju solenoida toka Φ i dvije identične čestice rezultirale su ovom grupom.

Par (tok, čestica) koji čine zavojnica i tvore dinamičku realizaciju aniona [9]. Primijetimo da se trojka (tok, čestica, čestica) iz drugog slučaja prethodnog potpoglavlja sastoji od dva identična aniona i jednog toka, što nije isto kao tri identične čestice. No u skladu s jednačbom (D7) u dodatku D, neto efekt pri zamjeni je množenje konstantnom fazom.

VI. ZAKLJUČAK

Iz prethodnih poglavlja zaključujemo da je biti bozon ili fermion jednako svojstvo čestice koliko i prostora u kojem se nalazi. Problemi u naivnom dokazu s početka izbjegnuti su prebacivanjem u formalizam integrala po putevima. Tamo je zamjena čestica „ugravirana” u fundamentalnu grupu prostora $X = Y/S_n$.

U ovom radu su čestice bile točkaste i nerelativističke. Veliki teorem spina i statistike u teoriji polja koji povezuje spin s anti/simetrijom valne funkcije još nije rigorozno dokazan. No ne treba ići u teoriju polja kako bi se vidjelo da već u dvije dimenzije postoje anioni, čestice sa svojstvima između bozona i fermiona.

Abelijanski anioni iz zadnjeg poglavlja direktno su opservirani u dva eksperimenta prošle godine. U njima se reproducirao frakcionalni kvanti Hallov efekt. Ukratko, u dvije dimenzije primijenjeno je jako magnetsko polje na vrlo niskoj temperaturi i time dolazi do anionskih pobuđenja koja su proizvela karakteristični interferencijski uzorak [10].

ZAHVALA

Zahvaljujem mentoru Tajronu Juriću na literaturi i sugestijama.

Dodatak A: Definicije iz opće topologije

Topologiju na skupu X definiramo kao familiju njegovih podskupova τ čije članove zovemo otvoreni skupovi. Vrijede sljedeća svojstva:

1. Prazan skup i X su elementi τ , tj. otvoreni.
2. Proizvoljna unija otvorenih skupova je otvoren skup.
3. Konačni presjek otvorenih skupova je otvoren skup.

Tada (X, τ) zovemo topološki prostor (skraćeno samo X). Za funkciju $f : X \rightarrow Y$ kažemo da je **neprekidna** ako je prasluka svakog otvorenog skupa $O_Y \in \tau_Y$ otvoren skup

¹⁵ Element σ_1^n odgovara n namotaja, gdje je σ_1 jedini generator grupe.

$O_X \in \tau_X$.

Ova definicija se za (\mathbb{R}, τ) , gdje bazu topologije čine intervali oblika $\langle a, b \rangle$, svodi na standardnu „epsilon-delta“ definiciju već viđenu na matematičkoj analizi gdje smo neprekidne funkcije zamišljali kao one čiji graf možemo nacrtati bez da podižemo olovku s papira.

Za usporedbu pogledajmo dva ekstremna odabira topologije, trivijalnu i diskretnu. Trivijalna je ona di su jedini otvoreni skupovi X i \emptyset , dakle najmanja moguća. Ako prostori (X, τ_X) i (Y, τ_Y) imaju diskretnu topologiju, svaka bijekcija je neprekidna pa nam topologija ne daje dodatnu strukturu već neprekidnost postaje sinonim za bijekciju. S druge strane imamo diskretnu topologiju u kojoj je svaki podskup od X otvoren. Ako prostori domene i kodomene imaju diskretnu topologiju, svaka funkcija je neprekidna pa je neprekidnost u tom slučaju sinonim za funkciju pa opet nemamo novu strukturu.

Kompozicija neprekidnih funkcija je i dalje neprekidna funkcija. Neke neprekidne funkcije imaju inverz (bijekcije) koji ne mora nužno biti neprekidan, a ako je neprekidan, bijekciju zovemo **homeomorfizam**. Za prostore X i Y kažamo da su **homeomorfni** ako postoji homeomorfizam između njih. Homeomorfni prostori su intuitivno prostori koji lokalno izgledaju slično. To su npr. kružnica i elipsa, ali ne i kružnica i dužina jer dužina na svojim krajevima ne izgleda isto kao kružnica.

Put u topološkom prostoru X je funkcija s jediničnog intervala $I = [0, 1]$ u X , npr. $\gamma : I \rightarrow X$. Ako dodatno vrijedi $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, put je **petlja** u istaknutoj točki $x_0 \in X$. Prostor je **povezan** ako postoji put između svake dvije točke.

Prostor je **jednostavno povezan** ako je povezan i svaka dva puta između proizvoljnih krajnjih točaka moguće deformirati jedan u drugi unutar prostora.

Prostor je **Višestruko povezan** ako je povezan ali nije jednostavno povezan.

Svaki od zadnja 3 podebljana pojma može imati prefiks **lokalno** što znači da za svaku točku u prostoru postoji **okolina** (otvoren skup u kojem je sadržana ta točka) tako da unutar te okoline vrijedi definicija, tj. unutar potprostora definiranog okolinom.

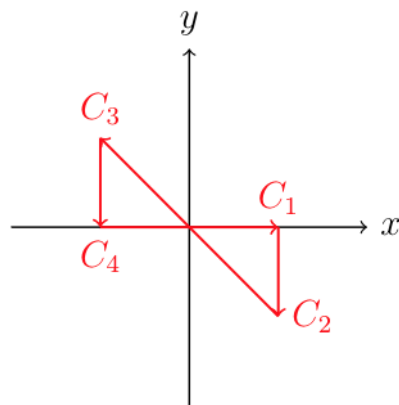
Za relaciju ekvivalencije \sim na prostoru (X, τ_X) **kvocijenti prostora** $Y = X/\sim$ je skup klasa ekvivalencija od X , $Y = \{[X] : x \in X\}$. Prirodno mu pridružujemo **kvocijentnu topologiju**

$$\tau_Y = \{U \subseteq Y : \{x \in X : [x] \in U\} \in \tau_X\}.$$

Dodatak B: Integral kompleksnog gausijana

Promatramo integral po konturi prikazanoj na slici 15. Traženi integral dobivamo u limesu $R \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} I &= \oint dz e^{-iaz^2} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad a > 0. \end{aligned}$$



Slika 15: Integracijska kontura za kompleksni gausijan.

Integral I je 0 po Cauchyevom teoremu jer nema singulariteta unutar konture. Vrijedi:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{-R} e^{-ia(R+ix)^2} dx, \\ I_3 &= \int_R^{-R} e^{-ia(i\sqrt{i}x)^2} i\sqrt{i} dx, \\ I_4 &= \int_R^0 e^{-ia(-R+ix)^2} dx. \end{aligned}$$

Supstitucijom $x \rightarrow -x$ vidimo da je $I_2 = I_4$. Faktor $i\sqrt{i}$ u I_3 je prisutan zbog toga što je krivulja nagnuta za kut $3\pi/4$ u odnosu na realnu os, a $e^{3\pi/4} = i\sqrt{i}$.

Nadalje, I_2 možemo omeđiti:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^{-R} |e^{-ia(R^2-x^2+2iRx)}| dx \leq \int_0^R e^{-2aRx} dx = \\ &= \frac{-e^{-2aRx}}{2aR} \Big|_0^R = \frac{1 - e^{-2aR^2}}{2aR} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Integral I_3 se svodi na standardni gausijan uz prefaktor $-1/\sqrt{i}$:

$$I_3 = -\sqrt{\frac{\pi}{ia}}.$$

Konačni rezultat je

$$I_1 = -I_2 - I_3 - I_4 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{ia}}.$$

Dodatak C: Izvod Schrödingerove jednadžbe u Feynmanovom formalizmu

Slijedimo [2] poglavlje 2.1.3. Ako iz produkta integrala (9),

$$(x_b t_b | x_a t_a) \approx \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{A}^N\right), \quad (\text{C1})$$

izdvojimo predzadnji trenutak t_N , dobivamo rekursivnu relaciju

$$(x_b t_b | x_a t_a) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dx_N (x_b t_b | x_N t_N) (x_N t_N | x_a t_a). \quad (\text{C2})$$

gdje je

$$(x_b t_b | x_N t_N) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_b}{2\pi\hbar} e^{(i/\hbar)[p_b(x_b - x_N) - \epsilon H(p_b, x_b, t_b)]}. \quad (\text{C3})$$

Impuls p_b koji se pojavljuje u eksponentu možemo zapisati preko položaja pošto je on po definiciji generator translacija:

$$\hat{p}_b \equiv -i\hbar\partial_{x_b}.$$

Hamiltonijan se sada može gledati kao funkcija od x_b :

$$\hat{H} \equiv H(\hat{p}_b, x_b, t_b) = H(-i\hbar\partial_{x_b}, x_b, t_b).$$

On u ovom zapisu ne ovisi o varijabli po kojoj integriramo u (C3) pa se može izvući ispred integrala. Slijedi

$$\begin{aligned} (x_b t_b | x_N t_N) &\approx \\ &\approx e^{-i\epsilon H(-i\hbar\partial_{x_b}, x_b, t_b)/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_b}{2\pi\hbar} e^{ip_b(x_b - x_N)/\hbar} = \\ &= e^{-i\epsilon H(-i\hbar\partial_{x_b}, x_b, t_b)/\hbar} \delta(x_b - x_N). \end{aligned}$$

Ubacivanjem ovog rezultata za $(x_b t_b | x_N t_N)$ nazad u jednadžbu (C1) dobivamo

$$(x_b t_b | x_a t_a) \approx e^{-i\epsilon H(-i\hbar\partial_{x_b}, x_b, t_b)/\hbar} (x_b t_b - \epsilon | x_a t_a),$$

gdje smo koristili činjenicu da je $e^{-i\epsilon\hat{H}/\hbar}$ operator vremenske evolucije za vrijeme ϵ . Zamjenom $t_b \rightarrow t_b + \epsilon$ imamo

$$(x_b t_b + \epsilon | x_a t_a) \approx e^{-i\epsilon H(-i\hbar\partial_{x_b}, x_b, t_b)/\hbar} (x_b t_b | x_a t_a).$$

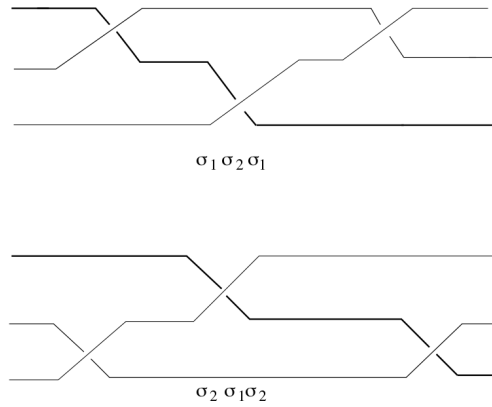
Razlika

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} [(x_b t_b + \epsilon | x_a t_a) - (x_b t_b | x_a t_a)] &\approx \\ &\approx \frac{1}{\epsilon} \left[e^{-i\epsilon H(-i\hbar\partial_{x_b}, x_b, t_b + \epsilon)/\hbar} - 1 \right] (x_b t_b | x_a t_a) \end{aligned}$$

u limesu $\epsilon \rightarrow 0$ teži u diferencijalnu jednadžbu za amplitudu:

$$i\hbar\partial_{t_b} (x_b t_b | x_a t_a) = H(-i\hbar\partial_{x_b}, x_b, t_b) (x_b t_b | x_a t_a),$$

koja je zapravo Schrödingerova jednadžba za propagator (amplitudu).



Slika 16: Vizualizacija relacije $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$. Objе operacije reduciraju se na zamjenu prvog i trećeg objekta. [9]

Dodatak D: Simetrična grupa

Dajemo kratki pregled simetrične grupe, uglavnom iz [3]. Simetrična grupa n -tog reda S_n je grupa svih permutacija n objekata. Tako S_2 ima dva, S_3 šest, a općenito S_n ima $n!$ elemenata.

Grupu S_n možemo apstraktno predstaviti pomoću $n - 1$ generatora σ_i i identitete e . Element σ_i permutira i -tu i $i + 1$. objekt. Generatori zadovoljavaju relaciju

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \quad (\text{D1})$$

Grafički prikaz ove tvrdnje je na slici 16. Dvostruka zamjena dva ista elementa je identiteta:

$$\sigma_i^2 = e. \quad (\text{D2})$$

Zamjena prvog i drugog elementa pa zatim trećeg i četvrtog ($\sigma_3 \sigma_1$) je identična zamjeni trećeg i četvrtog pa zatim prvog i drugog elementa ($\sigma_1 \sigma_3$). Općenito,

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2. \quad (\text{D3})$$

Jednadžbe (D1), (D2) i (D3) su pravila za generatore simetrične grupe.

Skalarna unitarna reprezentacija grupe S_n generatoru σ_j pridružuje broj $e^{i\theta_j}$.

Pravilo (D3) tada je trivijalno zadovoljeno. Pravilo (D1) vodi na

$$\theta_j = \theta.$$

Pravilo (D2) implicira

$$\theta = 0 \text{ ili } \pi \text{ mod } 2\pi.$$

Neka je $\alpha \in S_n$. Postoje samo dvije skalarne unitarne reprezentacije:

$$D^1(\alpha) = +1 \text{ za sve } \alpha,$$

$$D^2(\alpha) = \text{sgn}(\alpha),$$

gdje je $\text{sgn}(\alpha)$ parnost permutacije koja je dana homomorfizmom $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{1, -1\}$. Neparne permutacije su one koje imaju neparan broj generatora kad se faktoriziraju na najmanji mogući produkt σ_i .

Izostavljanjem zahtjeva (D2) dobivamo grupu pletenica (eng. braid group). Njene skalarne unitarne reprezentacije su dane s

$$D(\sigma_j) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Grupnu pletenica koja permutira n objekata označavamo s B_n . Izostavljanjem (D2) dopuštamo da dvostruka zamjena neka dva objekta ne bude nužno identiteta što vodi na drugačija svojstva u odnosu na S_n .

- [1] Hatcher, Allen. (2001). *Algebraic Topology*
- [2] Kleinert, Hagen. (2006). *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific
- [3] Morandi, Giuseppe. (1992). *The role of topology in classical and quantum physics*, Springer-Verlag
- [4] Laidlaw, DeWitt. (1971). *Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles*, physical review D, volume 3 number 6
- [5] Schulman. (1981), *Techniques and applications of path integration*, Dover publications, ISBN:0-486-44528-3
- [6] Wilczek, Frank. (2006). *From electronics to anyonics*, Physics World. 19: 22–23.
- [7] Wilczek, Frank. (1982). *Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles*, Phys. Rev. Lett. 49, 957
- [8] Munkres. (2000). *Topology*, 2nd edition, Prentice Hall, ISBN: 0-13-181629-2
- [9] Wilczek, Frank. (2008). *New Kinds of Quantum Statistics*, arXiv:0812.5097
- [10] Nakamura, Liang, Gardner, Manfra. (2020). *Direct observation of anyonic braiding statistics at the $\nu = 1/3$ fractional quantum Hall state*, arXiv:2006.14115
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell–Boltzmann_distribution
- [12] https://en.wikipedia.org/wiki/Trefoil_knot
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_groups_of_spheres
- [14] https://en.wikipedia.org/wiki/Simply_connected_space
- [15] https://en.wikipedia.org/wiki/Braid_group