Termodinamika crnih rupa u prisutstvu kozmološke konstante

Vanessa Brzić*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 27. siječnja 2021.)

Glavni cilj ovog rada jest proširiti prvi zakon termodinamike crnih rupa na fazni prostor koji, uz standardne termodinamičke varijable, uključuje i kozmološku konstantu Λ. To naravno znači da ćemo standardnu analizu u asimptotski ravnom prostoru zamijeniti analizom u prostoru s neiščezavajućom kozmološkom konstantom. Konkretno, fokusirat ćemo se na Anti-de Sitter (tzv. AdS) prostor, s naglaskom na statično rješenje. Naš izvod se izrazito oslanja na izvod dan u članku Davida Kastora, Sourye Ray i Jennie Traschen [6], rekapituliranog u Dodatku A članka Davida Kubizňáka, Roberta B. Manna i Mae Teo[7].

I. UVOD

Stephen Hawking 1970-ih formulirao je koncept apsolutnog horizonta crne rupe i dokazao da se površine apsolutnih horizonata uvijek povećavaju[19]. Takav je zakon, kao što je primijetio Bekenstein, vrlo sličan drugom zakonu termodinamike - teorem o površini postaje drugi zakon termodinamike ako se izraz "površina horizonta" samo zamijeni "entropijom" (4). Vođen tom idejom, Bekenstein je izračunao proporcionalnost entropije crne rupe i površine horizonta crne rupe uspostavljajući pojam takozvane karakteristične temperature, ali napominjući: '...we emphasize that one should not regard T_{BH} as the temperature of the black hole; such an identification lead to all sorts of paradoxes, and is thus not useful.'[18] Da pojam T_{BH} zapravo nije paradoksalan, postalo je jasno kada je Hawking dokazao da crne rupe zrače spektrom crnog tijela, kao da zapravo imaju temperaturu proporcionalnu površinskoj gravitaciji (1). Time je *termodinamika crnih rupa* počela dobivati svoj smisao, a konačno je formirana radom Bardeena, Cartera i Hawkinga[20] u kojem je pokazan i prvi zakon termodinamike crnih rupa, uspostavljajući posljednju identifikaciju, onu između mase crne rupe i pojma unutarnje energije (2). Iako ćemo u ovom radu pozornost usmjeriti samo na prvi zakon, ovdje navodimo sva četiri zakona radi potpunosti:

0. *Površinska gravitacija κ konstantna je na horizontu događaja stacionarne crne rupe.*

Iz toga slijedi identifikacija površinske gravitacije s temperaturom zračenja crne rupe. Može se pokazati[21] da je točna relacija:

$$T = \frac{\hbar}{2\pi}\kappa \tag{1}$$

1. *Za crnu rupu mase M*

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A \tag{2}$$

gdje je κ površinska gravitacija. Kao što smo rekli, površinsku gravitaciju treba identificirati s temperaturom zračenja crne rupe ($\kappa \to T$), dok je područje horizonta događaja sada povezano s entropijom ($A \to S$) i masa crne rupe s unutarnjom energijom ($M \to E_{int}$). Ukoliko crna rupa rotira angularnim momentom J ili ima naboj Q, pojavljuju se još dodatni članovi, redom oblika $\Omega_H \delta J$, gdje je Ω_H angularna brzina crne rupe, te $\Phi\delta Q$, pa ukupni zakon glasi:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi\delta Q \tag{3}$$

Dodatni članovi analogni su članovima koji čine rad u prvom zakonu termodinamike.

2. *Površina horizonta događaja A crne rupe nikada se ne smanjuje.*

Ovo je Hawkingov teorem o površini[19]:

$$\delta A \geqslant 0 \tag{4}$$

3. *Površinsku gravitaciju κ nije moguće reducirati na nulu u konačnom broju koraka.*

Unatrag proteklih nekoliko godina, termodinamičke analize crnih rupa uključile su i kozmološku konstantu Λ kao termodinamičku varijablu i uspostavile tzv. *"kemiju crnih rupa"*. Λ kao termodinamička varijabla postaje ekvivalentna tlaku ($\Lambda \to p$), zbog čega masa crne rupe više nije ekvivalentna unutarnjoj energiji, već ekvivalentna entalpiji ($M \to H$). Prirodno se nameće pitanje interpretacije tlaku konjugirane varijable - termodinamičkog volumena. Pokazat ćemo da se, u sklopu analize statičnog rješenja AdS prostorvremena, termodinamički volumen može (do na negativan predznak) interpretirati kao volumen koji zauzima crna rupa. Kemija crnih rupa pokazala je da crne rupe prate fazne prijelaze kakve pronalazimo u nekim uobičajenim materijalima. Nadalje, pronađena je i trojna točka crnih rupa, analogna trojnoj točki vode. Crne rupe su shvaćene i kao toplinski strojevi a pronađena je i paralela s Van der Waalsovim tekućinama.

* vbrzic@dominis.phy.hr

II. KOZMOLOŠKA KONSTANTA

Einsten je 1915. godine publicirao jednadžbe opće teorije relativnosti u obliku:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{5}$$

uspostavljajući vezu između zakrivljenosti i distribucije mase u svemiru. Glavna ideja koja dovodi do Einsteinove jednadžbe jest princip opće kovarijantnosti, koji nameće restrikciju da jednadžbe trebaju biti invarijantne s obzirom na koordinatne transformacije. Princip kovarijantnosti nedinamička je simetrija akcije opće teorije relativnosti. Upravo na tom principu Hilbert je uspio "pogoditi" akciju i izvesti jednadžbe (91) varijacijskim postupkom. Kao što smo spomenuli u (VII.1), dio koji je trebalo "pogoditi" jest dio koji opisuje gravitacijsko polje, konkretno Hilbertov član u akciji:

$$S_{EH}[g] = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x \tag{6}$$

Naime, želimo li doći do diferencijalnih jednadžbi drugog reda, najprije bi za očekivati bilo da lagranževa gustoća ovisi o nultoj i prvoj derivaciji polja $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\right)$. U općoj teoriji relativnosti, polje je metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ i valja primjetiti da nikakva kombinacija nulte i prve derivacije neće dati tenzorsku veličinu. Kako bismo ispunili zahtjev kovarijantnosti, potrebno je u gustoću lagranžijana uvesti i ovisnost o drugoj derivaciji metrike $\mathcal{L}(g^{ab}(x), \partial_c g^{ab}(x), \partial_c\partial_d g^{ab}(x))$. Ukoliko zahtjevamo da je ta ovisnost linearna u drugoj derivaciji, može se pokazati:

Teorem[28] Ne postoji difeomorfno invarijantna akcija drugog reda za Lorentzovu metriku koja daje Euler-Lagrangeove jednadžbe drugog reda, osim

$$S = \int A(R - \Lambda)dV$$

Ovdje je A proizvoljna konstanta koja ne utječe na dinamičke jednadžbe.

Tu se pokazuje sloboda modificiranja jednadžbe (5) na način da imamo dodatan član:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{7}$$

gdje je $\Lambda =$ konst. Einsteinove jednadžbe (5) predviđaju dinamički, nestatičan svemir, zbog čega Einstein 1917. godine dodaje Λ član kako bi dobio jednadžbe za statički svemir, u skladu s tadašnjim kozmološkim saznanjima[22].

S obzirom na svojstvo metričke kompatibilnosti:

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \tag{8}$$

dodavanje člana s konstantnom veličinom Λ, ne remeti zakon očuvanja energije-impulsa:

$$\nabla_b T_a^b = 0 \tag{9}$$

što je bio jedan od bitnih zahtjeva prilikom izvoda jednadžbi. Međutim, ono što mijenja jest činjenicu da za $T_{ab} = 0$ više ne dobivamo ravan Minkowski svemir (dan s $G_{ab} = 0$). Primjetimo, Einsteinov tenzor sada možemo zapisati u obliku:

$$G_{ab} = 8\pi\left[T_{ab} + T_{ab}^{(\mathrm{VAC})}\right] \tag{10}$$

gdje smo uveli tenzor energije-impulsa asociran s kozmološkom konstantom,

$$T_{ab}^{(\mathrm{VAC})} \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi}g_{ab} \tag{11}$$

tj. gustoća energije koju Λ pridaje vakuumu:

$$\epsilon^{(\mathrm{VAC})} = T_{00}^{(\mathrm{VAC})} = +\frac{\Lambda}{8\pi} \tag{12}$$

To povlači interpretaciju kozmološke konstante kao veličine proporcionalne energiji vakuuma koja doprinosi zakrivljenosti svemira. Iz perspektive teorije polja, energija vakuuma zapravo bi trebala biti energija osnovnog stanja svih polja, tj. energija kvantnih fluktuacija vakuuma $E = \frac{\hbar\omega}{2}$ (*zero point energy*). Međutim, slobodno kvantno polje ima beskonačno takvih doprinosa, stoga bi Λ trebala divergirati. Divergencija se obično odreže na nekoj energiji, ali i u tom slučaju rezultat daje gustoću energije vakuuma reda veličine $\Lambda \sim \frac{1}{(L_P)^2} \sim 10^{70}m^{-2}$. Kozmološka mjerenja pak ukazuju na malu, neiščezavajuću pozitivnu vrijednost

$$\Lambda \sim 10^{-52}m^{-2} \tag{13}$$

što daje 120 redova veličine drukčiji rezultat[27].

Promotrimo li kozmološku jednadžbu fluida:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \tag{14}$$

s obzirom da je $\Lambda=$ konst. slijedi da je jednadžba stanja:

$$P = -\epsilon \tag{15}$$

Valja primjetiti da mali iznos Λ trebamo imati i ukoliko želimo ispravno rekreirati Newtonov limes, citiramo Misner et al. (1973) 'The systems of lowest density to which one applies Newtonian theory with some (though not great) success are small clusters of galaxies. Hence, one can place the limit

$$\begin{aligned}\left|\rho^{(\mathrm{VAC})}\right| = \frac{|\Lambda|}{8\pi} \leq \rho^{(\mathrm{CLUSTER})} &\sim 10^{-29}\ \mathrm{g/cm^3} \\ &\sim 10^{-53}\ \mathrm{m^{-2}}\end{aligned} \tag{16}$$

on the value of the cosmological constant.'[23] u skladu s (13).

III. DE SITTER I ANTI DE SITTER PROSTORVIJEME

Kozmološko načelo nalaže da je svemir, na dovoljno velikoj skali, homogen i izotropan, što implicira, redom; invarijantnost metrike na translacije te invarijantnost na metrike rotacije. To pak podrazumijeva maksimalan broj Killingovih vektora $3D$ prostorne metrike. Prostori s maksimalnim brojem Killingovih vektora zovu se *maksimalno simetrični prostori*. Kada bi svemir bio statičan, prostorvrijeme bi bila maksimalno simetrična mnogostrukost međutim, kozmološka načela ukazuju da se svemir ubrzano širi, zbog toga nemamo globalnu vremensku simetriju. Formalno svemir shvaćamo kao $R \times \Sigma$, gdje je Σ maksimalno simetričan prostor. Iako svemir, zbog vremenske koordinate, nije maksimalno simetričan, razmatrat ćemo maksimalno simetrične 4D prostore kao osnovno stanje.

Jedina tri maksimalno simetrična prostora su Minkowski, de Sitter i anti de Sitter prostor. Posljednja dva predstavljaju vakuumska rješenja jednadžbe (7) s neiščezavajućom kozmološkom konstantom:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \tag{17}$$

Općenito svojstvo maksimalno simetričnih prostora jest da Riccijev tenzor poprima oblik:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \kappa \left(g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} \right)$$

gdje κ predstavlja normalizaciju Riccijeve zakrivljenosti

$$\kappa = \frac{R}{n(n-1)}$$

R je Riccijev skalar, konstantan na mnogostrukosti.

de Sitter prostor (dS)

De Sitter prostor je maksimalno simetričan prostor s konstantnom pozitivnom zakrivljenosti ($\kappa > 0$). Prostor možemo konstruirati smještanjem 4D hiperboloida u 5D Minkowski prostor s metrikom $ds_5^2 = -\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, što nam daje

$$-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2$$

na kojem definiramo hiperbolične koordinate $\{t, \chi, \theta, \phi\}$ s:

$$\begin{aligned}
u &= \alpha \sinh(t/\alpha) \\
w &= \alpha \cosh(t/\alpha) \cos\chi \\
x &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin\chi \cos\theta \\
y &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin\chi \sin\theta \cos\phi \\
z &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin\chi \sin\theta \sin\phi
\end{aligned}$$

Metrika na hiperboloidu tada poprima oblik:

$$ds^2 = -\mathrm{d}t^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) \left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \right) \right] \tag{18}$$

Izraz u oblim zagradama predstavlja metriku $2D$ sfere $d\Omega_2^2$, a izraz u uglatim zagradama metriku $3D$ sfere $d\Omega_3^2$. Topologija de Sitter prostora je $\mathbf{R} \times S^3$. Konformalni dijagram, dan na Slici III, možemo konstruirati ostvarujući vezu s Einsteinovim statičnim svemirom. Napravimo li koordinatnu transformaciju $t \to t'$

$$\cosh(t/\alpha) = \frac{1}{\cos(t')} \tag{19}$$

dobivamo metriku

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2(t')} d\bar{s}^2 \tag{20}$$

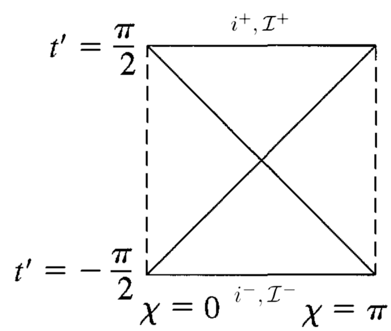
gdje $d\bar{s}^2$ predstavlja metriku na Einsteinovom statičnom svemiru,

$$d\bar{s}^2 = -\left(\mathrm{d}t'\right)^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega_2^2 \tag{21}$$

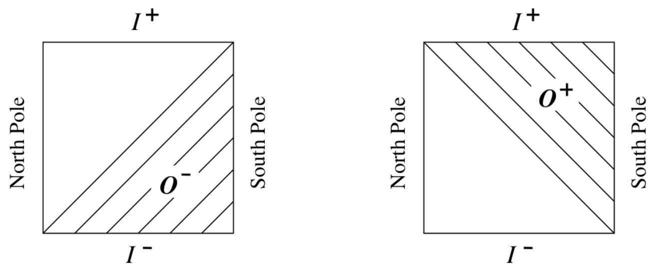
Einsteinov statični svemir prostor je $\mathbf{R} \times S^3$ topologije, opisujući 3D sferu konstantnog radijusa u vremenu. Iz jednadžbe (20) vidimo da ono što su svjetlosni geodezici u (18) metrici, također su svjetlosni geodezici u (21), stoga, u razmatranju kauzalne strukture možemo analizirati direktno Einsteinovu statičnu metriku koja je jednostavnija. Konformalni dijagrami zapravo su reprezentacija Einsteinovog statičkog svemira u kojem je kauzalna struktura zadana kauzalnom strukturom prostora od interesa, vezom oblika (20). Raspon vremenske koordinate sada je

$$-\pi/2 < t' < \pi/2 \tag{22}$$

kao što je vidljivo na dijagramu. Poanta konformalnih dijagrama upravo je učiniti interval kompaktnim, kako



Slika 1. Presjeci t'=konst. prostornog tipa predstavljaju $3D$ sferu. Točke na isprekidanoj liniji predstavljaju pripadne točke sjevernog i južnog pola. Točke u unutrašnjojsti dijagrama su 2D sfere. Dijagonalne linije predstavljaju zrake svjetlosnog tipa, pod kutem od 45°. Površine označene s $\mathcal{I}^{\pm}$ predstavljaju beskonačnu budućnost/prošlost svjetlosnog tipa (asimptotska stanja radijalnih svjetlosnih geodezika, tj. stanja iz kojih poniru/izviru geodezici svjetlosnog tipa), dok $i^{\pm}$ predstavljaju beskonačnu budućnost/prošlost vremenskog tipa (limes $t' \to \pm$).[5]



Slika 2. Klasični promatrač na južnom polu nikada neće moći opaziti događaje izvan O^- područja, niti će moći slati signal izvan O^+ područja. $O^{\pm}$ predstavlja kauzalnu budućnost/prošlost promatrača na južnom polu.[24]

bi kauzalna struktura bila jasno vidljiva.
Posebnost de Sitter prostora je u tome što jedan promatrač nema pristup čitavom prostoru kao što je to vidljivo na Slici III. Za razliku od toga, u Minkowski prostoru, promatrač vremenskog tipa u jednom će trenutku (na i^+) imati prošlost cijelog svemira u svom prošlom vremenskom stošcu. De Sitter prostor-vrijeme predstavlja svemir zatvorenog tipa, stoga postoji kozmološki horizont.

Anti de Sitter prostor-vrijeme (AdS)
Anti de Sitter prostor je maksimalno simetričan prostor s konstantnom pozitivnom zakrivljenosti ($\kappa < 0$). Ponovno razmatramo smještanje hiperboloida u $5D$ ravan prostor, ovaj puta $ds_5^2 = -\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$. To nam daje

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2$$

Sada uvodimo koordinate $\{t', \rho, \theta, \phi\}$ dane s

$$\begin{aligned} u &= \alpha \sin(t') \cosh(\rho) \\ v &= \alpha \cos(t') \cosh(\rho) \\ x &= \alpha \sinh(\rho) \cos\theta \\ y &= \alpha \sinh(\rho) \sin\theta \cos\phi \\ z &= \alpha \sinh(\rho) \sin\theta \sin\phi \end{aligned}$$

čime dobivamo metriku na hiperboloidu:

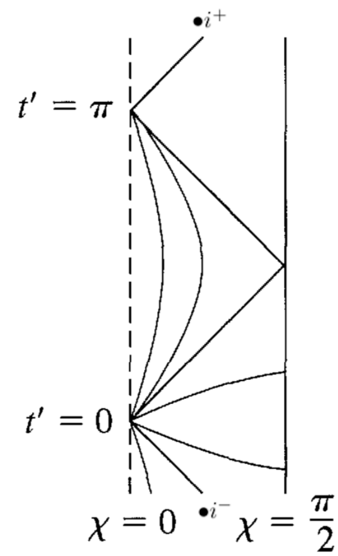
$$ds^2 = \alpha^2 \left(-\cosh^2(\rho)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_2^2\right)$$

Ove koordinate imaju svojstvo da je t' periodičan s periodom 2π što bi nam dalo zatvorene krivulje vremenskog tipa; međutim, to je svojstvo samo artefakt odabira koordinata i možemo ga eliminirati razmatranjem prostora koji je pokrivač naše mnogostrukosti gdje t' ima raspon $[-\infty, \infty]$ i zapravo taj prostor onda uzimamo kao definiciju anti de Sitter prostora.
Konformalni dijagram dan je na Slici 3. Konstruiramo ga koordinatnim transformacijama:

$$\cosh(\rho) = \frac{1}{\cos\chi}$$

što daje vezu s Einsteinovim statičnim svemirom

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2\chi} d\bar{s}^2$$



Slika 3. Presjek t'=konst. prostornog tipa topološki predstavlja 3D hemisferu tj. R^3 prostor. Točke u unutrašnjosti predstavljaju 2D sfere, osim točaka na isprekidanoj liniji koje predstavljaju točke u prostornom ishodištu. Na $\chi = \frac{\pi}{2}$ imamo hiperplohu vremenskog tipa koja predstavlja beskonačnost.

Sada se umjesto vremenske t' koordinate, prostorna χ koordinata pojavljuje u konformalnom faktoru i njen interval je postao kompaktan:

$$0 \leq \chi < \pi/2 \tag{23}$$

Anti de Sitter prostor je konformalno povezan s polovicom Einsteinovog svemira, stoga ima topologiju R^4 prostora. Posebnost anti de Sitter prostora jest u tome što u beskonačnosti ima ($\chi = \frac{\pi}{2}$) hiperplohu vremenskog tipa.

IV. SMARROVA FORMULA

U ovom poglavlju fokusirat ćemo se na AdS crne rupe, tj. rješenje (17) za $\Lambda < 0$ te razmotriti kako kozmološka konstanta utječe na fazni prostor termodinamike crnih rupa. Razlog razmatranja AdS rješenja umjesto de Sitter rješenja jest činjenica da de Sitter prostorvrijeme ima kozmološki horizont koji uvodi neke dodatne komplikacije, ali i činjenica da se sve više istražuje tzv. AdS/CFT korepodencija; autori[6] navode kako se metodologija odnosi i na de Sitter crne rupe, što ćemo dodatno komentirati u zaključku. Razmatramo rješenje Einsteinovih jednadžbi u D prostornovremenskim dimenzijama koje opisuje crnu rupu s Killingovim vektorskim poljem.

Da bi se geometrijske konstrukcije proširile na slučaj neiščezavajuće kozmološke konstante, pokazalo se[14] [15] ključno je uvesti veličinu ω^{ab} koja predstavlja Killingov potencijal:

$$\xi_b = \nabla^a \omega_{ab} \tag{24}$$

gdje ξ^b je Killingov vektor. Bitno je uočiti kako Killingov potencijal nije jedinstven, već definiran do na član iščezavajuće divergencije. Naime, ukoliko je ω_{ab} rješenje jednadžbe (24), tada je i $\omega'_{ab} = \omega_{ab} + \lambda_{ab}$ ukoliko $\nabla_a \lambda^{ab} = 0$. Tenzor λ_{ab} je, kao i ω_{ab}, antisimetričan.

Kao i u poglavlju VII.6, do Smarrove formule može se doći preko Komarovih relacija, konkretno, krenut ćemo od relacije (124) koju ćemo modificirati dodavanjem kozmološke konstante:

$$\frac{D-2}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}S_{ab}\left(\nabla^a \xi^b + \frac{2}{D-2}\Lambda\omega^{ab}\right) = 0 \tag{25}$$

pri čemu smo koristili isti postupak kao u VII.6 samo ovoga puta doprinost kozmološke konstante daje doprinos Riccijevom tenzoru:

$$R_{ab} = \frac{2\Lambda}{D-2} g_{ab} \tag{26}$$

što generira dodatni član. $\partial\Sigma$ sada će biti dvokomponentna ploha *vremenskog tipa* koja će sadržavati površine oko horizonta i oko površine u beskonačnosti (u VII.6 ploha je također bila dvokomponentna, ali prostornog tipa).
Dvije su bitne napomene koje predstavljaju glavnu razliku u izvodu s obzirom na izvod za asimptotski ravan prostor: prvo, integrali preko horizonta i beskonačnosti povezani su međusobno mogućnošću dodavanja zatvorenog, ali neegzaktnog člana Killingovom potencijalu; drugo, Killingov vektor i Killingov potencijal u integralu (25) u beskonačnosti su divergentni, međutim na takav način da se njihove divergencije poništavaju i daju konačan rezultat.
Za anti de Sitter prostor u kojem nema crne rupe, $\partial\Sigma$ je samo ploha u beskonačnosti, ova dva beskonačna doprinosa točno se pokrate da daju točno nulu. U općenitijem slučaju, anti de Sitter prostora sa crnom rupom, ova će se dva doprinosa i dalje kratiti u neki konačan rezultat.

IV.1. Argument skaliranja

Izvod Smarrove relacije možemo napraviti jednostavnom dimenzionalnom analizom i korištenjem Eulerovog teorema. Međutim, sjetimo se, Eulerov teorem počiva na pretpostavci homogenosti funkcije s obzirom na varijable ovisnosti. Time uvodimo dodatnu pretpostavku u naš izvod, pretpostavku koja ne počiva na fizikalnoj nužnosti. Stoga ćemo u idućem odlomku priložiti i alternativni izvod, ograničen nekim fizikalnim pretpostavkama.
Hilbertov član akcije s neiščezavajućom kozmološkom konstantom dan je s (vidi VII.1):

$$S = \frac{1}{8\pi G}\int \mathrm{d}^D x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{27}$$

Iz ovoga vidimo da je dimenzija kozmološke konstante (duljina) $^{-2}$. Eulerov teorem za homogene funkcije glasi:

$$f\left(\alpha^p x, \alpha^q y, \ldots, \alpha^r z\right) = \alpha^s f(x, y, \ldots, z) \tag{28}$$

Deriviramo li s obzirom na α dobivamo relaciju skaliranja:

$$sf(x, y, \ldots, z) = p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)x + q\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)y + \cdots + r\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)z \tag{29}$$

Masa M, statične AdS crne rupe, funkcija je površine horizonta A i kozmološke konstante Λ. Dimenzionalnom analizom zaključujemo: $M \propto l^{D-3}$, $A \propto l^{D-2}$ te $\Lambda \propto l^{-2}$ pa Eulerov teorem daje direktno Smarrovu formulu:

$$(D-3)M = (D-2)\left(\frac{\partial M}{\partial A}\right)A - 2\left(\frac{\partial M}{\partial \Lambda}\right)\Lambda \tag{30}$$

Uvrstimo li $\Lambda = 0$ i $\partial M/\partial A = \kappa/8\pi G$, iz (30) dobivamo prvi zakon termodinamike crnih rupa za statična, asimptotski ravna rješenja (2).
Općenito, u prisutstvu $\Lambda \neq 0$, možemo uočiti da variranjem dobivamo:

$$\mathrm{d}M = \frac{\kappa}{8\pi G}\mathrm{d}A + \left(\frac{\partial M}{\partial \Lambda}\right)\mathrm{d}\Lambda \tag{31}$$

što znači da ćemo $\partial M/\partial\Lambda$ moći dobiti prošireni izvod prvog zakona termodinamike crnih rupa s neiščezavajućom kozmološkom konstantom.

IV.2. Geometrijski argument

Izvod Smarrove formule možemo dobiti i bez korištenja Eulerove formule, tj. oslobađajući se pretpostavke homogenosti funkcije M. Najprije ćemo razmatrati rješenje Schwarzschild-AdS metrike, potom generalizirati na slučaj statičnog AdS prostorvremena. Razlog tomu jest činjenica da će asimptotsko ponašanje u AdS statičnom slučaju koincidirati s Schwarzschild-AdS metrikom.
Schwarzschild-(A)dS metrika dana je s:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2_{D-2} \\ f(r) &= 1 - \frac{\tilde{M}}{r^{D-3}} - \tilde{\Lambda}r^2 \end{aligned} \tag{32}$$

gdje smo uveli pokrate

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \frac{16\pi GM}{(D-2)}V_{D-2} \\ \tilde{\Lambda} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} \end{aligned} \tag{33}$$

V_{D-2} je volumen jedinične $D-2$ sfere. Radit ćemo s AdS slučajem što znači $\Lambda < 0$. Neiščezavajuće komponente $\nabla^a\xi^b$ za statično Killingovo vektorsko polje ∂_t dane su s:

$$\nabla^r \xi^t = -\nabla^t \xi^r = \frac{(D-3)\tilde{M}}{2r^{D-2}} - \tilde{\Lambda}r \tag{34}$$

Valja primjetiti kako će član linearan u r dati divergentni doprinos površinskom integralu u beskonačnosti u relaciji (25). Iskoristit ćemo činjenicu da Killingov potencijal nije jedinstveno definiran; definiramo jednoparametarsku familiju Killingovih potencijala:

$$\omega^{rt} = -\omega^{tr} = \frac{r}{(D-1)} + \alpha r_h \left(\frac{r_h}{r}\right)^{D-2} \tag{35}$$

gdje α je bezdimenzionalna konstanta a r_h je radijus horizonta. Linearni član u r daje drugi divergentni doprinos površinskom integralu u relaciji (25).
Integral (25) ima dva doprinosa, tj. površina Σ je dvokomponentna i sastoji se od integrala po horizontu $\equiv I_h$ i integrala po površini u beskonačnosti $\equiv I_\infty$ (kao što smo diskutirali u poglavlju VII.6). Integral u beskonačnosti daje:

$$I_\infty = -(D-3)M - \frac{2\Lambda V_{D-2}}{8\pi G}\alpha \tag{36}$$

dok je integral po horizontu:

$$I_h = -(D-2)\frac{\kappa A}{8\pi G} - \frac{2\Lambda V_{D-2}}{8\pi G}\left(\frac{r_h^{D-1}}{(D-1)} + \alpha\right) \tag{37}$$

Iskoristimo li Komarovu formulu $I_\infty - I_h = 0$ dobivamo Smarrovu formulu:

$$(D-3)M = (D-2)\frac{\kappa}{8\pi G}A - 2\frac{\Theta}{8\pi G}\Lambda \tag{38}$$

gdje

$$\Theta = -\frac{V_{D-2}r_h^{D-1}}{(D-1)} \tag{39}$$

Općenitije razmatranje

Sada ćemo pretpostaviti asimptotski AdS prostorvrijeme i iščezavajući angularni moment. Asimptotski razvoj metrike u tom slučaju poprima oblik:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}s^2 \simeq g_{tt}\,\mathrm{d}t^2 + g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + Hr^2\,\mathrm{d}\Omega_{D-2}^2 \\ &g_{tt} = -f_0 + \frac{c_t}{r^{D-3}}, \quad g_{rr} = \frac{1}{f_0}\left(1 - \frac{c_r}{\tilde{\Lambda} r^{D-1}}\right) \\ &H = 1 + \tilde{\Lambda}\frac{c_\theta}{r^{D-1}} \end{aligned} \tag{40}$$

gdje $f_0 = 1 - \tilde{\Lambda} r^2$. Za inverznu metriku imamo:

$$\begin{aligned} g^{tt} &= f_0^{-1}\left(-1 + c_t/\tilde{\Lambda} r^{D-1}\right) \\ g^{rr} &= \frac{f_0 - c_r}{r^{D-3}} \end{aligned} \tag{41}$$

Za rješenja Einsteinovih jednadžbi s $\Lambda < 0$, iščezavajućeg angularnog momenta, imamo asimptotska rješenja jednaka Schwarzschild-AdS. Stoga konstante u (40) zadovoljavaju:

$$c_t = c_r = \tilde{M} \text{ and } c_\theta = 0 \tag{42}$$

Za velik radius sfere imamo razvoj:

$$\mathrm{d}a\, r_b n_c \left(\nabla^b \xi^c\right) \simeq \mathrm{d}\Omega_{D-2}\left(\tilde{\Lambda} r^{D-1} - \frac{(D-3)}{2}\tilde{M}\right) \tag{43}$$

Asimptotsko ponašanje Killingovog potencijala isto je kao u Schwarzschild-AdS slučaju, tj. dano relacijom (35), međutim, dodat ćemo član renormalizacije koji će nam osigurati da se divergencije pokrate, sukladno prethodnoj diskusiji. Naime, Killingov potencijal za AdS prostorvrijeme bez crne rupe, označen s $\omega^{ab}_{\mathrm{AdS}}$, ima neiščezavajuće komponente:

$$\omega^{rt}_{\mathrm{AdS}} = -\omega^{tr}_{\mathrm{AdS}} = \frac{r}{(D-1)} \tag{44}$$

Kako bismo dobili asimtotski oblik poput (35), ali takav da osigurava konačan rezultat Komarovog integrala, uvodimo renormalizaciju Killingovog potencijala $\omega^{ab} - \omega^{ab}_{\mathrm{AdS}}$. Na taj način dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,a r_b n_c \left(\frac{2\Lambda}{D-2}\omega^{bc}\right) \simeq &- \mathrm{d}\Omega_{D-2}\left(\tilde{\Lambda} r^{D-1}\right) \\ &+ \mathrm{d}a r_b n_c \left(\frac{2\Lambda}{D-2}\left[\omega^{bc} - \omega^{bc}_{\mathrm{AdS}}\right]\right) \end{aligned} \tag{45}$$

Kombinirajući s doprinosom od divergencije Killingovog vektora (43), dobivamo isti I_∞ kao u Schwarzschild-AdS slučaju (36). Integral po horizontu daje:

$$I_h = -(D-2)\frac{\kappa A}{8\pi G} + \int_{\partial\Sigma_h} \mathrm{d}S_{ab}\omega^{ab} \tag{46}$$

Iskoristimo li Komarovu formulu $I_\infty - I_h = 0$, ponovno dobivamo Smarrovu formulu (38). Sada je Θ dan s:

$$\Theta = -\left[\int_{\partial\Sigma_\infty} \mathrm{d}S_{ab}\left(\omega^{ab} - \omega^{ab}_{\mathrm{AdS}}\right) - \int_{\partial\Sigma_h} \mathrm{d}S_{ab}\omega^{ab}\right] \tag{47}$$

Primjetimo da je Θ jednak razlici integrala renormaliziranog Killingovog potencijala u beskonačnosti i Killingovog potencijala na horizontu, do na globalni minus.

V. PRVI ZAKON TERMODINAMIKE U PRISUTSTVU KOZMOLOŠKE KONSTANTE

Kao i u odjeljku VII.3, razmatrat ćemo familiju ploha prostornog tipa, označenih sa Σ. Vektorsko polje jediničnih normala vremenskog tipa označit ćemo s n_a ($n_a n^a = -1$). Neka je g_{ab} metrika 4D prostorvremena, te h_{ab} inducirana metrika na površini Σ:

$$g_{ab} = h_{ab} - n_a n_b \tag{48}$$

Ortogonalnost nam daje $h_{ab}n^b = 0$. Radimo folijaciju prostorvremena familijom hiperploha Σ. Za vremensku funkciju ćemo uzeti Killingov vektor ξ^a, tj. razmatrat ćemo evoluciju sustava duž vektorskog polja:

$$\xi^a = Nn^a + N^a \tag{49}$$

gdje $N = -\xi^a n_a$ predstavlja *lapse* funkciju a N^a *shift* funkciju, analogno relaciji (87). Razlog korištenja evolucije duž Killingovog vektora bit će spomenut niže u tekstu. Nadalje, razmatramo dvokomponentni Σ, takav da ima unutarnju plohu na horizontu, a vanjsku u beskonačnosti, sukladno diskusiji u prethodnim odlomcima. U odlomku VII.4 izveli smo gravitacijski hamiltonijan (110); ovdje ga ponovno navodimo u obliku $\mathcal{H} = NH + N^a H_a$ gdje

$$\begin{aligned} H &\equiv -2G_{ab}n^a n^b = -R^{(d-1)} + \tfrac{1}{|h|}\left(\tfrac{\pi^2}{d-2} - \pi^{ab}\pi_{ab}\right) \\ H_b &\equiv -2G_{ac}n^a h^c_b = -2D_a\left(|h|^{-\frac{1}{2}}\pi^{ab}\right) \end{aligned} \tag{50}$$

pri čemu smo uveli oznaku D_a za kovarijantnu derivaciju s obzirom na h_{ab}. Iskoristimo li relaciju (11) dobivamo:

$$H = -2\Lambda, \quad H_b = 0 \tag{51}$$

Sada ćemo razmotriti perturbaciju rješenja Einsteinove jednadžbe s kozmološkom konstantnom $\Lambda_{(0)}$ i Killingovim vektorom ξ^a. Neka su $s^{(0)}_{ab}$ i $\pi^{ab}_{(0)}$ neperturbirana rješenja. Evolucija duž Killingovog sada implicira $-\dot{\pi}^{ab}_{(0)} = 0, \dot{s}^{(0)}_{ab} = 0$. Uvodimo perturbaciju $3D$ prostorne metrike, momenta i kozmološke konstante:

$$\begin{aligned} s_{ab} &= s^{(0)}_{ab} + h_{ab} \\ \pi^{ab} &= \pi^{ab}_{(0)} + p^{ab} \\ \Lambda &= \Lambda_{(0)} + \delta\Lambda \end{aligned} \tag{52}$$

Uvrstimo li ovo u hamiltonove jednadžbe (51), dobivamo operator derivacije na hiperplohi Σ oblika:

$$\begin{aligned} &D_a B^a \equiv N\delta H + N^a \delta H_a = -2N\delta\Lambda \\ &D_a\left(B^a - 2\delta\Lambda\omega^{ab}n_b\right) = 0 \end{aligned} \tag{53}$$

Pri čemu smo iskoristili: $N = -n_a\xi^a = -D_c\left(n_a\omega^{ca}\right)$. Ovo sada prepoznajemo kao oblik Gaussovog zakona; podsjetnik, Gaussov zakon dan je s:

$$\int_V \nabla_\alpha A^\alpha \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = \oint_{\partial V} A^\alpha \mathrm{d}\Sigma_\alpha \tag{54}$$

Slijedi:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}a_c\left(B^c - 2\omega^{cd}n_d\delta\Lambda\right) = 0 \tag{55}$$

Integraciju radimo po dvokomponentnoj zatvorenoj plohi:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\hat{V}_{\text{out}}} \mathrm{d}\mathcal{S}r_c\left(B^c - 2\delta\Lambda\omega^{cb}n_b\right) \\ &= \int_{\partial\hat{V}_{\text{in}}} \mathrm{d}\mathcal{S}r_c\left(B^c - 2\delta\Lambda\omega^{cb}n_b\right) \end{aligned} \tag{56}$$

gdje r_c predstavlja jediničnu normalu u smjeru radijalno van na vanjskoj plohi, te radijalno unutra na unutarnjoj plohi.

Nadalje, u integralu po vanjskoj plohi iskoristimo činjenicu da Killingov potencijal nije jedinstven,

$$\omega^{cb} = \omega^{cb} - \omega^{cb}_{\text{AdS}} + \omega^{cb}_{\text{AdS}} \tag{57}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\hat{V}_{\text{out}}} \mathrm{d}\mathcal{S}r_c\left(B^c - 2\delta\Lambda\omega^{cb}_{\text{AdS}}n_b\right) \\ &= \int_{\partial\hat{V}_{\text{out}}} \mathrm{d}\mathcal{S}r_c\left(2\delta\Lambda\left(\omega^{cb} - \omega^{cb}_{\text{AdS}}\right)n_b\right) \\ &\quad + \int_{\partial\hat{V}_{\text{in}}} \mathrm{d}\mathcal{S}r_c\left(B^c - 2\delta\Lambda\omega^{cb}n_b\right) \end{aligned} \tag{58}$$

Vanjska ploha je ploha u beskonačnosti i nju možemo povezati s ukupnom masom M postavljajući da se vremenska funkcija asimptotski poravna s generatorom vremenskih translacija $\xi^a_{(t)} = (\partial_t)^a$. Sukladno diskusiji VII.5 imamo:

$$16\pi\delta M = -\int_\infty \mathrm{d}\mathcal{S}r_c\left(B^c\left[\partial_t\right] - 2\delta\Lambda\omega^{cb}_{\text{AdS}}n_b\right) \tag{59}$$

gdje dodan član ω^{cb}_{AdS} osigurava da je δM konačan.

Generatori horizonta događaja dani su Killingovim vektorom (vidi diskusiju VII.7):

$$\xi^a = \left(\partial_t + \Omega_H\partial_\varphi\right)^a \tag{60}$$

a površinska gravitacija je dana s:

$$\kappa = \left.\sqrt{-\frac{1}{2}\nabla^a\xi^b\nabla_a\xi_b}\right|_{r=r_+} \tag{61}$$

S obzirom na ovo Killingovo polje, dobivamo slijedeću relaciju:

$$2\kappa\delta A = -\int_H \mathrm{d}\mathcal{S}r_c B^c\left[\partial_t + \Omega\partial_\varphi\right] \tag{62}$$

gdje je A površina horizonta na kojem norma od ξ iščezava. Iz relacija (59) i (62) dobivamo:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \frac{\Theta}{8\pi G}\delta\Lambda \tag{63}$$

tj. proširenje prvog zakona termodinamike (2) na slučaj kada imamo neiščezavajuću kozmološku konstantu, za statična AdS rješenja. Primjetimo, ovdje smo uveli veličinu Θ kao pokratu:

$$\Theta = -\left[\int_{\partial\Sigma_\infty} \mathrm{d}S_{ab}\left(\omega^{ab} - \omega^{ab}_{\text{AdS}}\right) - \int_{\partial\Sigma_h} \mathrm{d}S_{ab}\omega^{ab}\right] \tag{64}$$

VI. ZAKLJUČAK

U kontekstu ostalih zakona termodinamike crnih rupa, bilo bi poželjno kada bismo uspjeli uspostaviti razumnu vezu između Θ i neke termodinamičke varijable. Uzimajući ostale identifikacije u obzir, mogli bismo zaključiti kako je najjednostavnija preostala opcija asocijacija s volumenom. Da bismo vidjeli ima li ova ideja smisla, izrazit ćemo površinske integrale koji se pojavljuju u (64) kao volumene integrale. Pretpostavit ćemo da je hiperploha Σ ortogonalna na Killingovo vektorsko polje ξ^a tako da je $\xi^a = Nn^a$. Kao generalizacija (90), možemo izraziti puni prostornovremenski volumni element u terminima intrinzičnog volumnog elementa $\sqrt{g^{(D-1)}}$ na Σ:

$$\sqrt{-g^{(D)}} = N\sqrt{g^{(D-1)}} \tag{65}$$

Površinski integral ω^{ab} može se raspisati kao:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}S_{ab}\omega^{ab} &= \int_{\Sigma} \mathrm{d}^{D-1}x\sqrt{g^{(D-1)}}n_b\xi^b \\ &= -\int_{\Sigma} \mathrm{d}^{D-1}x\sqrt{-g^{(D)}} \end{aligned} \tag{66}$$

iz čega možemo primjetiti korespodenciju s volumenom koji se proteže od horizonta crne rupe do beskonačnosti:

$$V_{BH} \equiv \int_{\Sigma} \mathrm{d}^{D-1}x\sqrt{-g^{(D)}} \tag{67}$$

Slično, integral $\omega^{ab}_{\mathrm{AdS}}$ preko površine u beskonačnosti može se napisati kao:

$$V_{\mathrm{AdS}} \equiv \int_{\partial\Sigma_\infty} \mathrm{d}S_{ab}\left(\omega^{ab}_{\mathrm{AdS}}\right) \tag{68}$$

Uvrstimo li to u (64) dobivamo:

$$\Theta = V_{BH} - V_{\mathrm{AdS}} \tag{69}$$

Primjetimo, volumen $V = -\Theta$ predstavlja volumen koji je izdvojen iz prostorvremena horizontom crne rupe. Stoga zaključujemo kako veličina Θ zbilja je u jednostavnoj korespodenciji s pojmom volumena crne rupe, imajući na umu pretpostavku naše analize, statično AdS prostorvrijeme.
Izvod prvog zakona termodinamike se jednostavno generalizira na stacionarni slučaj uzimanjući u obzir relaciju analognu relaciji (59). U razmatranju stacionarnih crnih rupa s neiščezavajućim angularnim momentom, dobili bi:

$$16\pi\delta J = \int_\infty \mathrm{d}\mathcal{S}r_c B^c\left[\partial_\varphi\right] \tag{70}$$

za generator rotacije $\xi^a_{(\phi)} = (\partial_\varphi)^a$ što bi u krajnjem rezultatu dalo još $\Omega\delta J$ doprinos, tj.

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega\delta J + \frac{\Theta}{8\pi G}\delta\Lambda \tag{71}$$

Nadalje, napravimo li identifikacije $T = \kappa/2\pi$ i $S = A/4G$ možemo primjetiti:

$$\delta M = T\delta S + V\delta P \tag{72}$$

gdje smo član s kozmološkom konstantom $\Lambda/8\pi G$ interpretirali kao tlak. Valja primjetiti kako δM više ne odgovara varijaciji unutarnje energije, kao što je to bilo u $\Lambda = 0$ slučaju, već varijaciji entalpije $H = E + PV$. Prisjetimo se, kozmološka konstanta može se shvatiti kao idealni fluid tlaka $P = -\Lambda/8\pi G$, sukladno relacijama (12), (15). To pak znači da će $\Lambda < 0$ u prostorvremenu inducirati pozitivan tlak. Veličina M onda se može shvatiti kao zbroj ukupne energije potrebne da se stvori crna rupa i rada potrebnog da se crna rupa smjesti u prostorvrijeme neiščezavajuće kozmološke konstante.
Valja imati na umu kako se termodinamička analiza u $\Lambda > 0$ slučaju komplicira zbog prisutstva kozmološkog horizonta (asimptotski de Sitter prostorvrijeme). Naime, svaki promatrač nužno će se nalaziti između dva horizonta, onog crne rupe te kozmološkog. Kozmološki horizont također ima pripadnu površinsku gravitaciju (tj. temperaturu (1) što znači da, između dva horizonta, ne postoji ravnotežno termodinamičko stanje. Također, zbog kozmološkog horizonta, nemamo više pojam asimptotskog Killingovog vektorskog polja vremenskog tipa. Naime, u slučaju pozitivne kozmološke konstante, asimptotski se približavamo kozmološkom horizontu pa će Killingovo polje asimptotski biti polje generatora horizonta, tj. asimptotski svjetlosnog tipa. To nam stvara problem prilikom definiranja pojma mase i angularnog momenta. Usprkos svemu, u radu[26] pokazano je ipak slaganje s relacijam $P = -\Lambda/8\pi G$ i u slučaju pozitivne kozmološke konstante. Finalni zaključak ukazuje na to da će tlak asociran s pozitivnom kozmološkom konstantom biti negativan te da će, u ovom radu izvedene relacije (Smarrova (38) i prvi zakon termodinamike crnih rupa (63)), i dalje vrijediti.

VII. DODATAK

Tehnička napomena Radi jednostavnosti, u svim izvodima u poglavljima koja nisu direktno vezana uz kozmološku konstantu, pretpostavit ćemo $\Lambda = 0$. Neiščezavajući Λ jednostavno se implementira zamjenom $R \to R - 2\Lambda$.

VII.1. Akcija

Akcija opće teorije relativnosti sastoji se od doprinosa gravitacijskom polju i doprinosu distribucije materije, tj. energije:

$$S_{GR}[\psi;g] = S_G[g] + S_M[\psi;g] \tag{73}$$

gdje se gravitacijski član sastoji od:

$$S_G[g] = S_{EH}[g] + S_B[g] - S_0 \tag{74}$$

Hilbertov član, Einsten-Hilbert akcija, dana je s

$$S = \frac{1}{8\pi G}\int \mathrm{d}^D x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{75}$$

gdje je R Riccijev skalar, a Λ kozmološka konstanta.
Površinski član dan je s:

$$S_B[g] = \frac{1}{8\pi}\oint_{\partial V} \varepsilon K\sqrt{|h|}\mathrm{d}^3y \tag{76}$$

gdje je ε +1 na ∂V vremenskog tipa, a -1 na ∂V prostornog tipa. h determinanta inducirane $3D$ metrike na ∂V, a K je trag ekstrinzične zakrivljenosti.
Nedinamički *član regularizacije* (koji utječe samo na numeričku vrijednost akcije)

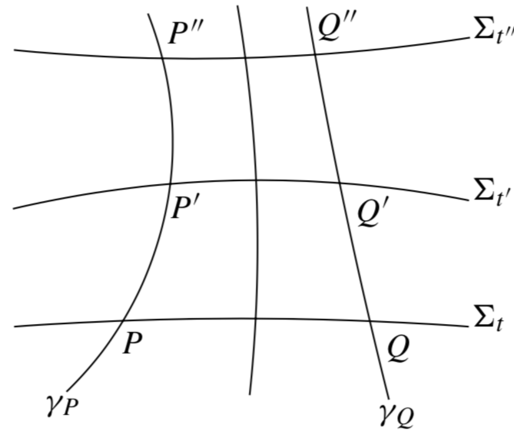
$$S_0 = \frac{1}{8\pi}\oint_{\partial V} \varepsilon K_0\sqrt{|h|}\mathrm{d}^3y \tag{77}$$

U kontekstu asimptotski ravnog prostorvremena, S_0 je gravitacijska akcija ravnog prostor-vremena, tako da je razlika $S_B - S_0$ tada dobro definirana u granici $r \to \infty$ gdje je r prostorna radijalna koordinata, osiguravajući asimptotski dobro definiranu akciju.
Jedini član gravitacijske akcije koji će nam u razmatranjima zapravo biti bitan jest $S_{EH}[g]$ koji generira dio Einsteinove jednadžbe koji sadrži G_{ab} tenzor. Problem je u tome što $S_{EH}[g]$, zbog prisustrva drugih derivacija metrike (u Riccijevom skalaru), generira i dodatne površinske članove. Da bi varijacija u konačnici iščezavala na rubu mnogostrukosti, u akciju moramo uključiti i $S_B[g]$ koji će točno poništiti spomenute površinske članove. S_0 je uveden radi normalizacije.
Radi jednostavnosti, u svim izvodima zato ćemo se fokusirati samo na $S_{EH}[g]$, zanemarujući generirane površinske članove.
Član materije ima oblik:

$$S_M[\psi; g] = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L}(\psi, \partial_\alpha\psi; g_{\alpha\beta})\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x \tag{78}$$

VII.2. Hamiltonova formulacija opće teorije relativnosti

Bitna simetrija implementirana u opću teoriju relativnosti jest koordinatna invarijantnost koja zahtjeva Lorentz kovarijantnu formulaciju teorije. Kako bi jednadžbe gibanja bile kovarijantne, od akcije zahtjevamo da bude skalarna veličina. U teoriji polja u ravnom prostor vremenu gustoća lagranžijana ovisila je o polju i prvoj derivaciji $\mathcal{L}(\psi, \delta_\alpha\psi)$, iz čega smo računali pripadni kononski implus $\pi = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta_t\psi}$. Bitno je primjetiti da smo na razini lagrangijeve gustoće, time i akcije, još mogli zahtjevati Lorentzovu invarijantnost, ali uvođenje vremenskog derivacije u kanonsku količinu gibanja prisiljava nas da odaberemo Lorentzov sustav. Dakle, na razini Hamiltonove gustoće $\mathcal{H} = \pi\delta_t\psi - \mathcal{L}$ izgubili smo Lorentzovu invarijantost. Da bismo Hamiltonov postupak generalizirali na zakrivljeno prostorvrijeme, moramo razraditi pristup koji nas nebi natjerao na odabir sustava.
Primijetimo da smo u Hamiltonovom pristupu teoriji polja u ravnom prostornomvremenu zapravo promatrali foliјaciju Minkowski prostorvremena u terminima snopova



Slika 4. Folijacija prostorvremena hiperplohama prostornog tipa [1]

t = const ravnih ploha. Razmatranje vremenske derivacije zapravo je značilo usporedbu konfiguracija polja na sukcesivnim t = const plohama, tj. razmatranje kako se polje mijenja kada prelazimo s jedne hiperplohe na drugu. U zakrivljenom prostorvremenu želimo razmišljati na sličan način, ali uvesti postupak neovisan o koordinatnom sustavu.

VII.3. (3+1) dekompozicija

Razmotrimo folijaciju prostorvremena (ref. *Slika 4.*) s proizvoljnim nepresjecajućim hiperplohama. Bitno je naglasiti da je analiza ograničena na konačan komadić prostorvremena kako bismo osigurali da se hiperplohe neće početi presjecati. Koordinatni sustav našeg 4D prostora označit ćemo s x^α. Uvodimo *vremensku funkciju* $t(x^\alpha) \equiv$ skalarno polje takvo da je $t = const$ na svakoj hiperplohi Σ_t., pri čemu pretpostavljamo da je $t(x^\alpha)$ jednoznačna funkcija. Naravno, vremenska funckija ne odgovara nužno vremenu u našem koordinatnom sustavu ali nam daje pojam vremena u smislu da je monotono rastuća funkcija vezana uz našu folijaciju, konstantna na svakoj hiperplohi (kao što smo imali i u prostoru Minkowskog). Normala na hiperplohi dana je vektorom $n_\alpha \sim \partial_\alpha t$, s odgovarajućom normom $n_\alpha n^\alpha = -1$.

Na svakoj hiperplohi definiramo koordinate y^a. U principu, možemo birati na svakoj hiperplohi koordinatni sustav neovisno, ali ono što zapravo želimo jest propagirati koordinatni sustav odabran na jednoj hiperplohi na ostale. U tu svrhu uvodimo kongruenciju krivulja označenih s γ (skup nepresjecajućih krivulja) parametrizirane s t, uvedene na način da svaka krivulja je krivulja konstante koordinate y^a, presjecajući folijaciju na način prikazan na *Slika 4.*. Kongruencija ne mora biti ortogonalna na folijaciju, iako ju u nekim slučajevima možemo odabrati takvom.
Neka t^α označava vektorsko polje tangente na krivulje. Ako pogledamo pomak duž krivulje

$$dx^\alpha = t^\alpha dt \tag{79}$$

i promjenu u t

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \left(\frac{\partial t}{\partial x^\alpha} t^\alpha \right) dt \tag{80}$$

$$\Rightarrow t^\alpha \partial_\alpha t = 1 \tag{81}$$

Primjetimo da nam ova konstrukcija daje alternativni izbor 4D koordinatnog sustava (t, y^α). Općenito će postojati relacija $x^\alpha = x^\alpha((t, y^\alpha))$ koja zadaje sustav parametarskih jednadžbi za krivulje γ. Vektorsko polje tangente na krivulje γ dano je s:

$$t^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y_a} \tag{82}$$

a polje tangenti na hiperplohama, koje odgovara pomacima na pojedinim Σ_t:

$$e_a^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t \tag{83}$$

S obzirom da vrijedi:

$$t^\mu \partial_\mu e_a^\alpha = \frac{\partial e_a^\alpha}{\partial \partial t} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^a \partial t} e_a^\mu \partial_\mu t^\alpha = \frac{\partial t^\alpha}{\partial y^a} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^a \partial t} \tag{84}$$

slijedi da je Lieva derivacija:

$$\mathfrak{L}_t e_a^\alpha = t^\mu \nabla_\mu e_a^\alpha - e_a^\mu \nabla_\mu t^\alpha = t^\mu \partial_\mu e_a^\alpha - e_a^\mu \partial_\mu t^\alpha \Rightarrow \mathfrak{L}_t e_a^\alpha = \mathfrak{L}_{e_a} t^\alpha = 0 \tag{85}$$

Dakle, t^α je Lie transportiran duž tangenatog vektora pojedine hiperplohe i obrnuto, e_a^{alpha} bit će Lie transportiran duž vektorskog polja tangente pojedine krivulje. Razmatrat ćemo slučaj kongruencije koja ne presjeca hiperplohe okomito, stoga imamo:

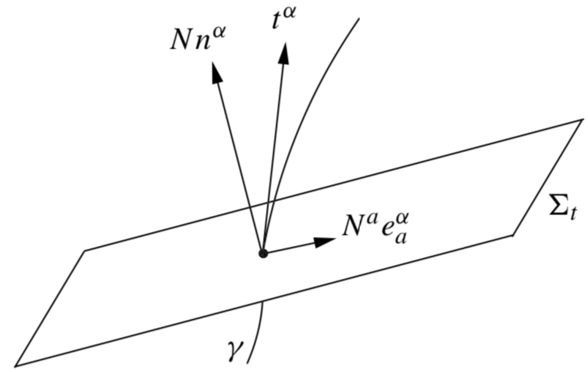
$$n_\alpha = -N \partial_\alpha t \tag{86}$$

Budući da $n_\alpha e_a^\alpha = 0$ imamo dobar izbor koordinatnog sustava (n^α, e_a^α). N je tzv. *lapse function*, to je normalna komponenta toka vektorskog polja u bazi (n^α, e_a^α). Vektorsko polje t^α rastavljamo u bazi (n^α, e_a^α) *Slika 5.*: 5:

$$t^\alpha = N n^\alpha + N^a e_a^\alpha \tag{87}$$

gdje N^a prezentira tzv. *shift function*, tangentnu na hiperplohu. Preostaje još pronaći metriku u bazi koordinatnog sustava vezanog za hiperplohe (t, y^a), te dekompoziciju pomaka dx^α u terminima komponenata duž kongruencije i komponenata duž hiperplohe:

$$\begin{aligned} dx^\alpha &= t^\alpha dt + e_a^\alpha dy^a \\ &= (N n^\alpha + N^a e_a^\alpha) dt + e_a^\alpha dy^a \\ &= N dt n^\alpha + e_a^\alpha (dy^a + N^a dt) \end{aligned}$$



Slika 5. Dekompozicija tangente na kongruenciju t^α u terminima *lapse* i *shift* funkcija [1]

$$\begin{aligned} & ds^2 = g_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \\ & = g_{\alpha\beta} [N dt n^\alpha + e_a^\alpha (dy^a + N^a dt)][N dt n^\beta + e_b^\beta (dy^b + N^b dt)] \\ & \Rightarrow \end{aligned}$$

$$ds^2 = -N^2 \mathrm{d}t^2 + h_{ab} \left(\mathrm{d}y^a + N^a \mathrm{d}t \right) \left(\mathrm{d}y^b + N^b \mathrm{d}t \right) \tag{88}$$

gdje je h_{ab} projekcija metrike na pojedinu hiperplohu:

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \tag{89}$$

Relacija (88) pretstavlja (3+1) decompoziciju. U kontekstu ove rasprave, determinanta metrike 4D prostorvremena $\sqrt{-g}$ poprima oblik:

$$\sqrt{-g} d^n x = N \sqrt{h} d^n x \tag{90}$$

VII.4. Računanje Hamiltonijana

U svrhu naše rasprave, dovoljno je ograničiti se na gravitacijski dio akcije, dio koji daje Einsteinov tenzor $G_{\alpha\beta}$ u Einsteinovim jednadžbama. U svrhu računa, potrebno je najprije uvesti neke korisne relacije (*Tehnička napomena*).

Tehnička napomena

Einsteinove jednadžbe za gravitacijsko polje konfiguracije materije i energije opisane tenzorom energije-impulsa T_{ab} dane su s:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{91}$$

gdje R_{ab} predstavlja Riccijev tenzor i R Riccijev skalar. R_{ab} i R samo su kontrakcije Riemannovog tenzora, stoga opisuju zakrivljenost. Iz ovog je korisno izraziti Riccijev skalar:

$$\begin{aligned} -R g_{ab} n^a n^b &= 2 \left(G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b \right) \\ -R n_b n^b &= 2 \left(G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b \right) \\ R &= 2 \left(G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b \right) \end{aligned} \tag{92}$$

S obzirom da radimo u terminima folijacije, tj. u terminima hiperploha Σ i pridruženih normala n^α, imat ćemo relacije koje su definirane samo na Σ i koje su čisto tangente na hiperplohe. U tu svrhu, radimo povlačenje (pullback) tenzora definiranih u cijelom 4D prostorvremenu (drugim riječima, projicirat ćemo ga na prostor Σ definiran koordinatnim sustavom y_a). Uvodimo zapis: $A_{a|b} = \nabla_\beta A_\alpha e^\alpha_a e^\beta_b$ za kovarijantni derivaciju duž hiperploha. Prisjetimo se, e^α_a vektori su tangentni pomaci duž hiperploha.
Vanjska zakrivljenost definirana je kao gradijent normalnog polja hiperploha:

$$K_{ab} = \nabla_\alpha n_\beta e^\alpha_a e^\beta_b \tag{93}$$

Uvodimo Gauss-Codazzi jednadžbe:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\alpha_a e^\beta_b e^\gamma_c e^\delta_d = R_{abcd} + \varepsilon \left(K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd}\right) \tag{94}$$

kako bismo ostvarili vezu između R_{abcd} (Riemannov tenzor projiciran na hiperplohu) i potpunog Riemannovog tenzora. Zapisano u drugom obliku:

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} n^\mu e^\alpha_a e^\beta_b e^\gamma_c = K_{ab|c} - K_{ac|b} \tag{95}$$

Nadalje, Riccijev tenzor dan je s:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g^{\mu v} R_{\mu\alpha v\beta} \\ &= \left(\varepsilon n^\mu n^\nu + h^{mn} e^\mu_m e^v_n\right) R_{\mu\alpha v\beta} \\ &= \varepsilon R_{\mu\alpha v\beta} n^\mu n^v + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e^\mu_m e^\nu_n \end{aligned} \tag{96}$$

i Riccijev skalar s:

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &= \left(\varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e^\alpha_a e^\beta_b\right) \left(\varepsilon R_{\mu\alpha v\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e^\mu_m e^v_n\right) \\ &= 2\varepsilon h^{ab} R_{\mu\alpha v\beta} n^\mu e^\alpha_a n^v e^\beta_b + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e^\mu_m e^\alpha_a e^v_n e^\beta_b \end{aligned} \tag{97}$$

gdje smo ponovno koristili Gauss-Codazzi jednadžbu. Iz ovog dobivamo:

$$G_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} \left[{}^{(3)}R - K_{ab}K^{ab} + K^2\right] \tag{98}$$

gdje je K_{ab} ekstrinzična zakrivljenost hiperplohe Σ_t, a K pripadni trag.

Ideja je izraziti sve u smislu ekstrinzična zakrivljenosti K_{ab}, jer će biti lakše napraviti varijaciju lagranžijeve gustoće s obzirom na K_{ab}. Stoga, izrazimo i Riccijev tenzor R_{ab}:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R^c{}_{acb} \\ R_{ab} n^a n^b &= R^c{}_{acb} n^b n^a \\ &= -\left(\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a\right) n^c n^a \\ &= \left(\nabla_a n^a\right)\left(\nabla_c n^c\right) - \nabla_a \left(n^a \nabla_c n^c\right) \\ &\quad - \left(\nabla_c n^a\right)\left(\nabla_a n^c\right) + \nabla_c \left(n^a \nabla_a n^c\right) \\ &= K^2 - K_{ac}K^{ac} - \nabla_a \left(n^a \nabla_c n^c\right) + \nabla_c \left(n^a \nabla_a n^c\right) \end{aligned}$$

iz čega dobivamo:

$$R_{ab} n^a n^b = K^2 - K_{ac}K^{ac} - \nabla_a \left(n^a \nabla_c n^c\right) + \nabla_c \left(n^a \nabla_a n^c\right) \tag{99}$$

Valja primjetiti da su osljednja dva člana su divergencije, što znači da će doprinositi površinskim članovima u akciji. U svrhu ove diskusije, površinske članove možemo zanemariti, lako se pokaže da ne utječu na hamiltonijan.

Sada smo spremni vratiti se računanju hamiltonijana. Kao što smo rekli, koncentrirat ćemo se na gravitacijski dio lagranžijana, zanemarujući površinske članove:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-g} R \\ &= N\sqrt{h} R \\ &= 2N\sqrt{h}\left(G_{ab}n^a n^b - R_{ab}n^a n^a\right) \\ &= 2N\sqrt{h}\left(\frac{1}{2}\left[{}^{(3)}R - K_{ab}K^{ab} + K^2\right] - K^2 - K_{ab}K^{ab}\right) \\ \mathcal{L} &= N\sqrt{h}\left({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) \end{aligned} \tag{100}$$

gdje smo koristili (90), (92), (98) i (99). Hamiltonova gustoća definirana je s:

$$\mathcal{H} = \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \sqrt{-g}\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i\right) \tag{101}$$

gdje je π^{ab} kanonski impuls, kanonski konjugirana varijabla $\dot{h}_{ab}$. Možemo izvrijedniti:

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} \\ &= \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ab}} \frac{\partial}{\partial K_{mn}} \left(16\pi\sqrt{-g}\mathcal{L}\right) \\ &= \sqrt{h} N \left[\frac{\partial^{(3)}R}{\partial \dot{h}_{ab}} + \frac{\partial\left(K_{ab}K^{ab}\right)}{\partial \dot{h}_{ab}} - \frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ab}}\right] \\ &= \sqrt{h}\left(K^{ab} - h^{ab}K\right) \end{aligned} \tag{102}$$

(3+1) dekompoziciju smo uveli kako bismo imali Lorentz invarijantnost na razini hamiltonijana. U tu svrhu također je potrebno promovirati $\partial_t \psi \to \mathfrak{L}_t \psi$ gdje $\mathfrak{L}_t$ Lie derivacija duž toka vremenske funkcije t. To daje:

$$\dot{h}_{ab} \equiv \mathfrak{L}_t h_{ab} \tag{103}$$

Uvrštavajući (89) dobivamo:

$$\dot{h}_{ab} = \mathfrak{L}_t \left(g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b\right) = \left(\mathfrak{L}_t g_{\alpha\beta}\right) e^\alpha_a e^\beta_b \tag{104}$$

Također, imamo Lievu derivaciju duž t^α

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_t g_{\alpha\beta} &= \nabla_\beta t_\alpha + \nabla_\alpha t_\beta \\ &= \nabla_\beta \left(N n_\alpha + N_\alpha\right) + \nabla_\alpha \left(N n_\beta + N_\beta\right) \\ &= n_\alpha \partial_\beta N + n_\beta \partial_\alpha N \\ &\quad + N\left(\nabla_\beta n_\alpha + \nabla_\alpha n_\beta\right) + \nabla_\beta N_\alpha + \nabla_\alpha N_\beta \end{aligned}$$

gdje $N^\alpha = N^a e^\alpha_a$. Projicirajući to na $e^\alpha_a e^\beta_b$ nam daje:

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + N_{a|b} + N_{b|a} \tag{105}$$

gdje smo upotrijebili oznaku za intrinzičnu derivaciju vektora zakrivljenosti unutar hiperplohe:

$$N_{a|b} = \nabla_\beta N_\alpha e^\alpha_a e^\beta_b \tag{106}$$

što nam daje:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}\left(\dot{h}_{ab} - N_{a|b} - N_{b|a}\right) \tag{107}$$

Koristeći (102) slijedi:

$$\sqrt{h}K^{ab} = \left(\pi^{ab} - \frac{1}{2}\pi h^{ab}\right) \tag{108}$$

gdje je $\pi \equiv h_{ab}\pi^{ab}$ trag.

Gustoća hamiltonijana dana je s:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i\right)\\ &= -\sqrt{h}N^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{h}}\left[\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right] + 2\pi^{ab}D_a N^a\\ &= \sqrt{h}\left[N\left[-^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2\right]\right.\\ &\quad - 2N^a\left[D_a\left(h^{-1/2}\pi^{ab}\right)\right] + 2D_a\left(h^{-1/2}N^a\pi^{ab}\right)\\ &= \sqrt{h}\left[N\left[-^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2\right]\right.\\ &\quad - 2N^a\left[D_a\left(h^{-1/2}\pi^{ab}\right)\right]\end{aligned} \tag{109}$$

gdje smo uveli D_a, operator kovarijantne derivacije s obzirom na h_{ab} na Σ hiperplohi, umjesto vertikalne notacije kako bi dobili izraz isti izrazu s notacijom iz[67]. Gravitacijski hamiltonijan možemo zapisati: $\mathcal{H} = NH + N^a H_a$, gdje

$$\begin{aligned}H &= -R^{(d-1)} + \frac{1}{|h|}\left(\frac{\pi^2}{d-2} - \pi^{ab}\pi_{ab}\right)\\ H_b &= -2D_a\left(|h|^{-\frac{1}{2}}\pi^{ab}\right)\end{aligned} \tag{110}$$

Primijetite da hamiltonian ovisi o funckijama N i N^a, što znači da ovisi o izboru kongruencije (tj. izboru toka vektorskog polja t^α), zatim ovisi o tome kako odlučimo napraviti folijaciju prostorvremena (izbor hiperploha Σ_t). Hamiltonijan ovisi i o tome kako odabiremo granicu (obično pomičemo granicu sve do beskonačnosti gdje ograničavamo hiperplohe da asimptotski prilaze hiperplohama nekog prostora, npr. hiperplohama ravnog prostora, AdS i sl.

Napomena o odabiru folijacije

Razmotrimo asimptotski ravni prostor i neka se naše hiperplohe približavaju površini konstantnog vremena u prostoru Minkowskog. Primijetite da i dalje imamo slobodu izbora toka, što znači da još uvijek imamo slobodu odabrati bilo koji N i N^a u dekompoziciji $t^\alpha = Nn^\alpha + N^a e^\alpha_a$. Ali napravimo izbor, odaberimo $N = 1$ i $N^a = 0$. Primijetite da će nam ovo dati $t^\alpha = n^\alpha$ koji će usmjeravati u smjeru vremenski konstantnog vektora u asimptotskom prostoru Minkowskog. To znači da smo odabrali tok takav da odgovara *asimptotskim vremenskim translacijama*. Na taj se način hamiltonijan povezuje s pojmom mase za ukupnog prostorvremena. Ako odaberemo tok koji će biti dan s $N = 0$ i $N^a = 1$, dobit ćemo koincidenciju s *asimptotskim prostornim translacijama*. Hamiltonian koji bi se procijenio u ovom slučaju bio bi ukupni linearni moment količine gibanja. Međutim, više nas zanima dobiti hamiltonijan koji odgovara angularnom momentu količine gibanja, što dobivamo ukoliko odaberemo $N = 0$ i $N_\alpha = \phi_a = \frac{y_a}{\bar{\phi}}$ gdje je $\bar{\phi}$ *rotacijska koordinata u asimptotski ravnom prostorvremenu.*

Napomena o odabiru početnih uvjeta

Da bismo riješili jednadžbe gibanja, moramo nametnuti početne uvjete za metrički tenzor i njegovu derivaciju. Prvi korak je napraviti proizvoljan izbor hiperploha i odaberite jednu od njih kao površinu na kojoj ćemo odrediti početne uvjete. Definiramo neki koordinatni sustav na hipeplohi i razlažemo prostor-vremensku metriku $g_{\alpha\beta}$ u terminima komponenata duž hiperplohe i komponenata koje karakteriziraju pomake okomite na hiperplohu. Početne vrijednosti za prostornovremensku metriku zadajemo u terminima intrinzične metrike h_{ab}. Valja primjetiti kako je ovdje implementirana i koordinatna neovisnost; naime, početne vrijednosti za g_{ab} mogu biti samo šest komponenata inducirane metrike h_{ab}, što znači da preostaju četiri proizvoljne komponente (koje točno odgovaraju simetriji odabira koordinatnog sustava).
Potrebno je fiksirati i početne vrijednosti vremenske derivacije metrike. Vremenska derivacija metrike može se shvatii u terminima tenzora zakrivljenosti K_{ab}, što se vidi iz činjenice da K_{ab} nosi informacije o derivaciji metrike u smjeru normale na hiperplohu. Stoga se problem početne vrijednosti sastoji u određivanju dva (simetrična) tenzorska polja, h_{ab} i K_{ab}, na hiperplohi Σ. Međitim, h_{ab} i K_{ab} nisu proizvoljni, oni su povezani s G_{ab} i tenzorom zakrivljenosti na način koji smo vidjeli u tehničkoj napomeni. Drugim riječima, postoje jednadžbe ograničenja koje ograničavaju naše tenzore početnih uvjeta. Prisutnost takvih ograničenja u Hamiltonovoj formulaciji karakteristično je obilježje baždarnih teorija ili općenito kovarijantnih teorija.

VII.5. Komarove relacije

Kao što smo rekli u *Napomena o odabiru folijacije*, hamiltonijan izvrijednjen za tok asociran s asimptotskim vremenskim translacijama daje nam pojam mase ukupnog prostorvremena, dok nam tok vektorskog polja t^α poistovjećen s rotacijama daje angularni moment ukupnog prostorvremena. Konkretno, za stacionarne i aksijalno simetrične prostore imamo formule poznate kao Komarove formule:

$$M = -\frac{1}{8\pi}\lim_{S_t\to\infty}\oint_{S_t}\nabla^\alpha\xi^\beta_{(t)}\mathrm{d}S_{\alpha\beta} \tag{111}$$

i

$$J = \frac{1}{16\pi}\lim_{S_t\to\infty}\oint_{S_t}\nabla^\alpha\xi^\beta_{(\phi)}\mathrm{d}S_{\alpha\beta} \tag{112}$$

gdje su $\xi_{(t)}$ i $\xi_{(\phi)}$ Killingovi vektori, a površinski element dan je s:

$$\mathrm{d}S_{\alpha\beta} = -2n_{[\alpha}r_{\beta]}\sqrt{\sigma}\mathrm{d}^2\theta \tag{113}$$

gdje su n_α i r_α normale na S_t vremenskog i prostornog tipa. Površina S_t je $2D$ ploha, rub hiperplohe Σ. Intrinzičan koordinatni sustav definiran na S_t je (λ,Θ^A). Valja imati na umu da dane definicije za masu i kutnu količinu gibanja ne uključuju specifičan izbor koordinata. Možemo se poslužiti Stokesovim teoremom:

$$\int_V \nabla_\beta B^{\alpha\beta}\mathrm{d}\Sigma_\alpha = \frac{1}{2}\oint_\Sigma B^{\alpha\beta}\mathrm{d}S_{\alpha\beta} \tag{114}$$

gdje $B^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha\xi^\beta$ pa imamo:

$$\begin{aligned}\nabla^\beta B^{\alpha\beta} &= \nabla_\beta\nabla^\alpha\xi^\beta \\ &= -\nabla_\beta\nabla^\beta\xi^\alpha = -\Box\xi^\alpha\end{aligned} \tag{115}$$

Može se pokazati da Killingovi vektori zadovoljavaju:

$$\Box\xi^\alpha = -R^\alpha_\beta\xi^\beta \tag{116}$$

iz čega slijedi:

$$\oint_S \nabla^\alpha\xi^\beta\mathrm{d}S_{\alpha\beta} = 2\int_\Sigma R^\alpha_\beta\xi^\beta\mathrm{d}\Sigma_\alpha$$

Iskoristimo li $\mathrm{d}\Sigma_\alpha = -n_\alpha\sqrt{h}\ \mathrm{d}^3y$ i Einsteinove jednadžbe polja imamo:

$$\oint_S \nabla^\alpha\xi^\beta\mathrm{d}S_{\alpha\beta} = -16\pi\int_\Sigma\left(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)n^\alpha\xi^\beta\sqrt{h}\ \mathrm{d}^3y$$

iz čega dobivamo konačan oblik Komarovih relacija:

$$M = 2\int_\Sigma\left(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)n^\alpha\xi^\beta_{(t)}\sqrt{h}\mathrm{d}^3y \tag{117}$$

$$J = -\int_\Sigma\left(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)n^\alpha\xi^\beta_{(\phi)}\sqrt{h}\mathrm{d}^3y \tag{118}$$

Ove nam relacije omogućavaju definiranje gustoće mase i gustoće angularnog momenta prostor-vremena preko tenzora energije-impusla (uočimo da je $\sqrt{h}\mathrm{d}^3y$ invarijantan volumni element, stoga su gustoće ostatak podintegralne funkcije).

Razmotrimo 'probni' tenzor energije-impusla, tako da ne sudjeluje u izgradnji zakrivljenost u našem prostornom vremenu (kao kada razmatramo gibanje 'probne' mase ili naboja u nekom polju). Ono što želimo izračunati je prijenosa mase i momenta gibanja kroz hiperpovršinu u stacionarnom, aksijalno simetričnom prostor-vremenu u kojem imamo $\xi_{(t)}$ i $\xi_{(\phi)}$ kao Killingove vektore.

Nećemo izložiti cjelovit izvod izraza, već ćemo ih pokušati malo motivirati u svrhu boljeg razumijevanja. Razmotrimo idealan fluid s tenzorom energije-impusla $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$ (tj. model prašine). Ovdje je ρ gustoća mase, a u^α 4-brzina. Očuvanje energije-impulsa daje nam:

$$0 = \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \rho((\nabla_\beta u^\alpha)u^\beta + u^\alpha(\nabla_\beta u^\beta)) \tag{119}$$

Primjetimo da nam $a^\alpha = u^\beta\nabla_\beta u^\alpha$ daje akceleraciju u prvom članu, a brzinu u^α u drugom. S obzirom da su brzina i akceleracija uvijek okomite, oba člana moraju biti nula kako bi ukupno dali nulu :

$$a^\alpha = 0 \implies u^\alpha \text{ zadovoljava geodetsku jednadžbu}$$

i

$$j^\alpha = \rho u^\alpha \text{ je očuvana veličina:}$$

$$\nabla_\alpha j^\alpha = 0 \tag{120}$$

Ovaj se vektor može interpretirati kao tok mase mirovanja fluida. Da bismo dobili energiju koju nosi element fluida, moramo uzeti u obzir očuvanu količinu koja će se prenositi geodetskim gibanjem elementa fluida. To uključuje Killingove vektore:
$\tilde{E} \equiv -u_\alpha\xi^\alpha_{(t)}$ očuvana energija po jediničnoj masi i
$\tilde{L} \equiv u_\alpha\xi^\alpha_{(\phi)}$ očuvan angularni moment po jediničnoj
(obje veličine su konstante gibanja). Tada $\varepsilon^\alpha = \tilde{E}j^\alpha$ predstavlja tok gustoće energije, dok $\ell^\alpha = \tilde{L}j^\alpha$ je tok angularnog momenta. Primjetimo:

$$\varepsilon^\alpha = \tilde{E}j^\alpha = -u_\beta\xi^\beta_{(t)}j^\alpha = -T^\alpha_\beta\xi^\beta_{(t)}$$

kao i

$$\ell^\alpha = \tilde{L}j^\alpha = u_\beta\xi^\beta_{(\phi)}j^\alpha = T^\alpha_\beta\xi^\beta_{(\phi)}$$

Oba vektora su iščezavajuće divergencije, što vidimo na primjer:

$$\nabla_\alpha\varepsilon^\alpha = -\nabla_\alpha T^\alpha_\beta\xi^\beta_{(t)} - T^\alpha_\beta\nabla_\alpha\xi^\beta_{(t)} = 0$$

prvi član iščezava zbog očuvanja energije-imoulsa, dok drugi član iščezava zbog toga što je $\nabla_\alpha\xi^\beta_{(t)}$ antisimetričan tenzor, a T^α_β simetričan. To implicira da je integral ε^α or ℓ^α po hiperplohi ∂V iščezavajuć:

$$\oint_{\partial V} \varepsilon^\alpha \mathrm{d}\Sigma_\alpha = 0 \tag{121}$$

Što pak znači da je ukupni prijenos energije preko hiperplohe ∂V također nula. Drugim riječima, imamo očuvanje ukupne energije. Pertubacija mase i angularnog momenta, tj. transfer probnog tenzora energije-impulsa preko hiperplohe Σ_α jednostavno je dan integralom izraza za gustoću:

$$\delta M = \int_\Sigma \varepsilon^\alpha \mathrm{d}\Sigma_\alpha = \int_\Sigma -T^\alpha_\beta \xi^\beta_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_\alpha \tag{122}$$

$$\delta J = \int_\Sigma \ell^\alpha \mathrm{d}\Sigma_\alpha = \int_\Sigma T^\alpha_\beta \xi^\beta_{(\phi)} \mathrm{d}\Sigma_\alpha \tag{123}$$

Generalizacija Komarovih relacija na D dimenzija dana je s:

$$\frac{D-2}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}S_{ab} \nabla^a \xi^b = 0 \tag{124}$$

Površinski član je 2D $dS_{bc} = 2dar_{[b}n_{c]}$, gdje je n_a pomoćni vektor svjetlosnog tipa, normala na Σ (u smjeru budućnosti), a k_b jedinična normala na $\partial\Sigma$, unutar Σ površine. Gornji rezultat lako je pokazati ukoliko iskoristimo Gaussov teorem:

$$\int_V \nabla_\alpha A^\alpha \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x = \oint_{\partial V} A^\alpha \mathrm{d}\Sigma_\alpha \tag{125}$$

slijedi

$$\frac{D-2}{8\pi G} \int_\Sigma \mathrm{d}\Sigma^a \nabla_a \nabla^a \xi^b = 0 \tag{126}$$

te invociramo identitet Killingovih vektora:

$$\nabla_a \nabla^a \xi^b = -R^b_c \xi^c \tag{127}$$

gdje valja primijetiti da u iz Einsteinove jednadžbe u vakuumu imamo $R_{ab} = 0$ čime dobivamo (124).

VII.6. Smarrova formula

Smarrova formula dana je s:

$$M_H = 2\Omega_H J_H + \frac{\kappa A}{4\pi} \tag{128}$$

i predstavlja jednostavnu algebarsku relaciju između mase, površine i angularnog momenta crne rupe. Izvod se lako pokaže korištenjem Komarovih formula. Razmatramo hiperplohu prostornog tipa, koja se proteže od horizonta događaja do prostorne beskonačnosti. Vanjska površina je zatvorena površina u beskonačnosti, označena s S. Unutrašnja površina je $2D$ presjek horizonta događaja, označena s $\mathcal{H}$. Koristimo formule (111), (111) i Stokesov teorem, potpuno analogno diskusiji u odlomku VII.5. Jedina će razlika biti to što je sada površina Σ dvokomponentna, što će rezultirati dodatnim članom od integracije po unutarnjoj plohi $\mathcal{H}$. Slijedi:

$$M_{tot} = M_H + 2\int_\Sigma \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}\right) n^\alpha \xi^\beta_{(t)} \sqrt{h} \mathrm{d}^3 y \tag{129}$$

$$J_{tot} = J_H - \int_\Sigma \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}\right) n^\alpha \xi^\beta_{(\phi)} \sqrt{h} \mathrm{d}^3 y \tag{130}$$

gdje su M_H i J_H masa i angularni moment crne rupe. Sada možemo jednostavno raspisati:

$$\begin{aligned} M_H - 2\Omega_H J_H &= -\frac{1}{8\pi} \oint_H \nabla^\alpha \left(t^\beta + \Omega_H \phi^\beta\right) \mathrm{d}S_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint_H \nabla^\alpha \xi^\beta \mathrm{d}S_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_H \kappa \xi^\beta N_\beta \mathrm{d}S \\ &= \frac{\kappa A}{4\pi} \end{aligned}$$

□

gdje smo koristili jednadžbe (131), (132) te $\xi^\alpha N_\alpha = -1$ i činjenicu da je κ konstantan na $\mathcal{H}$.

VII.7. Stacionarne crne rupe

Slučaj stacionarnih rupa pojavljuje se kada imamo Killingovo polje vremenskog tipa. To znači da $\mathfrak{L}_{\xi_{(t)}} g_{\mu\nu} = 0$, točnije, u prikladnim koordinatama metrika će biti neovisna o vremenu. Statičke crne rupe restriktivnija su kategorija gdje zahtijevamo ne samo da postoji Killingovo vremensko polje već da je ono i ortogonalno na hiperplohu. Prema teoremu Stephena Hawkinga [19], stacionarna crna rupa je ili statična (ne rotirajući) ili aksijalno simetrična (rotirajući). U oba slučaja imat ćemo dva Killingova vektora: $\xi_{(t)}$ i $\xi_{(\phi)}$. Hawking je također pokazao da će postojati linearna kombinacija Killingovih vektora takva da je nula na horizontu događaja:

$$\xi^\alpha_{(t)} + \xi^\alpha_{(\phi)} \Omega_H \equiv \xi^\alpha_{(\Theta)} \tag{131}$$

Linearna kombinacija Killingova vektora s konstantnim koeficijentima opet je Killing vektor. Ovdje je Ω_H kutna brzina crne rupe (u statičnom slučaju $\Omega_H = 0$, ali u stacionarnom slučaju nije nula).
Budući da je $\xi^\alpha_{(\Theta)}$ svjetlosnog tipa, podsjetimo da će biti i tangentan i okomit na hiperplohu. Kao posljedica $\xi^\alpha_{(\Theta)}$ će zadovoljiti geodetsku jednadžbu na horizontu događaja:

$$\xi^\beta_{(\Theta)} \nabla_\beta \xi^\alpha_{(\Theta)} = \kappa \xi^\alpha_{(\Theta)} \tag{132}$$

pri čemu smo parametrizirali s nekim parametrom v takav da nije afin. Parametar κ nam, na neki način, pokazuje koliko parametar v odstupa od toga da bude afin na horizontu. Može se pokazati da $\kappa = const$, što je zapravo iskaz 0. zakona termodinamike (cf. 1). Fizikalno κ je *površinska gravitacija*. Površinska gravitacija se može shvatiti kao sila potrebna da promatrač iz beskonačnosti dovede česticu (jedinične mase) do horizonta.

VII.8. Prvi zakon termodinamike crnih rupa

Tijekom kvazistatičnog procesa stacionarna crna rupa mase M, kutne količine gibanja J i površine A pod infinitezimalnom promjenom svojih parametara prelazi u drugo stacionarno stanje. Iskaz prvog zakona termodinamike glasi:
Promjene u masi, kutnom momentu i površini povezane su s

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H \delta J \tag{133}$$

Pokažimo to. Pretpostavimo da je crna rupa perturbirana malom količinom materije koju opisuje beskonačno mali tenzor energije impulsa $T_{\alpha\beta}$. Podsjetimo da su promjene mase i impulsa generirane prijenosom materije preko hiperplohe, u ovom slučaju horizonta, dane relacijama (122) i (123):

$$\delta M = -\int_H T^\alpha_\beta \xi^\beta_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_\alpha$$

$$\delta J = \int_H T^\alpha_\beta \xi^\beta_{(\phi)} \mathrm{d}\Sigma_\alpha$$

gdje su integracije preko cijelog horizonta događaja. Usmjereni površinski element na horizontu događaja dan je s: $d\Sigma^\alpha = \xi^\alpha_{(\Theta)} \mathrm{d}S\mathrm{d}v$ gdje $\xi^\alpha_{(\Theta)}$ označava smjer elementa,a dv integraciju duž generatora i d$S = \sqrt{\sigma} d^2\theta$ površina presjeka na horizontu događaja. Dalje, označit ćemo s $\mathcal{H}(v)$ poprečne presjeke pomoću kojih razmatramo folijaciju horizonta. Uvrštavamo:

$$\begin{aligned} \delta M - \Omega_H \delta J &= \int_H T_{\alpha\beta}\left(\xi^\beta_{(t)} + \Omega_H \xi^\beta_{(\phi)}\right)\xi^\alpha_{(\Theta)} \mathrm{d}S\mathrm{d}v \\ &= \int \mathrm{d}v \oint_{H(v)} T_{\alpha\beta}\xi^\alpha_{(\Theta)}\xi^\beta_{(\Theta)} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{134}$$

Razmotrimo mali snop generatora kao što je prikazano na Slici 6. Promatrajući brzinu promjene male površine δS dok se krećemo duž generatora, definiramo veličinu θ kao frakcijsku brzinu promjene površine presjeka kongruencije:

$$\theta = \frac{1}{\delta S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\delta S \tag{135}$$

Uvodimo θ iz razloga što nam je potrebna Raychaudhurijeva jednadžba kako bismo riješili integral. Raychaudhurijeva jednadžba za kongruenciju geodezika svjetlosnog tipa:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \tag{136}$$

gdje je $B_{\alpha\beta} = \nabla_\beta u_\alpha$. Jednadžba opisuje divergiranje i konvergiranje geodezika unutar kongruencije u terminima sljedećih veličina: skalar ekspanzije $\theta = B^\alpha_\alpha = \nabla_\alpha u^\alpha$, tenzor smicanja $\sigma_{\alpha\beta} = B_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta}$ te tenzor rotacije $\omega_{\alpha\beta} = B_{[\alpha\beta]}$. S obzirom da su θ i $\sigma_{\alpha\beta}$ veličine u kojima se $T_{\alpha\beta}$ pojavljuje do prvog reda, zanemarujemo kvadratične članove u Raychaudhurijevoj jednadžbi:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v} = \kappa\theta - 8\pi T_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \tag{137}$$

Slijedi:

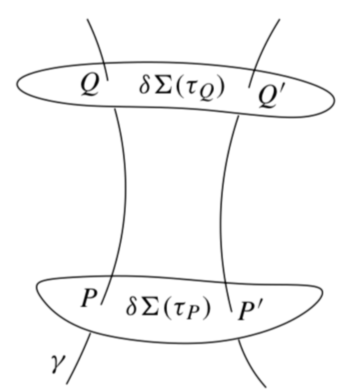
$$\begin{aligned} \delta M - \Omega_H \delta J &= -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}v \oint_{\mathcal{H}(v)} \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v} - \kappa\theta\right)\mathrm{d}S \\ &= -\frac{1}{8\pi}\oint_{\mathcal{H}(v)} \theta \mathrm{d}S \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\kappa}{8\pi}\int \mathrm{d}v \oint_{H(v)} \theta \mathrm{d}S \end{aligned}$$

Primjetimo kako je v u izrazu za površinu $\mathcal{H}(v)$ fiksan tijekom integracije preko $\mathcal{H}(v)$ površine, stoga diferenciranje s obzirom na v možemo izvući ispred površinskog integrala. S obzirom da je crna rupa stacionarna prije i poslije integracije, to implicira $\theta(v = \pm\infty) = 0$ stoga prvi član iščezava.

Uvrštavanjem jednadžbe (135) daje nam:

$$\delta M - \Omega_H \delta J = \frac{\kappa}{8\pi}\int \mathrm{d}v \oint_{\mathcal{H}(v)} \left(\frac{1}{\delta S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\delta S\right)\mathrm{d}S \tag{138}$$

Na svakoj hiperplohi imamo koordinatni sustav označen



Slika 6. Mijenjanje poprečnog presjeka kongruencije prilikom divergencije/konvergencije geodezika unutar kongruencije. Napomena: poprečni presjek na ovoj je slici označen sa Σ, što je u našoj notaciji označavalo $3D$ hiperplohu, a u ovom kontekstu razmatramo $2D$ hiperplohu S (koja predstavlja rub plohe Σ) [1]

s $y^a = (v, \theta^A)$gdje je v parametar duž krivulja, a θ^A parametar poprečno na krivulje. Površina poprečno na kongruenciju - površina poprečnog presijeka, označena na Slici 6, je dana s $\delta S = \sqrt{\sigma} d^2\theta$. Valja primjetiti da, s obzirom da su koordinate *sugibajuće*, $d^2\theta$ se ne mijenja prilikom evoluiranja poprečnog presijeka u vremenu. Imajući to na umu, vraćamo se relaciji (138):

$$
\begin{aligned}
\delta M - \Omega_H \delta J &= \frac{\kappa}{8\pi} \int \mathrm{d}v \oint_{\mathcal{H}(v)} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \sqrt{\sigma} \right) \mathrm{d}S \\
&= \frac{\kappa}{8\pi} \oint_{\mathcal{H}(v)} \mathrm{d}S \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{\kappa}{8\pi} \delta A
\end{aligned}
\tag{139}
$$

□

[1] Eric Poisson, A Relativist's toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics

[2] Ivica Smolić, Diferencijalna geometrija u fizici

[3] Matthias Blau, Lecture Notes on General Relativity

[4] Robert M. Wald, General Relativity

[5] Sean Carroll, Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity

[6] Kastor D, Ray S and Traschen J 2009 Enthalpy and the mechanics of AdS black holes Class. Quantum Grav. 26 195011

[7] David Kubiznak, Robert B. Mann, Mae Teo, Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda, arXiv:1608.06147 [hep-th]

[8] Jennie Traschen, Constraints on stress-energy perturbations in general relativity, https://doi.org/10.1103/PhysRevD.31.283

[9] Robert M. Wald, The Thermodynamics of Black Holes, arXiv:gr-qc/9912119

[10] S. Carlip, Black Hole Thermodynamics, arXiv:1410.1486 [gr-qc]

[11] Edmund Bertschinger, Symmetry Transformations, the Einstein-Hilbert Action, and Gauge Invariance, Massachusetts Institute of Technology Department of Physics

[12] Francis Tong, A Hamiltonian Formulation of General Relativity

[13] Geoffrey Compére, An introduction to the mechanics of black holes, Lecture notes prepared for the Second Modave Summer School in Mathematical Physics

[14] Bazanski S L and Zyla P 1990 A Gauss type law for gravity with a cosmological constant Gen. Rel. Grav. 22 379

[15] Kastor D 2008 Komar integrals in higher (and lower) derivative gravity Class. Quantum Grav. 25 175007 (arXiv:0804.1832 [hep-th])

[16] Lawson, H. Blaine. Foliations. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), no. 3, 369–418. https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183535509

[17] Daniel Sudarsky and Robert M. Wald, Extrema of mass, stationarity, and staticity, and solutions to the Einstein-Yang-Mills equations, Phys. Rev. D 46, 1453 – Published 15 August 1992

[18] Jacob D. Bekenstein, Black Holes and Entropy, Phys. Rev. D 7, 2333 – Published 15 April 1973

[19] Hawking, S.W. Black holes in general relativity. Commun.Math. Phys. 25, 152–166 (1972)

[20] Bardeen J M, Carter B and Hawking S W 1973 The four laws of black hole mechanics Commun. Math. Phys. 31 161–70

[21] S.W. Hawking, Particle creation by black holes, Comm. Math. Phys. 43 (1975) 199

[22] Einstein, Albert, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitaetstheorie, 1917

[23] Charles W Misner, Kip S Thorne,John Archibald Wheeler - Gravitation, San Francisco, W.H. Freeman (1973)

[24] Marcus Spradlin, Andrew Strominger and Anastasia Volovich, Les Houches Lectures on de Sitter Space

[25] M. Cvetič, G. W. Gibbons, D. Kubizňák, and C. N. Pope, Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume, Phys. Rev. D 84, 024037 – Published 20 July 2011

[26] Brian P. Dolan, David Kastor, David Kubizňák, Robert B. Mann and Jennie Traschen, Thermodynamic volumes and isoperimetric inequalities for de Sitter black holes, Phys. Rev. D 87, 104017 – Published 15 May 2013

[27] Adler, Ronald J.; Casey, Brendan; Jacob, Ovid C. (1995), "Vacuum catastrophe: An elementary exposition of the cosmological constant problem". American Journal of Physics. 63 (7): 620–626.

[28] Lovelock, D. (1971). "The Einstein Tensor and Its Generalizations". Journal of Mathematical Physics. 12 (3): 498–501